Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 2013 – Blatt 12

Abgabetermin: Mittwoch, 22.1.2014 um 16:15 Uhr vor Beginn der Übungen

---

1. Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen.

   (a)
   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$
   (3 P)

   (b)
   $$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ -6 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$
   (3 P)

   (c)
   $$C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$
   (3 P)

2. Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $p \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion, also $p \circ p = p$ sowie $f \in \operatorname{End}(V)$ selbstinvers, also $f \circ f = \mathrm{id}$.

   (a) Zeigen Sie, dass p diagonalisierbar ist. (2 P)

   (b) Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Bi} p$ gilt, ohne die Rangformel zu benutzen. (1 P)

   (c) Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist, wenn $2 \neq 0$ in K gilt. (2 P)

   (d) Finden Sie ein Beispiel für ein f mit $f \circ f = \mathrm{id}$, das nicht diagonalisierbar ist. (2* P)

3. Es sei
   $$A := \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}) \quad .$$
   Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A über $\mathbb{C}$. (6 P)

   Hinweis: Verwenden Sie, dass aus für eine reelle Matrix A stets aus
   $$A \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ x_3 + iy_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + iz_1 \\ w_2 + iz_2 \\ w_3 + iz_3 \end{pmatrix}$$
   direkt
   $$A \begin{pmatrix} x_1 - iy_1 \\ x_2 - iy_2 \\ x_3 - iy_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - iz_1 \\ w_2 - iz_2 \\ w_3 - iz_3 \end{pmatrix}$$
   folgt und verwenden Sie Ihr theoretisches Wissen, um unnötige Rechnungen mit komplexen Zahlen zu vermeiden.