Wurzelortskurven-Verfahren (Fortsetzung)

Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines geschlossenen Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen Kreises.

- **Beispiel: Nickdämpfung eines Flugzeuges**
- **Typische WOK Beispiele**
- **Beschränkungen** der Reglerverstärkung durch Nullstellen in der rechten s-Halbebene und/oder einen Differenzgrad n-m > 2

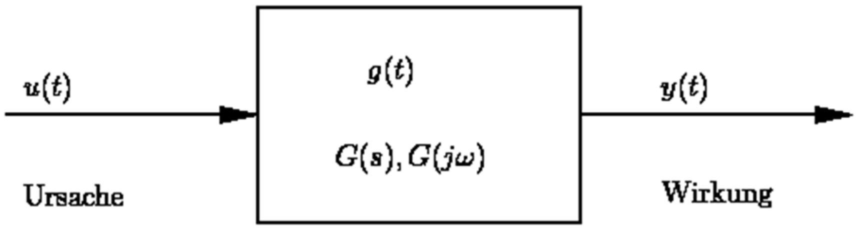
Zustandsraum: Historische Einordnung

- Die Grundlagen der Zustandsraummethoden wurden im Zeitraum 1955 – 1965 von Kalman und seinen Kollegen in dem Research Institute for Advanced Studies in Baltimore entwickelt.
- Diese Forschungen waren sehr stark durch das Wett-rennen zum Mond motiviert worden.
- Kalman führte Ende der 1950er Jahre das Konzept der Steuer- und Beobachtbarkeit ein.
- Ohne die Entwicklung des sogenannten Kalman-Filters (Algorithmus zur optimalen Schätzung von Zustands-größen anhand verrauschter Meßdaten) wären die amerikanischen Raumfahrterfolge in den 60er Jahre nicht möglich gewesen.
- Bis in die 1980er Jahre hinein wurde die Forschung und Entwicklung in der Regelungstechnik durch die Zeitbereichsmethoden im Zustandsraum bestimmt.

Beschreibung dynamischer Systeme

Übertragungsmodell

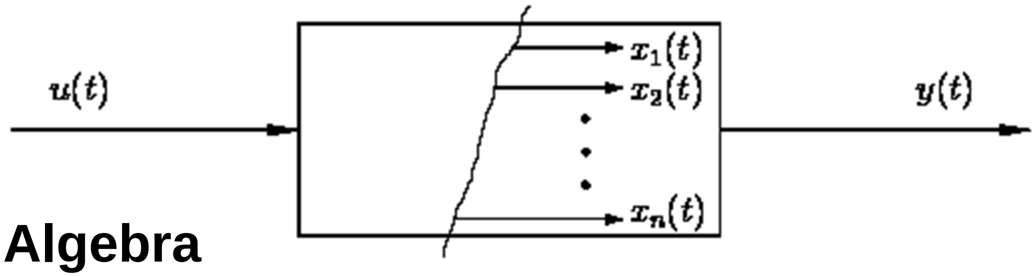
- Dgln höherer Ordnungen
- Übertragungsfunktion



- Funktionentheorie, komplexe Zahlen

Zustandsraummodell

- Dgln erster Ordnung
- Transitionsmatrix
- Matrizenrechnung, lineare Algebra



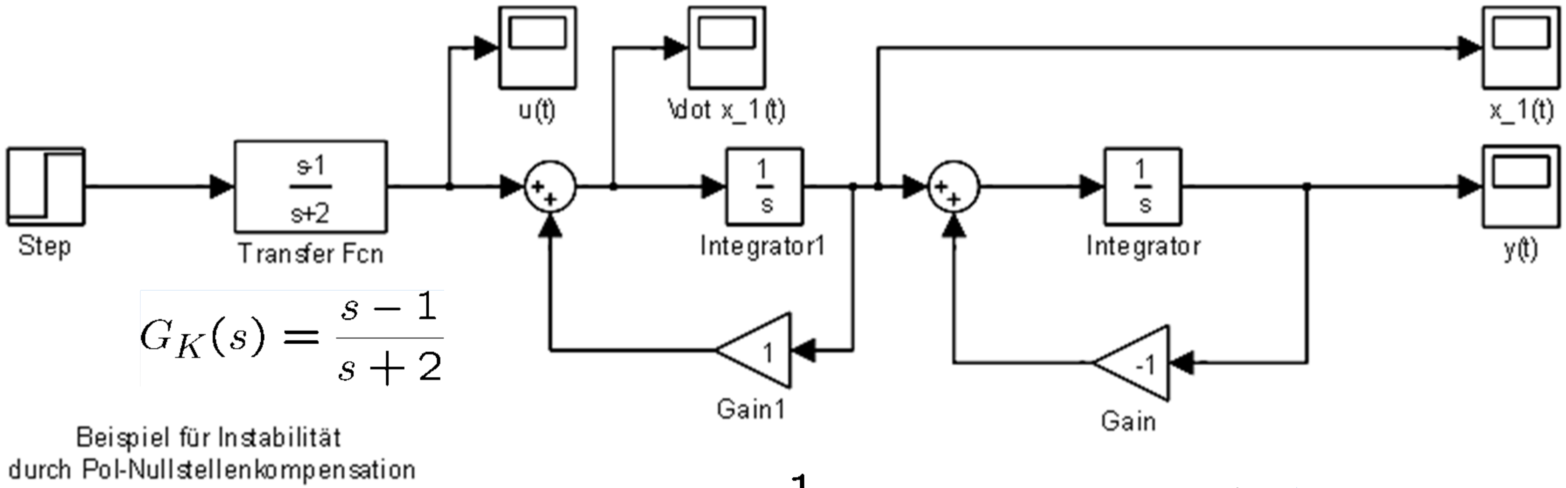
Einführung innerer Größen

Zustandsraum: Einführung (2)

- **Ein– und Mehrgrößensysteme (Systeme mit mehr als einer Ein– bzw. Ausgangsgröße bezeichnet man als Mehr-größensysteme) können formal gleich behandelt werden.**
- **Diese Beschreibungsform ist auch für nichtlineare und zeitvariante Systeme geeignet.**
- **Die Zustandsraumdarstellung ist sowohl für die theoretische Behandlung (analytische Lösungen, Optimierung) als auch für die numerische Analyse und Berechnung gut geeignet.**
- **Diese Darstellung erlaubt einen besseren Einblick in das innere Verhalten eines Systems. Hier spielen insbesondere Systemeigenschaften wie die Steuer– und Beobachtbarkeit des Systems eine besondere Rolle.**

Zustandsraum: Einführung (3)

Beispiel, daß eine Stabilisierung durch eine Pol-Nullstellen-kompensation in der rechten s-Halbebene nicht möglich ist !!!!!!



$$G_K(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_K(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s+2} \cdot \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

Zustandsraumbeschreibung

Zustand eines dynamischen Systems

Physikalisch betrachtet ist der Zustand eines dynamischen Systems durch den Energiegehalt der im System vorhandenen Energiespeicher bestimmt.

Zustandsgrößen

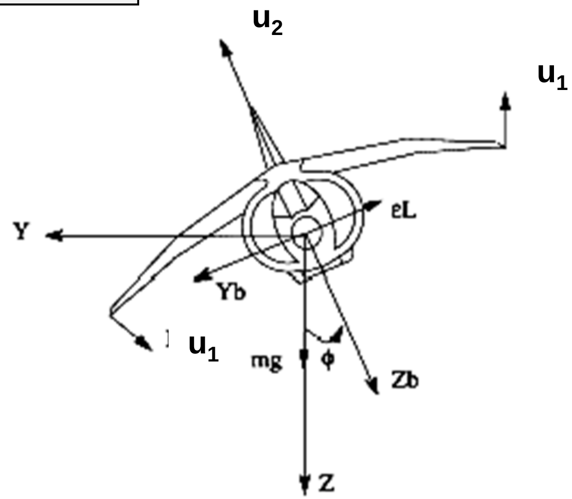
Die Zustandsgrößen beschreiben den Energiegehalt der im System enthaltenen Speicherelemente.

Beispiel: Feder-Masse-System

Feder: Speicher für potentielle Energie

Masse: Speicher für kinetische Energie

Planar Vertical TakeOff and Landing Aircraft



Zustandsgrößen:

- dy/dt : laterale Geschwindigkeit
- z : vertikale Position
- dz/dt : vertikale Geschwindigkeit
- $d\Phi/dt$: Geschwindigkeit um die Rollachse

Eingangsgrößen:

- u_1 : Schub der Rolldüsen
- u_2 : Schub der Nickdüsen

Ausgangsgrößen:

- y : laterale Position
- z : vertikale Position

Zustandsraumbeschreibung (2)

Anzahl der Zustandsgrößen (Systemordnung)

Der Zustand eines Systems mit *n* Energiespeichern wird dann durch *n* Zustandsgrößen $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ beschrieben, die zu einem Zustandsvektor $x(t)$ zusammengefasst werden:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Zustandsgleichung

Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$$

Ausgangsgleichung

Algebraische Gleichung

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

Zustandsraummodell eines Eingrößensystems

(n x n) - **Systemmatrix**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(n x 1) - **Eingangsvektor**

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(1 x n) - **Ausgangsvektor**

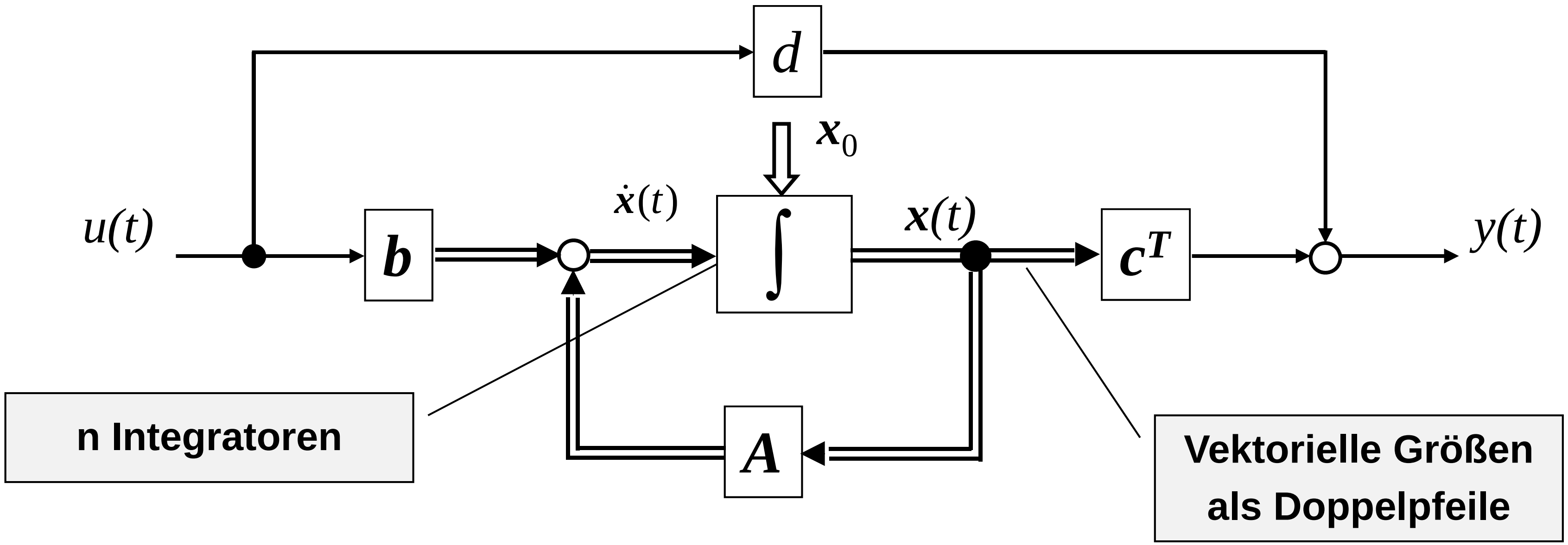
$$\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Zustandsraumbeschreibung (4)

Blockschaltbild des Zustandsraummodells eines Eingrößensystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$



Wenn der Anfangszustand x_0 bekannt ist, kann der System-zustand $x(t)$ mit Hilfe des Zustandsmodells für alle Zeit-punkte $t > t_0$ einfach berechnet werden.

Zustandsraumbeschreibung (5)

Darstellung eines Zustandsraummodells als Signalflußdiagramm

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \; + \; b_1u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \; + \; b_2u(t)$$
$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \; + \; du(t)$$

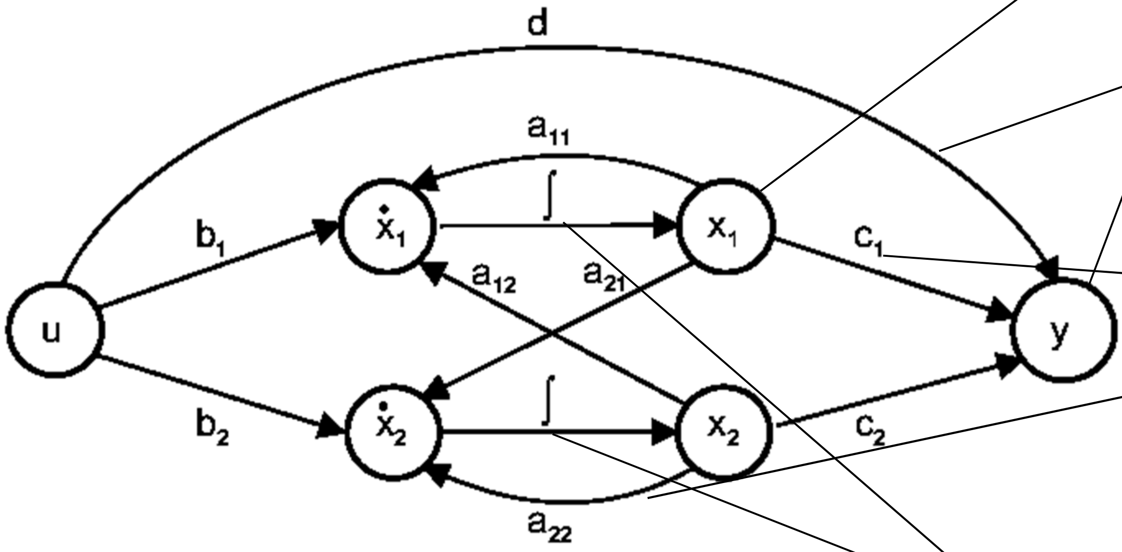


Bild 4.5: Signalflußdiagramm eines Systems zweiter Ordn

Signale werden als Knoten dargestellt

Kanten geben die Signalverknüpfungen an

Elemente der Matrix **A** bzw. der Vektoren **b** und **c** treten als Kanten-gewichte auf

Integration

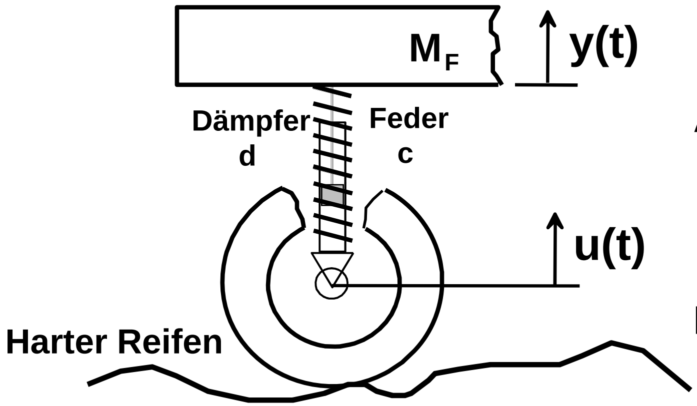
Signalflußdiagramme erlauben einen detaillierten Einblick in die Struktur eines dynamischen Systems

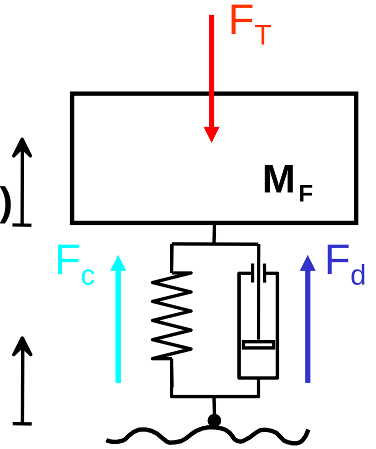
Aufstellen von Zustandsraummodellen

a) durch Aufstellen des physikalisch–technischen Wirkungszusammenhanges, wenn dieser durch Differentialgleichungen 1. Ordnung und/oder algebraische Beziehungen beschrieben wird, **(SRT – Beispiel: Pneumatischer Speicher 2. Ordnung)**

b) durch Umwandlung einer Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Beispiel: Viertelfahrzeug





Vereinfachtes Modell

Kräftegleichgewicht: $F_T = F_c + F_d$

Federkraft: $F_c = c\left(u(t) - y(t)\right)$

Dämpfungskraft: $F_d = d\left(\dot{u}(t) - \dot{y}(t)\right)$

Trägheitskraft: $F_T = M_F \cdot \ddot{y}(t)$

Beispiel: Viertelfahrzeug (2)

Aus Kräftegleichgewicht erhält man:

$$M_F \cdot \ddot{y}(t) = c[u(t) - y(t)] + d[\dot{u}(t) - \dot{y}(t)]$$

$\Rightarrow$

$$M_F \cdot \ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + cy(t) = cu(t) + d\dot{u}(t) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{M_F}$$

Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t) + \frac{d}{M_F}\dot{y}(t) + \frac{c}{M_F}y(t) = \frac{c}{M_F}u(t) + \frac{d}{M_F}\dot{u}(t)$$

Für die Aufstellung eines Zustandsraummodells betrachten wir zunächst

$$\ddot{y}(t) + \frac{d}{M_F}\dot{y}(t) + \frac{c}{M_F}y(t) = u(t) \quad \textbf{für} \quad \ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$$

Beispiel: Viertelfahrzeug (3)

Als Zustandsgrößen werden ausgewählt:

$$x_1(t) = y(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \qquad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{d}{M_F}\underbrace{\dot{y}(t)}_{x_2(t)} - \frac{c}{M_F}\underbrace{y(t)}_{x_1(t)} + u(t)$$

In Matrizenschreibweise ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{M_F} & -\frac{d}{M_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Zustandsraummodell

Beispiel: Viertelfahrzeug (4)

Die Lösung für eine Anregung

$$\tilde{u}(t) = \dot{u}(t)$$

erhält man aus folgender Tatsache:

Eine lineare DGL liefert y(t) **für die Anregung** u(t) **und** dy/dt **für die Anregung** du/dt.

$$\ddot{y}(t) + \frac{d}{M_F}\dot{y}(t) + \frac{c}{M_F}y(t) = u(t) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\dddot{y}(t) + \frac{d}{M_F}\ddot{y}(t) + \frac{c}{M_F}\dot{y}(t) = \dot{u}(t)$$

Substitution: $\tilde{y}(t) = \dot{y}(t)$, $\tilde{u}(t) = \dot{u}(t)$

$$\ddot{\tilde{y}}(t) + \frac{d}{M_F}\dot{\tilde{y}}(t) + \frac{c}{M_F}\tilde{y}(t) = \tilde{u}(t)$$

Lösung der Dgl : $\tilde{y}(t) = \dot{y}(t)$ **für**

Beispiel: Viertelfahrzeug (5)

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips und der Ausgangsgleichung für die Anregung $u(t)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t)$$

erhält man für die Anregung

$$\frac{c}{M_F} u(t) + \frac{d}{M_F} \dot{u}(t)$$

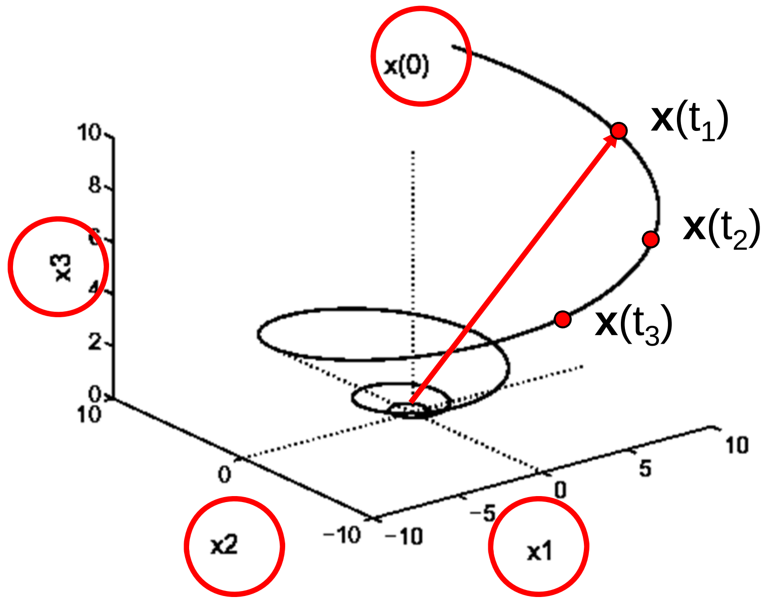
die Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{c}{M_F} & \dfrac{d}{M_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t)$$

Zustandstrajektorie

Die zeitliche Abhängigkeit des n–dimensionalen Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ kann man als Bewegung eines Punktes im n–dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (Zustandsraum) darstellen



Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum

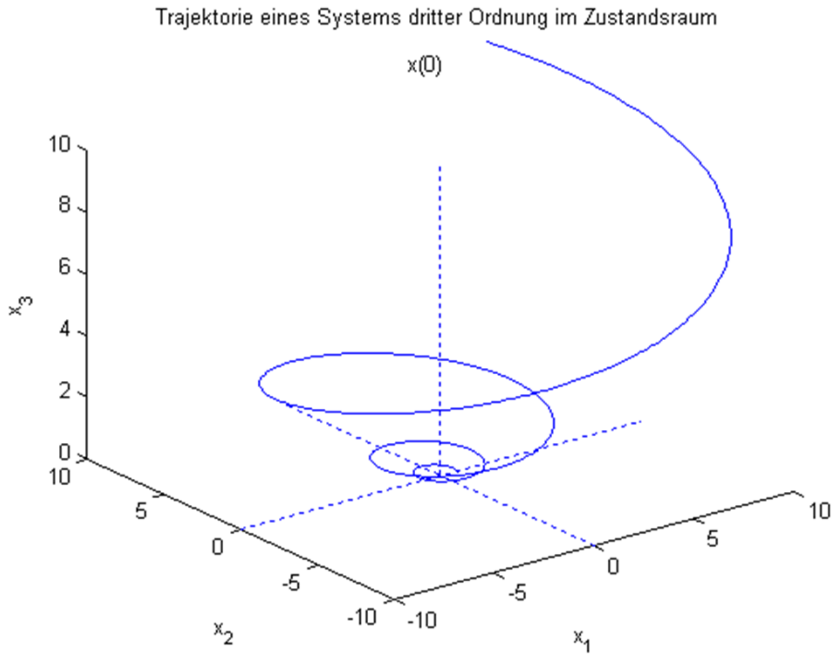
Der durch die Koordinaten von x(t) beschriebene Punkt verändert sich mit der Zeit und beschreibt eine Kurve im Zustandsraum, die als Zustandskurve oder Trajektorie des Systems bezeichnet wird.

Matlab-Beispiel: Zustandstrajektorie

```
%   Script ZUSTTRAJ.M
%
%   Trajektorie im dreidimensionalen Zustandsraum
%
% J. Lunze
% 9.10.1995
% für 2. Auflage: 6.11.1998
% für 3. Auflage: 3.4.2001
%
echo off
clear
close all;
A = [-0.5 0 0 ;
      0 -0.3 2;
      0 -2 -0.3];
b = [1;
     1;
     1];
c = [1 1 1];
d=0;
System=ss(A, b, c, d);
x0=[10, 10, 10];
echo on
```

Matlab-Beispiel: Zustandstrajektorie (2)

```
%
%   Eigenbewegung eines Systems dritter Ordnung
%   dreidimensionale Darstellung im Zustandsraum
%
echo off
figure(1);
T=0:0.01:10;
[Y, T, X]=initial(System, x0, T);
plot3(X(:, 2), X(:, 3), X(:, 1));
hold on
plot3([-10 10], [0 0], [0 0], ':');
plot3([0 0], [-10 10], [0 0], ':');
plot3([0 0], [0 0], [10 0], ':');
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
zlabel('x_3');
grid('off');
title('Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum');
text(6, 10, 10, 'x(0)')
axis([-10 10 -10 10 0 10]);
```



Lösung der Zustandsgleichung

Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

e^{at} ist homogene Lösung

Multiplikation mit e^{-at} liefert

$$e^{-at}\dot{x}(t) = e^{-at}ax(t) + e^{-at}bu(t)$$

$$\underbrace{e^{-at}\dot{x}(t) - e^{-at}ax(t)} = e^{-at}bu(t)$$

Produktregel der Differentiation

$$\tfrac{d}{dt}(f(t)\cdot g(t)) = f(t)\dot{g}(t) + \dot{f}(t)g(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}\cdot x(t)) = e^{-at}bu(t)$$

Lösung der Zustandsgleichung (2)

Integration von 0 bis t liefert:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-a\tau}\cdot x(\tau)\right)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad e^{-a\tau}x(\tau)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

$$e^{-at}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

Nach Multiplikation mit e^{at} ergibt sich

$$x(t) - e^{at}x_0 = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

homogene Lösung

$\Rightarrow$ **Lösung der DGL:**

$$x(t) = e^{at}x_0 + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Lösung der Zustandsgleichung (3)

Die Rolle von e^{at} übernimmt bei einer Vektor-differentialgleichung die Matrixexponentialfunktion e^{At} .

Die homogene Lösung der Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad , \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$$

ergibt sich dann zu:

$$\boldsymbol{x}_h(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 \quad ,$$

Reihenentwicklung der e-Funktion

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!} = 1 + at + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 + \ldots$$

wobei die Matrixexponentialfunktion wie folgt definiert ist:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^i t^i}{i!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}t^3 + \ldots$$

Lösung der Zustandsgleichung (4)

Lösung der Vektordifferentialgleichung:

Faltungsintegral

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Nach Einführung der Abkürzung

Transitionsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} \quad .$$

Überführt den Anfangszustand x_0 für $u(t) = 0$ in den aktuellen Zustand $x(t)$.

erhält man als Lösung

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad .$$

Bewegungsgleichung des Systems

Lösung der Zustandsgleichung (5)

Mit

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t)$$

folgt dann auch für die Systemantwort:

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c}^T \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad .$$

Für $x_0 = 0$ erhält man:

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

Gewichtsfunktion

Ein Vergleich mit dem Faltungsintegral (SRT, Gl. 2.29)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Transitionsmatrix

liefert den Zusammenhang

$$g(t-\tau) = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}$$

Eigenschaften der Transitionsmatrix

Für *t = 0* erhält man aus

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^i t^i}{i!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\cancelto{0}{t} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}\cancelto{0}{t^2} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}\cancelto{0}{t^3} + \dots$$

$$(1) \quad \boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{I}_n$$

Der Wert des Produktes der Transitionsmatrix zu zwei beliebigen Zeitpunkten t_1 und t_2 kann mit Hilfe der Beziehung

$$\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_2) = \boldsymbol{\Phi}(t_1 + t_2)$$

berechnet werden.

$$e^{\mathbf{A}t_1} \cdot e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}$$

Eigenschaften der Transitionsmatrix (2)

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t)^{-1} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}(-t)} = \boldsymbol{\Phi}(-t)}$$

Die Inverse der Transitionsmatrix kann direkt angegeben werden:

$$(3) \quad \boldsymbol{\Phi}(t)^{-1} = \boldsymbol{\Phi}(-t) \ , \qquad \boldsymbol{\Phi}(t)^k = \boldsymbol{\Phi}(kt)$$

Gliedweise Differentiation der Reihe

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^i t^i}{i!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}t^3 + \ldots$$

liefert:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{\cancel{2}\mathbf{A}^2 t}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}\mathbf{A}^3 t^2}{\cancel{3} \cdot 2!} + \ldots$$

$$(4) \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t) \ .$$