Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser
D. Neuhäuser

Wintersemester 2010
13. Dezember 2010

Zufällige Mengen und Integralgeometrie – Übungsblatt 6

Diskussion der Lösungen am 20. Dezember 2010

Dieses Übungsblatt und alle Infos zur Vorlesung gibt es unter
http://www.uni-ulm.de/index.php?id=27033.

Aufgabe 1
Die Konstanten in der Crofton-Formel können am einfachsten berechnet werden indem man für den konvexen Körper K die Einheitskugel wählt.

a) Zeige, dass die inneren Volumina der d-dimensionalen Einheitskugel gegeben sind durch

$$V_j\left(B_1^d(o)\right) = \binom{d}{j}\frac{\kappa_d}{\kappa_{d-j}}, \qquad j = 0, \dots, d.$$

b) Zeige, dass (für einen beliebigen konvexen Körper K) gilt

$$\int_{\mathcal{E}_k^d} V_j\left(K \cap L\right) d\lambda_k^d\left(L\right) = \int_{\mathcal{L}_k^d} \int_{\mathcal{L}_{k-j}^L} \int_{M^\perp} \mathbb{1}\left(v \in K|M^\perp\right) dv d\nu_{k-j}^k\left(M\right) d\nu_k^d\left(L\right).$$

Dabei bezeichne λ_k^d das bewegungsinvariante Maß auf $\mathcal{E}_k^d$ und ν_k^d das rotationsinvariante Maß auf $\mathcal{L}_k^d$ und $K|M^\perp$ sei die orthogonale Projektion von K auf $M^\perp$.
Hinweis: Hadwigers Formel besagt, dass für $0 \le k \le d$ und einen konvexen Körper K gilt

$$V_{d-k}\left(K\right) = \int_{\mathcal{E}_k^d} V_0\left(K \cap L\right) d\lambda_k^d\left(L\right).$$

c) Setze in Teil b) $K = B_1^d(o)$ und zeige, dass für das innere Integral gilt

$$\int_{M^\perp} \mathbb{1}\left(v \in B_1^d\left(o\right)|M^\perp\right) dv = \kappa_{d-k+j}.$$

d) Benutze

$$\nu_{k-j}^k\left(\mathcal{L}_{k-j}^k\right) = c_{j,k-j}^k$$

um die Konstanten in der Crofton-Formel herzuleiten.

Aufgabe 2

a) Ein Ingenieur wird vor die Aufgabe gestellt, die Fläche eines planaren Metallstücks zu bestimmen. Da er dies nicht direkt messen kann, kommt er auf die Idee, ein Gitter über das Metallstück zu legen und die Anzahl der Gitterpunkte zu zählen, die in dem Metallstück liegen. Formuliere diese Problemstellung mathematisch und bestimme einen Schätzer für die Fläche. Welche Voraussetzungen müssen das Metallstück und das Gitter erfüllen?

b) Nun soll der Ingenieur auch noch das Volumen eines dreidimensionalen Metallklumpens bestimmen. Dazu bohrt er kreuz und quer dünne Löcher durch das Metall und misst die Länge der entstehenden „Tunnel". (Falls der Klumpen Hohlräume hat, kann eine Bohrung zu mehreren Tunneln führen.) Formuliere diese Problemstellung mathematisch und bestimme einen Schätzer für das Volumen. Welche Voraussetzungen müssen der Metallklumpen und das Bohrverfahren erfüllen? Genügt es auch, statt der Länge der Tunnel nur deren Anzahl zu bestimmen?