Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 8

A1. Sei G eine endliche Untergruppe von $O_3(\mathbb{R})$ die nicht in $SO_3(\mathbb{R})$ enthalten ist, und sei $H = G \cap SO_3(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt $(G : H) = 2$. (5)

Lösung: Die Determinante ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von G nach $\{-1, 1\}$ und H dessen Kern. Somit ist $|G/H| = 2$.

(b) Es gelte $-E_3 \notin G$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung (5)

$$\varphi : G \to SO_3(\mathbb{R}), g \mapsto \det(g) \cdot g$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung: Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert, da $\det(\det(g)g) = \det(g)^2 = 1$. Es handelt sich um einen Gruppenhomomorphismus, da $\det(gh)gh = (\det(g)g)(\det(h)h)$. Die Abbildung ist injektiv, denn ist $\det(g)g = E_3$, so gilt $g = \det(g)^{-1}E_3$; mit der Annahme also $g = E_3$.

(c) Es gelte nun $-E_3 \in G$. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $G \to H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt. (Hinweis: Benutzen Sie die Konstruktion aus der vorigen Teilaufgabe.) (5)

Lösung: Definiere $\psi : G \to H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, g \mapsto (\varphi(g), \frac{1-\det(g)}{2})$. Dies ist offensichtlich eine wohldefinierte Abbildung. Es ist dies ein Gruppenhomomorphismus, wenn dies komponentenweise der Fall ist. In der ersten Komponente wurde dies in der vorigen Teilaufgabe gezeigt. Für die zweite Komponente ist dies klar, da det ein Gruppenhomomorphismus ist und die Abbildung nur die multiplikative Gruppe $\{-1, 1\}$ in die additive Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ übersetzt.

(d) Betrachten Sie nun die **vollen** Symmetriegruppen von Tetraeder, Würfel und Ikosaeder. Welche von diesen enthalten $-E_3$? Bestimmen Sie für die Gruppen, die $-E_3$ nicht enthalten, das Bild unter der Abbildung φ. (5)

Lösung: Die vollen Symmetriegruppen von Würfel und Ikosaeder enthalten $-E_3$, die des Tetraeders nicht.

A2. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe H heißt von endlichem Index in G, falls die Mächtigkeit von G/H endlich ist. In diesem Fall nennt man diese Mächtigkeit $(G : H)$, den Index von H in G.

(a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index in G und $K \subseteq H$ eine Untergruppe von endlichem Index in H. Zeigen Sie, dass gilt $(G : K) = (G : H) \cdot (H : K)$. (10)

Lösung: Betrachte die Abbildung $G/K \to G/H, g \mapsto g$. Diese Abbildung ist wohldefiniert (ist $g = g'$ in G/K, dann ist $g^{-1}g' \in K \subseteq H$ und also $g = g'$ in G/H) und surjektiv. Es bleibt also noch zu zeigen, dass jedes $g \in G/H$ genau $(H : K)$ Urbilder besitzt. Das Urbild ist also $gH \subseteq G/K$. Zwei Elemente $gh, gh' \in gH$ sind gleich in G/K, wenn $h^{-1}h' \in K$, d.h., das Urbild lässt sich auffassen als H/K.

(b) Seien $H \subseteq G$ und $K \subseteq G$ jeweils Untergruppen von endlichem Index in G. Zeigen Sie, dass dann auch $H \cap K$ von endlichem Index in G ist. (10)

Lösung: Sei $\varphi : H/(K \cap H) \to G/K, h \mapsto h$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn ist $h^{-1}h' \in K \cap H$, dann ist insbesondere $h^{-1}h' \in K$. Die Abbildung ist injektiv, denn its $\varphi(h) = \varphi(h')$, dann ist $h^{-1}h' \in H \cap K$. Somit ist die Mächtigkeit von $H/(K \cap H)$ kleiner als die von G/K, welche aber bereits als endlich angenommen wurde. Nach voriger Teilaufgabe ist dann $K \cap H$ von endlichem Index in G, da H von endlichem Index in G ist.

A3. Zusatzaufgabe: In der Übung wurde die Menge $X = \{\{1, \dots, 7\} \to \{1, 2, 3\}\}$ und die Gruppe $G = D_7$ betrachtet.

(a) Um eine Wirkung von G auf X zu erklären, kann man eine Abbildung $G \times X \to X$ festlegen. In der Übung wurde die Festlegung $g \cdot f := (i \mapsto f(g(i)))$ getroffen. Wie lautet die zugehörigen Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(X)$? Zeigen Sie, dass dies **keine** Gruppenwirkung definiert. (+8)

Lösung: Die Abbildung ist von der Form $\varphi : g \mapsto (f \mapsto (i \mapsto f(g(i))))$. Man rechnet nach, dass dies kein Gruppenhomomorphismus ist, da typischerweise $\varphi(gg') \neq \varphi(g) \circ \varphi(g')$.

(b) Korrigieren Sie den Fehler aus der Übung: Definieren Sie also eine Gruppenwirkung $G \to \mathrm{Aut}(X)$ für welche die Berechnungen der Mächtigkeiten der Fixpunktmengen richtig bleiben. (+8)

Lösung: Die Festlegung $g \cdot f := (i \mapsto f(g^{-1}(i)))$ leistet das Gewünschte.