ulm university universität
uulm

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Freitag, 4. Mai 2012, vor den Übungen

1. Die Zahl 101 ist Teiler der sechs Zahlen 124634, 163216, 322594, 349157, 472579 und 769216. Zeige, dass 101 auch Teiler von
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
ist. (3 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $SL(n, \mathbb{Z})$ die Menge aller Matrizen des $\mathbb{R}^{(n,n)}$ mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1. Zeige: $SL(n, \mathbb{Z})$ bildet eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation. (3 Punkte)

3. Es sei $V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \colon a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2 und $b(p, q) \colon V \times V \to \mathbb{R}$ durch $b(p, q) := \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$ definiert. Weiter sei die Basis $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ gegeben.
   (a) Zeige: (V, b) ist ein Euklidischer Vektorraum.
   (b) Bestimme die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ von b. (5 Punkte)

4. Es sei K ein Körper. Die Bilinearform $b \colon K^n \to K^n$ sei durch $b(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^T \mathcal{A} \vec{y}$ mit $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$ definiert. Weiter sei $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\vec{y} \in K^n \colon b(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \ \forall \vec{x} \in K^n\}$.
Drücke $\dim(\mathcal{N})$ durch $\mathrm{rg}(\mathcal{A})$ aus. Das Ergebnis ist zu begründen. (3 Punkte)

5. Es sei
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
und $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathcal{A} \vec{x}$. Schreibe Q in der Form $Q(\vec{x}) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, wobei die Konstanten $a \ldots, f$ explizit zu bestimmen sind. (3 Punkte)

6. Es sei K ein Körper.
   (a) Zeige: die Abbildung $\det \colon K^2 \times K^2 \to K$, $(\vec{x}, \vec{y}) \to \det(\vec{x}, \vec{y})$, wobei die Matrix $(\vec{x}, \vec{y})$ aus den Spaltenvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ besteht, ist eine Bilinearform auf K^2.
   (b) Wann ist det symmetrisch?
   (c) Bestimme $\mathcal{A} \in K^{(2,2)}$, so dass $\det(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathcal{A} \vec{y}$ gilt.
   (d) Bestimme die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\det)$ der Bilinearform det. (7 Punkte)