Gegenbeispiele der Wahrscheinlichkeitstheorie

Burim Ramosaj

05. November 2012

Verteilungsfunktion eindimensional

Definition

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $\lim_{u \downarrow x} F(u) = F(x), x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

X ZV: $\quad F_X := \mathbb{P}(X \leq x)$

Verteilungsfunktion mehrdimensional

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ Zufallsvektor
$\Rightarrow G_X := G(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$

i.) $G(x_1, \ldots, x_n)$ nicht fallend für jedes $x_i \quad i \in \{1, \ldots, n\}$

ii.) $G(x_1, \ldots, x_n)$ rechtsseitig stetig $\forall x_i$

iii.) $G(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ für mindestens ein $x_i \to -\infty$
$G(x_1, \ldots, x_n) \to 1, x_j \to \infty, \quad \forall j = 1, \ldots, n$

iv.) $a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n, \quad \Delta_{a_i b_i} G(x_1, \ldots, x_n)$
$= \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, \ldots, x_n) - G(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, \ldots, x_n) \geq 0$

$$\Rightarrow \Delta_{a_1 b_1} \Delta_{a_2 b_2} \cdots \Delta_{a_n b_n} G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

Definitionsvergleich!

$$\boxed{n = 1: \quad \text{i.)} \Rightarrow \text{iv.) ABER } n \geq 2: \quad \text{i.)} \not\Rightarrow \text{iv.)}}$$

$$\text{F(x,y)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq 0 \text{ oder } x + y \leq 1 \text{ oder } y \leq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. – 3. gilt! 4. aber NICHT

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \Rightarrow P((X, Y) \in Q) \geq 0.$$

$$Q = [\tfrac{1}{3}, 1] \times [\tfrac{1}{3}, 1]$$

$$P((X, Y) \in Q) = F(1, 1) - F(1, \tfrac{1}{3}) - F(\tfrac{1}{3}, 1) + F(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \quad = \quad -1$$

Motivation:

- X ZV in $\mathbb{R}$ und $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, messbar, $g_1 \neq g_2$
  $\Rightarrow g_1(X), g_2(X)$ ZV $g_1(X) \overset{d}{\neq} g_2(X)$[1]
- X, Y ZV, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar $X \overset{d}{\neq} Y \quad \Rightarrow g(X) \overset{d}{\neq} g(Y)$
- $X \overset{d}{\neq} Y, \quad g_1 \neq g_2 \Rightarrow$?

[1] $M := \{x \mid g_1(x) \neq g_2(x)\}, \quad \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in M\}) > 0$

$$\exists X \overset{d}{\neq} Y, g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1(X) \overset{d}{=} g_2(Y)$$

$$X \sim N(0, \tfrac{1}{2}), \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$Y \sim \Gamma(1, a), \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad f_Y(x) = \tfrac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)} \mathbf{I}_{x \geq 0}$$

$$g_1(x) = |x|^{\rho}, \quad g_2(x) = |x|^{\beta}, \quad \rho, \beta > 0$$

Definition

$$W = g_1(X), \quad Z = g_2(Y)$$

Beispiel:

X, Y Zufallsvarible auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Definition

X, Y äquivalent: $P(\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0$

äquivalent $\Rightarrow$ identisch verteilt!

Gilt die Gegenrichtung ?

X absolut stetig und symmetrisch d.h. $X \stackrel{d}{=} -X$.
$Y := -X, \quad \Rightarrow F_X = F_Y$.

$$P(\omega : X(\omega) = Y(\omega)) \quad = \quad P(\omega : X(\omega) = -X(\omega))$$
$$= P(\omega : X(\omega) = 0) \quad \stackrel{\text{abs. Stetigkeit}}{=} \quad 0$$

Beispiel Metrik

Definition

Kolmogorow Abstand: $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$

Metrik auf dem Raum der Vert.fkt?

Metrik auf dem Raum der Zufallsvariablen ?

Beispiel Metrik

$$r(X,Y) = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)| = D$$

Metrik bzgl. dem Raum der Verteilungsfunktionen!

$$\begin{array}{rl} \text{i.)} & r(X,Y) \geq 0, \quad r(X,Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_X = F_Y \\ \text{ii.)} & r(X,Y) \quad = \quad r(Y,X) \\ \text{iii.)} & r(X,Y) \quad \leq \quad r(X,Z) + r(Z,Y) \end{array}$$

NICHT bzgl. der Zufallsvariablen! Betrachte Bedingung i.)

$$r(X,Y) = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)| = 0 \overset{\text{Beispiel davor}}{\not\Rightarrow} X, Y \text{ äquivalent}$$

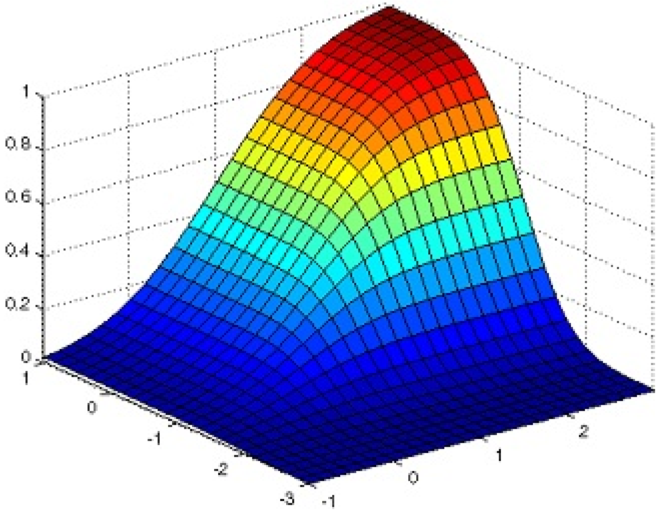

Figure : 2-dimensionale Vert.fkt. Normalverteilung

Sind marginale Verteilungsfunktionen auch stetig ?

Beispiel 2-dimensional

$n = 2 \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1, f_2$ die marginalen Dichten

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |x| \exp(-|x| - \tfrac{1}{2} x^2 y^2)$$

$$f_1(x)^1 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{1}{2} \exp(-|x|), & x \neq 0 \end{cases}$$

[1] $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$

Unimodale Verteilungsfunktion:

Definition

$\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \mathcal{P}$ unimodal, $\exists! k_0 \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{p}_k = \begin{cases} \text{nicht-fallend,} & \text{für } k \leq k_0 \\ \text{nicht-steigend,} & \text{für } k \geq k_0 \end{cases}$$

Verknüpfung unimodaler diskreter Verteilungen

Sind Verknüpfung unimodaler VF auch unimodal ?

Beispiel:

X, Y unabhängige ZV:

- $X(\omega) \in \{0, 1, \ldots, m\}$
- $Y(\omega) \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$p_i = P(X = i), \qquad q_j = P(Y = j)$

$$p_0 = \frac{m+2}{2m+2}, \quad p_1 = \cdots = p_m = \frac{1}{2m+2}; \qquad q_0 = \frac{n+2}{2n+2}, \quad q_1 = \cdots = q_n = \frac{1}{2n+2}$$

$\mathcal{P}_X = \{p_i : i = 0, 1, \ldots, m\}$,
$\mathcal{P}_Y = \{q_j : j = 0, 1, \ldots, n\}$ unimodal

$$Z := X + Y, \quad \mathcal{P}_Z = \{r_k : k = 0, 1, \ldots, n + m\}$$

$$r_0 = p_0 q_0 = \tfrac{(m+2)(n+2)}{(2n+2)(2m+2)}, \quad r_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0 = \tfrac{m+n+4}{(2n+2)(2m+2)}$$
$$r_2 = p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0 = \tfrac{m+n+5}{(2n+2)(2m+2)}$$

$\Rightarrow r_0 > r_1$ und $r_1 < r_2$

Definition

- $X \geq 0$ f.s. , $P(X = \infty) > 0 \Rightarrow \quad \mathbb{E}X = \infty$
- $X \geq 0$ f.s. , $P(X = \infty) = 0$
  $$\Rightarrow \quad \mathbb{E}X = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} P(\frac{k}{2^n} < X \leq \frac{k+1}{2^n})$$
- Xabs. stetig: $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Xdiskret: $\mathbb{E}X = \sum_{x \in C} xP(X = x)$,

Beispiel symmetrische Verteilung

symmetrische Verteilung $\Rightarrow$ ungerade Momente verschwinden!

F symmetrische Vert. und Dichte $f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

$$\alpha_{2n+1} = \mathbb{E}X^{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} f(x) dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots$$

Folgt die Symmetrie aus dem Verschwinden der ungeraden Momente ?

Gegenbeispiel

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{48} \exp(-|x|^{\frac{1}{4}}(1 + \sin(|x|^{\frac{1}{4}}))), & x < 0 \\ \frac{1}{48} \exp(-x^{\frac{1}{4}}(1 - \sin(x^{\frac{1}{4}}))), & x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\alpha_{2n+1} = 0, \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{6}(8n+1)! \quad \Rightarrow G(x) \text{ nicht sym.}$$

Motivation

X, Y ZV mit stetigen Verteilungen. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y = y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X \in B, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Definition

$\mathcal{D}$ Teil-σAlgebra von $\mathcal{F}$.

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ die bedingte Erwartung (bzgl. σ-Algebra)
- X integrierbar $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X|\mathcal{D})$ ist ZV

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{D})dP = \int_A XdP, \quad A \in \mathcal{D}$$

Beispiel Eigenschaft

X, Z unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X|Z] = \mathbb{E}X$

Gilt das auch für 3 Zufallsvariablen ?

Beispiel:

$\Omega = [0,1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, \quad P$ das Lebesgue-Maß. Definiere:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0, & \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \frac{3}{4}) \\ 0, & \omega \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 0, & \omega \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \omega \in [0, \frac{3}{4}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] = \begin{cases} 0, & \omega \in [\frac{3}{4}, 1] \\ \frac{1}{2}, & \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 1, & \omega \in [0, \frac{1}{4}) \end{cases}$$

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT