ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 11

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 19.1.2015 im Briefkasten vor H3.

»I did not, however, commit suicide, because I wished to know more of mathematics.«
— *Bertrand Russel*

Aufgabe 1 (*Diagonalisierbarkeit*) (3+3+3)
In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}),\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),\quad C = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C}).$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, B und C.

(b) Bestimmen Sie zu den in Aufgabenteil (a) berechneten Eigenwerten jeweils eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(c) Entscheiden Sie, ob A und B reell diagonalisierbar sind und ob C komplex diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 (*Projektionen*) (2+1+2+2)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $p : V \to V$ eine Projektion, d.h. eine lineare Abbildung mit $p^2 = p$.

(a) Zeigen Sie $V = \operatorname{Bild} p \oplus \operatorname{Kern} p$.

(b) Zeigen Sie, dass p nur die Eigenwerte 0 und 1 haben kann.

(c) Zeigen Sie $E(p, 0) = \operatorname{Kern} p$ und $E(p, 1) = \operatorname{Bild} p$.

(d) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix von p folgende Gestalt hat:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei r die Dimension von $\operatorname{Bild} p$ ist.

Aufgabe 3 (*Aussagen über Eigenwerte*) (2+2+2+2)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, so ist λ^n ein Eigenwert von F^n.

(b) Ist F nilpotent, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F^n = 0$, so kann F nur den Eigenwert 0 haben.

(c) Ist F ein Isomorphismus, so ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von F, wenn λ^{-1} ein Eigenwert von F^{-1} ist.

(d) Besitzt F die Eigenschaft $F^2 = \mathrm{Id}$, so kann F nur die Eigenwerte -1 und 1 haben.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (*Zeige oder Widerlege*) (2+2+2)

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so gelten die folgenden Formeln:

$$\operatorname{Spur} F = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad \det F = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

(b) Ist $A \in M_{n,n}(K)$ eine Matrix, so besitzen A und A^t die selben Eigenwerte.

(c) Die beiden folgenden Matrizen A und B sind ähnlich:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Σ 30)