14. Polarpunktberechnung und Polygonzug

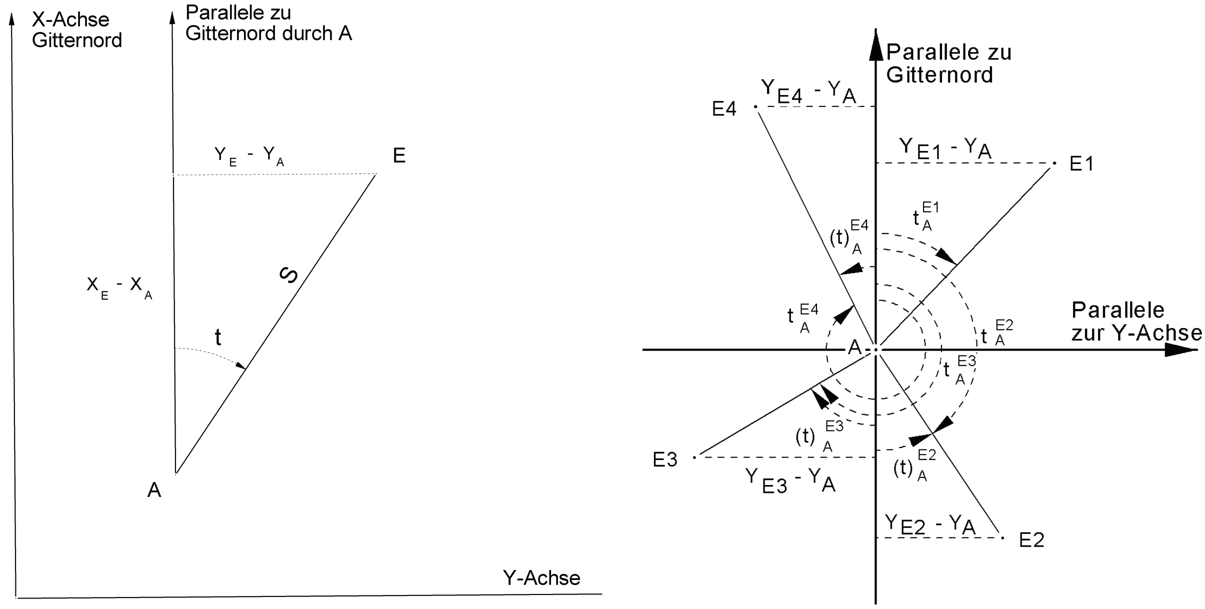
An dieser Stelle sei noch einmal auf das Vorwort zu Kapitel 13 hinsichtlich der gekürzten Koordinatenwerte hingewiesen.

14.1. Berechnungen bei der Polaraufnahme

14.1.1. Richtungswinkel und Entfernung

Richtungswinkel

Wenn die Polaraufnahme von einem bekannten Standpunkt aus durchgeführt wird, muss zur Auswertung als erstes der Richtungswinkel vom Standpunkt zum Anschlusspunkt berechnet werden.



Richtungswinkel — Richtungswinkel in den Quadranten

Abbildung 14.1.1.

Der Richtungswinkel einer Strecke ist der Winkel gegen Gitternord im Anfangspunkt der Strecke. Der Richtungswinkel wird immer rechtsläufig angegeben. Er wird mit „t“ bezeichnet. Als Index wird unten der Anfangspunkt der Strecke, oben der Endpunkt der Strecke angegeben. Beispiel:

t_{12}^{25} bedeutet: Richtungswinkel von 12 nach 25

Aus der Abbildung 14.1.1 ergibt sich: $tan\, t_A^E = \frac{Y_E - Y_A}{X_E - X_A}$

$$\boxed{t_A^E = arctan\, \frac{Y_E - Y_A}{X_E - X_A}}$$

Die Berechnung der Richtungswinkel in den vier Quadranten soll im Folgenden dargestellt werden (s. Abbildung 14.1.1 links).

Für alle Quadranten gilt die oben dargestellte Formel. Allerdings ergibt sich nur im 1. Quadranten daraus unmittelbar der gesuchte Richtungswinkel. In den übrigen Quadranten ergibt sich erst einmal ein vorläufiger Winkelwert (t), der noch um 200 gon bzw. 400 gon ergänzt werden muss.

Im 2. Quadranten gilt:

$tan\,(t)_A^{E2} = \frac{Y_{E2}-Y_A}{X_{E2}-X_A}$

Da in dieser Formel der Nenner $(X_{E2} - X_A)$ negativ ist, wird $(t)_A^{E2}$ebenfalls negativ. Der gesuchte Richtungswinkel t_A^{E2} ergibt sich dann aus:

$t_A^{E2} = 200 + (t)_A^{E2}$

Im 3. Quadranten gilt:

$tan\,(t)_A^{E3} = \frac{Y_{E3}-Y_A}{X_{E3}-X_A}$

In dieser Formel sind Zähler und Nenner negativ, so dass $(t)_A^{E3}$ positiv wird. Der gesuchte Richtungswinkel t_A^{E3} ergibt sich dann aus:

$t_A^{E3} = 200 + (t)_A^{E3}$

Im 4. Quadranten gilt:

$tan\,(t)_A^{E4} = \frac{Y_{E4}-Y_A}{X_{E4}-X_A}$

Hier wird der Zähler negativ, so dass wiederum $(t)_A^{E4}$ negativ wird. Der gesuchte Richtungswinkel t_A^{E4} ergibt sich dann aus:

$t_A^{E4} = 400 + (t)_A^{E4}$

Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenfassung:

Quadrant	Vorzeichen $\frac{Y_E-Y_A}{X_E-X_A}$	Vorzeichen des berechneten Winkels	Berechnung des endgültigen Winkels
1	$\frac{+}{+}$	$+$	
2	$\frac{+}{-}$	$-$	$t = (t) + 200$
3	$\frac{-}{-}$	$+$	$t = (t) + 200$
4	$\frac{-}{+}$	$-$	$t = (t) + 400$

Entfernung

Die Entfernung (Strecke) zwischen zwei Punkten A und E ergibt sich aus:

$$\boxed{S_{A-E} = \sqrt{(Y_E - Y_A)^2 + (X_E - X_A)^2}}$$

Bei der Übertragung von Strecken aus ETRS/UTM-Koordinaten in die Örtlichkeit ist, abhängig von der Entfernung zum Mittelmeridian, eine Streckenreduktion anzubringen (vgl. Kapitel 2.3.3).

Beispiel

Es sind Richtungswinkel und Entfernung vom Punkt 10 zu den Punkten 11 bis 14 zu berechnen. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte 10 bis 14. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse:

Nr.	Y	X	(t) [gon]	t [gon]	s [m]
10	230,30	401,10			
11	280,50	461,20		44,3012	78,30
12	252,44	351,00	- 26,4905	173,5095	54,77
13	186,36	350,50	+ 45,5226	245,5226	67,01
14	200,00	444,00	- 39,1482	360,8518	52,52

14.1.2. Polares Anhängen

Gegeben:
- Koordinaten vom Standpunkt S (Y_S, X_S)
- Koordinaten vom Anschlusspunkt A (Y_A, X_A)

Gemessen:
- Strecke s vom Standpunkt S zum Anschlusspunkt A
- Strecke s_1 vom Standpunkt S zum Neupunkt 1
- Strecke s_2 vom Standpunkt S zum Neupunkt 2
- Winkel α_1 zwischen Anschlusspunkt A und Neupunkt 1
- Winkel α_2 zwischen Anschlusspunkt A und Neupunkt 2

Gesucht:
- Koordinaten vom Neupunkt 1 (Y_1, X_1)
- Koordinaten vom Neupunkt 2 (Y_2, X_2)

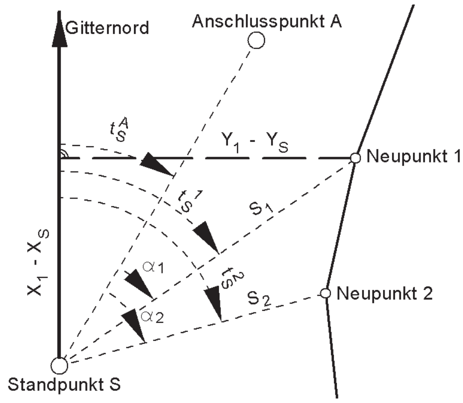


Abbildung 14.1.2.: Polares Anhängen

Die Berechnung gliedert sich in folgende Schritte:

1. Berechnung des Richtungswinkels t_S^A und der Strecke $\overline{SA}$
   $t_S^A = arctan\,\frac{Y_A - Y_S}{X_A - X_S}$ $\qquad S_{S-A} = \sqrt{(Y_A - Y_S)^2 + (X_A - X_S)^2}$
2. Berechnung eines Maßstabsfaktors m durch Vergleich der aus Koordinaten gerechneten mit der gemessenen Strecke von S nach A
   $m = \frac{S_{gerechnet}}{s_{gemessen}}$
3. Berechnung der Richtungswinkel vom Standpunkt zu den Neupunkten
   $t_S^1 = t_S^A + \alpha_1$
   $t_S^2 = t_S^A + \alpha_2$
4. Berechnung der Koordinatenunterschiede vom Standpunkt zu den Neupunkten
   ohne Maßstabsfaktor ergibt sich:
   $\triangle Y = Y_1 - Y_S = s_1 \cdot sin\,t_S^1$
   $\triangle X = X_1 - X_S = s_1 \cdot cos\,t_S^1$

   mit Maßstabsfaktor ergibt sich:
   $\triangle Y = Y_1 - Y_S = s_1 \cdot m \cdot sin\,t_S^1$
   $\triangle X = X_1 - X_S = s_1 \cdot m \cdot cos\,t_S^1$
5. Berechnung der endgültigen Koordinaten
   $Y_1 = Y_S + \triangle Y$
   $X_1 = X_S + \triangle X$

Die Berechnung für Neupunkt 2 erfolgt nach demselben Ablauf.

Für die Berechnung der Neupunkte ist es unerheblich, in welcher Richtung sie vom Standpunkt aus liegen. Die Formeln gelten für alle vier Quadranten, da sich bei der Berechnung mit der Sinus- bzw. Cosinusfunktion für die Koordinatenunterschiede automatisch die richtigen Vorzeichen ergeben.

Rechenbeispiel

Gegebene Koordinaten		
	Y	X
Standpunkt	4049,145	5020,005
Anschlusspunkt	4060,288	5038,387

Messwerte		
	Strecke	Richtung
Anschlusspunkt	21,48	0,000
Neupunkt 1	20,43	26,474
Neupunkt 2	15,59	48,390

1. Schritt

$tan\,t_S^A = \frac{4060{,}288 - 4049{,}145}{5038{,}387 - 5020{,}005} \Rightarrow t_A^S = 34,6932$

$S = \sqrt{(4060,288 - 4049,145)^2 + (5038,387 - 5020,005)^2}$

$S = 21,50\,m$

2. Schritt

$m = \frac{21{,}50}{21{,}48} \Rightarrow m = 1,00093$

3. Schritt

$t_S^1 = 34,6932 + 26,474 \Rightarrow t_S^1 = 61,1672$
$t_S^2 = 34,6932 + 48,390 \Rightarrow t_S^2 = 83,0832$

4. Schritt

$\triangle Y_1 = 20,43 \cdot 1,00093 \cdot sin\, 61,1672 \Rightarrow \triangle Y_1 = 16,761$

$\triangle X_1 = 20,43 \cdot 1,00093 \cdot cos\, 61,1672 \Rightarrow \triangle X_1 = 11,714$

$\triangle Y_2 = 15,59 \cdot 1,00093 \cdot sin\, 83,0832 \Rightarrow \triangle Y_2 = 15,507$

$\triangle X_2 = 15,59 \cdot 1,00093 \cdot cos\, 83,0832 \Rightarrow \triangle X_2 = 4,098$

5. Schritt

$Y_1 = Y_S + \triangle Y_1 \Rightarrow Y_1 = 4065,906$

$X_1 = X_S + \triangle X_1 \Rightarrow X_1 = 5031,719$

$Y_2 = Y_S + \triangle Y_2 \Rightarrow Y_2 = 4064,202$

$X_2 = X_S + \triangle X_2 \Rightarrow X_2 = 5024,103$

14.1.3. Freie Stationierung

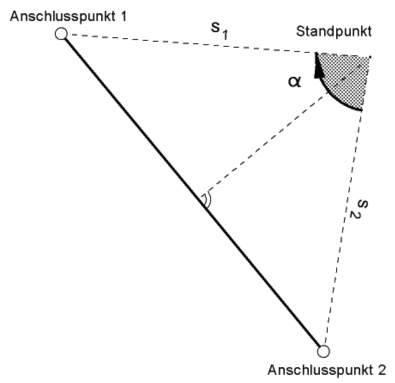


Abbildung 14.1.3.: freie Stationierung

Hier wird ein einfaches Verfahren, bei dem nur zwei Anschlusspunkte verwendet werden, vorgestellt. Liegen mehr als zwei Anschlusspunkte vor, muss die freie Stationierung über eine Transformation mit gleichzeitiger Ausgleichung berechnet werden.

Gegeben:

· Die Koordinaten der Anschlusspunkte

Gesucht:

· Die Koordinaten des Standpunktes

Gemessen:

· Richtungen zu den Anschlusspunkten 1 und 2, Differenz ergibt den Winkel α zwischen s_1 und s_2

· Strecken s_1 und s_2

Die Berechnung gliedert sich in folgende Schritte:

1. Berechnung der Strecke zwischen den Anschlusspunkten aus den Messdaten, also im örtlichen System (Kosinussatz):
   $s_{1-2} = \sqrt{{s_1}^2 + {s_2}^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot cos\, \alpha}$
2. Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt im örtlichen System:
   $p = \frac{{s_1}^2 - {s_2}^2 + {s_{1-2}}^2}{2 \cdot s_{1-2}}$ und $h = \sqrt{{s_1}^2 - p^2}$
3. Orthogonalpunktberechnung in der Linie vom Anschlusspunkt 1 zum Anschlusspunkt 2.
   Dabei wird die über den Kosinussatz gerechnete Strecke als „gemessene“ Strecke des örtlichen Systems betrachtet. Die „gerechnete“ wird ganz normal aus den Koordinaten ermittelt. Die Ordinate ist die unter 2. berechnete Höhe, das Durchlaufmaß ist das unter 2. berechnete „p“.

Beispiel:

Gegebene Koordinate		
Punkt	Y	X
Anschluss 1	915,443	1050,161
Anschluss 2	931,411	1016,290

Messwert		
Punkt	Strecke	Richtung
Anschluss 1	26,56	0,0000
Anschluss 2	29,52	307,1903

Berechnung:

1. Schritt

Winkel $\alpha = 0,0000 - 307,1903 + 400 = 92,8097$

$s_{1-2} = 37,42$

2. Schritt

$p = 16,49$ und $h = 20,82$

3. Schritt

$S_{1-2} = 37{,}45$

$o = \frac{15,968}{37,42} \Rightarrow o = 0,426724$

$a = \frac{-33,871}{37,42} \Rightarrow a = -0,905158$

$\Delta y = 0,426724 \cdot 16,49 + (-0,905158) \cdot (-20,82)$

$\Delta y = 25,882$

$\Delta x = (-0,905158) \cdot 16,49 - 0,426724 \cdot (-20,82)$

$\Delta x = -6,042$

$y = 915,443 + 25,882 = 941,325$

$x = 1050,161 + (-6,042) = 1044,119$

Ergebnis:

Punkt	Y	X
Standpunkt	941,325	1044,119

Zur Kontrolle können aus den Koordinaten die Strecken zwischen den Punkten gerechnet werden.

14.1.4. Abriss

Bei der Polaraufnahme von einem bekannten Standpunkt aus soll im Kataster, aber auch bei den meisten Ingenieurvermessungen mehr als ein Anschlusspunkt verwendet werden. Bei Verwendung mehrerer Anschlusspunkte stellt sich die Frage, an welchen der angemessenen Punkte sich die Berechnung anschließen soll. Deshalb wird ein so genannter Abriss gerechnet, der eine mittlere Orientierung (Mittelwert für den Anschlussrichtungswinkel) für die weitere Berechnung bestimmt.

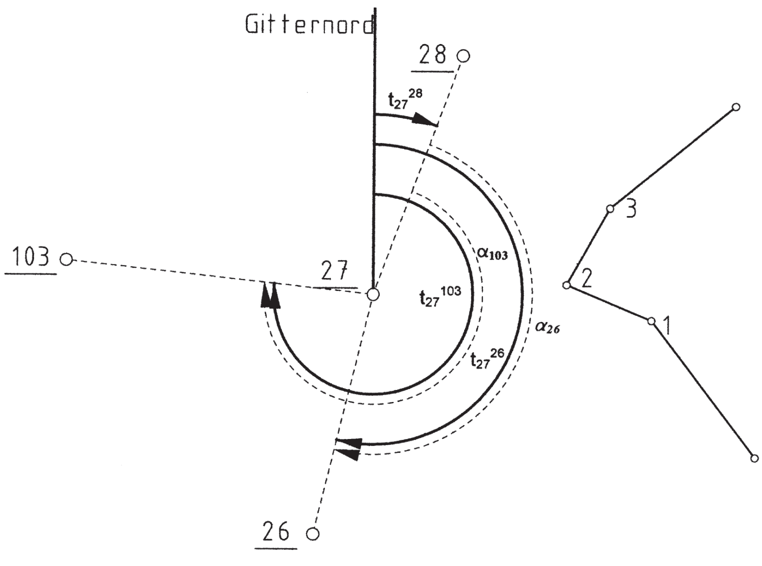


Abbildung 14.1.4.: Abriss

Beispiel (s. Abbildung 14.1.4): Auf dem Standpunkt 27 sind mit Anschluss an die AP 103, 26 und 28 die Grenzpunkte 1, 2, 3 polar aufgemessen worden. Die Koordinaten der Grenzpunkte sind zu berechnen.

Gegebene Koordinaten		
Punkt	Y	X
26	4162,150	6195,800
27	4241,090	6259,660
28	4316,550	6305,511
103	4172,980	6309,019

Messdaten Standpunkt 27		
Zielpunkt	Richtung	Strecke
28	0,000	88,32
3	46,213	35,33
2	59,176	24,34
1	69,625	35,86
26	191,458	101,53
103	274,696	84,12

Abriss							
1	2	3	4	5	6	7	8
Punkt	Y	X	α_i	t_{27}^i	$t_{27}^i - \alpha_i$	$t_{verbessert}$	Verb.
27	4241,090	6259,660					
28	4316,550	6305,511	0,000	65,2403	65,2403	65,2358	-0,0045
26	4162,150	6195,800	191,458	256,6980	65,2400	256,6938	-0,0042
103	4172,980	6309,019	274,696	339,9230	65,2270	339,9318	-0,0088
				Summe=	195,7073	Summe=	+0,0001
				r=	65,2358		

Tabelle 14.1.1.: Abriss

Die Berechnung gliedert sich in folgende Schritte:

1. Schritt

Es werden die Richtungswinkel vom Standpunkt zu den Anschlusspunkten berechnet. (s. Spalte 5 Tabelle „Abriss“)

2. Schritt

Es werden die Differenzen zwischen dem jeweiligen Richtungswinkel und der gemessenen Richtung bestimmt (s. dazu Spalte 6 Tabelle „Abriss“). Die Differenzen müssen, abgesehen von Messungenauigkeiten, gleich sein. (s. Abbildung 14.1.4)

3. Schritt

Es wird das Mittel aus den Differenzen gebildet, man nennt das Ergebnis gewichtete Orientierung r (s. Spalte 6 Tabelle „Abriss“).

4. Schritt

Es werden verbesserte Richtungswinkel berechnet (s. Spalte 7 Tabelle „Abriss“). Dazu wird für jeden Anschlusspunkt berechnet:

$t_{verbessert} = r + \alpha_i$

5. Schritt

Es werden die Verbesserungen berechnet, d. h. die Differenz zwischen den aus Koordinaten berechneten Richtungswinkeln und den verbesserten Richtungswinkeln (s. Spalte 8 Tabelle „Abriss“).

Nach den Gesetzen der Ausgleichung muss die Summe der Verbesserungen Null ergeben (Abweichungen wegen Rundungsfehlern) (s. Spalte 8 Tabelle „Abriss“).

Für die Koordinatenberechnung der Grenzpunkte kann nun jeder der verbesserten Richtungswinkel benutzt werden. Üblicherweise benutzt man den Richtungswinkel für den Punkt, der als Nullrichtung für die Winkelmessung angenommen wurde (hier Punkt 28).

Die gemessenen Strecken zwischen Punkt 27 und den Anschlusspunkten können noch mit den aus Koordinaten gerechneten Strecken verglichen werden. Dadurch lässt sich ein Maßstabsfaktor berechnen. Die gemessenen Strecken werden bei der Polarpunktberechnung mit dem Maßstabsfaktor multipliziert.

Pkt. Nr.	$S_{ger.}$	$s_{gem.}$	$m = \frac{gerechnet}{gemessen}$
28	88,298	88,32	0,999751
26	101,536	101,53	1,000056
103	84,115	84,12	0,999941
		Mittel =	0,999917

Die Koordinaten der Grenzpunkte können nun mit den Formeln der Polarpunktberechnung bestimmt werden und ergeben sich zu:

Pkt. Nr.	Y	X
1	4271,706	6240,990
2	4263,662	6250,554
3	4275,850	6253,340

14.2. Polygonzug

Der Polygonzug soll heute im Kataster nicht mehr verwendet werden. Trotzdem kommt er aufgrund örtlicher Verhältnisse im Kataster genauso wie in der Ingenieurvermessung gelegentlich zur Anwendung.

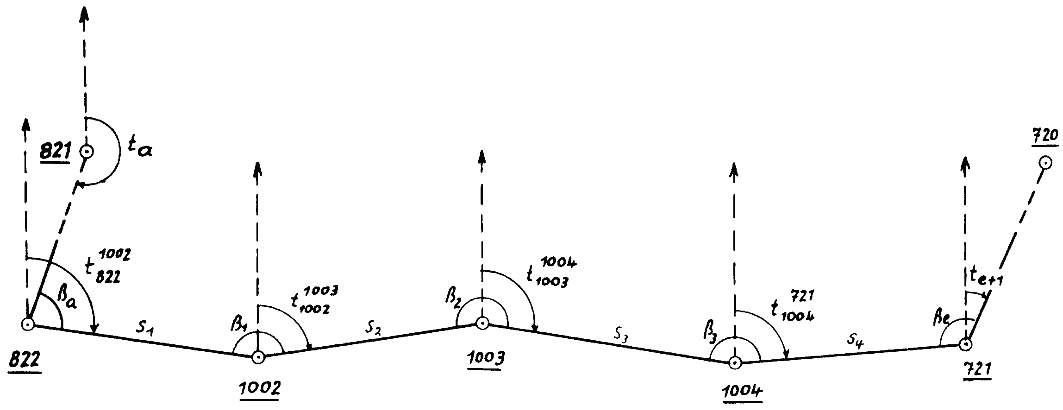


Abbildung 14.2.1.: Polygonzug

14.2.1. Aufbau und Messung

Der Polygonzug ist eine linienhafte Bestimmung von Punkten. D. h. der nächste Punkt wird in der Linie (nicht Gerade!) immer über den vorhergehenden Punkt bestimmt und zwar über Polares Anhängen. Es entsteht ein vielfach geknickter Zug (griech. Polygon), in dem die sog. Brechungswinkel β und die Strecken s gemessen sind (s. Abbildung 14.2.1).

Man unterscheidet:

- Einseitig angeschlossener Zug: nur der Anfangspunkt und ein Anschlusspunkt sind koordinatenmäßig bekannt.
- Beidseitig angeschlossener Zug: Anfangs- und Endpunkt des Zuges sowie ein Anschlusspunkt (und eventuell ein Abschlusspunkt) sind koordinatenmäßig bekannt.

Polygonzüge sollen aus fehlertheoretischen Gründen einen gestreckten Verlauf haben (Brechnungswinkel um 200 gon). Diese Forderung verliert bei den heutigen hochgenauen elektronischen Tachymetern allerdings ständig an Bedeutung.

Die Seitenlängen des Polygonzugs sollen 100 m bis 150 m betragen. Wenn sich aufgrund der Örtlichkeit Abweichungen ergeben, soll ein Wechsel von sehr kurzen Seiten (z. B. 30 m) zu langen oder überlangen Seiten (z. B. 200 m) vermieden werden.

Im amtlichen Vermessungswesen sollen nur beidseitig angeschlossene Polygonzüge mit maximal 6 Brechungspunkten (einschließlich Anfangs- und Endpunkt) verwendet werden.

Die Länge der Anschlussrichtung soll etwa der gesamten Zuglänge entsprechen.

Beim Polygonzug muss immer mit Zwangszentrierung (vgl. Kapitel 9.3.5) gearbeitet werden.

14.2.2. Berechnung

Zwischen den alten Polygonpunkten 821 und 822 einerseits und 721 und 720 andererseits sollen die neuen Polygonpunkte 1002, 1003 und 1004 eingerechnet werden (s. Abbildung 14.2.1).

Die Berechnung gliedert sich in folgende Schritte:

1. Berechnung des Anschlussrichtungswinkels t_a aus Koordinaten (s. Spalte 2 Tabelle „Polygonzug")
2. Berechnung der weiteren Richtungswinkel (s. Abbildung 14.2.2 und Spalte 2 Tabelle „Polygonzug")
   $t_{822}^{1002} = t_a - 200 + \beta_a$
   $t_{1002}^{1003} = t_{822}^{1002} - 200 + \beta_1$
   weitere Berechnung entsprechend, bei einem negativen Winkel sind 400 gon zu addieren.