



Aufgabe 1 (1,5 + 1,5 = 3 Punkte)

Zeige, dass folgende Mengen abzählbar (unendlich) sind, d.h. $|M| = |\mathbb{N}|$:

- a) $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$.
- b) $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir betrachten die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \quad (= [0, 1] \subseteq \mathbb{R})$$

und

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\} \quad (= [0, 10] \subseteq \mathbb{R}).$$

Haben A und B gleiche Mächtigkeit? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3 (1 + 1,5 + 1,5 + 2 = 6 Punkte)

Gib an, ob folgende Mengen endlich, abzählbar oder überabzählbar sind und begründe deine Antwort.

- a) $\{1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$
- b) $\{\{1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- c) $\{\sqrt{2}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$
- d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Menge der irrationalen Zahlen)

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Zeige folgende Aussagen:

- a) Wenn A und B abzählbare Mengen sind, dann ist auch $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ abzählbar.
- b) Wenn A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist, dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar.

Hinweis: Denk an die Abzählbarkeit von \mathbb{Q} .



Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Hilberts Hotel hat (abzählbar) unendlich viele Zimmer, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Zimmer mit der Nummer n . Diese sind zunächst alle leer. Es kommt ein Bus mit (abzählbar) unendlich vielen Touristen an. Diese kann Hilbert problemlos in seinem Hotel unterbringen. Er gibt einfach dem n -ten Tourist das Zimmer mit der Nummer n . Dies entspricht einer bijektiven Abbildung zwischen der Menge der Touristen und der Menge der Zimmer. Wir gehen davon aus, dass diese Gäste während unserer Betrachtung nicht abreisen. Wie kann Hilbert in folgenden Situationen die ankommenden Touristen in seinem Hotel unterbringen?

- Es kommt ein weiterer Tourist an.
- Es kommt ein Bus mit (abzählbar) unendlich vielen Touristen an.
- Es kommen (abzählbar) unendlich viele Busse mit jeweils (abzählbar) unendlich vielen Touristen an.

Hinweis: Überlege welche Zimmer die neuen Gäste bekommen sollen und in welche Zimmer Hilbert die alten Gäste dafür verlegen muss?

Bonusaufgabe (2 Punkte)

Hier ist eine Geschichte zur Veranschaulichung von Abzählbarkeit:

Der Teufel steckt eine beliebige Anzahl Zettel, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind, in einen Umschlag. Er sagt nicht, wieviele solcher Zettel er ausgesucht hat. Man darf nun jeden Tag einmal raten, was im Umschlag steckt. (Ein solcher Versuch könnte z.B. so aussehen: „Im Umschlag sind 6 Zettel mit den Zahlen 1, 10, 23, 976, 1000, 1000.“ Die Reihenfolge, in der man die Zahlen dabei aufzählt, ist egal.) Wenn man erraten hat, was in dem Umschlag steckt, darf man die Hölle verlassen.

Gibt es eine Ratestrategie, mit der man auf jeden Fall und nach endlicher Zeit die Hölle verlassen kann? Falls Ja: Gib eine solche an.

