Lösungsvorschlag – 2 Übungsblatt
Diskrete Strukturen (WiSe 2015/16)

Bauhaus-Universität Weimar, Professur für Mediensicherheit
Prof. Dr. Stefan Lucks, Jakob Wenzel
URL: `http://www.uni-weimar.de/de/medien/professuren/mediensicherheit/teaching/`

Abgabe: Bis zum 17.11.2015, 13:30 Uhr zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 – Abzählbarkeit (5 Punkte).
Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind. Insofern die Mengen abzählbar sind, geben Sie die dazugehörige Permutation an.

Definition 8 (Abzählbarkeit). *Jede endliche Menge ist abzählbar. Eine unendliche Menge ist abzählbar, wenn eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ existiert.*

a) Die Menge aller geraden Zahlen

Lösung:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der geraden Zahlen. Dann existiert eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 0 \\ |m| + 1 & \text{falls } m < 0, \quad \forall m \in \mathcal{M} \\ m & \text{falls } m > 0 \end{cases}$$

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der geraden **natürlichen** Zahlen. Dann existiert eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \frac{m}{2}, \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

b) Die Menge aller ungeraden Zahlen

Lösung:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der ungeraden Zahlen. Dann existiert eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \begin{cases} |m| + 1 & \text{falls } m < 0 \\ m & \text{falls } m > 0, \quad \forall m \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der ungeraden **natürlichen** Zahlen. Dann existiert eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \frac{m+1}{2}, \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Lösung:

Satz 10 (Abzählbarkeit). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Aus Satz 10 folgt: Es existiert eine Permutation $\pi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Somit müssen wir nur noch $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ betrachten, was wiederum nach Satz 10 gilt. Es folgt: Es existiert eine Permutation $\pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

d) Die Menge aller Zahlen, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind

Lösung:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Zahlen, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind. Dann existiert eine Permutation $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \begin{cases} 1 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 1 \\ 2 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 2 \\ 3 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 4 \\ 4 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 7 \\ 5 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 8 \\ 6 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 11 \\ 7 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 13 \\ 8 + (u \div 15) \cdot 8 & \text{if } u \bmod 15 = 14 \end{cases}, \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

e) Die Menge aller Teilmengen aller geraden Zahlen

Lösung:

Satz 17 (Überabzählbarkeit). *Die Menge* $\mathbb{R}$ *und die Menge aller Teilmengen von* $\mathbb{N}$ *sind beide über-abzählbar.*