

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung in die Statistik</b> .....	<b>1</b>
1.1 Eingrenzungen des Begriffs „Statistik“ .....	1
1.1.1 Komprimierende Kennwerte .....	1
1.1.2 Staatswissenschaftliche Disziplin .....	2
1.1.3 Wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierte Datenwissenschaft .....	2
1.2 Grundzüge statistischer Methoden .....	4
1.2.1 System und Zufall .....	4
1.2.2 Irrtums- und Sicherheitswahrscheinlichkeiten .....	6
1.2.3 Deskription und Induktion .....	8
1.2.4 Empirischer und theoretischer Kalkül .....	10
1.3 Teilbereiche, Spezialgebiete und Grundlagen .....	11
1.3.1 Datengewinnung und Aufbereitung .....	11
1.3.2 Spezielle Analysemethoden und Instrumente .....	14
1.3.3 Wissenschaftsspezifische Ausrichtungen .....	17
1.3.4 Mathematische und technische Grundlagen .....	18
<b>Teil 1: Deskriptive Statistik – Empirischer Kalkül</b> .....	<b>19</b>
<b>2 Einführung in die deskriptive Statistik</b> .....	<b>20</b>
2.1 Daten, Datensätze und Variablen .....	20
2.2 Grundgesamtheit, Merkmalstypen und Skalierungsarten .....	22
2.3 Empirische Verteilungen und Zusammenhänge .....	24
<b>3 Gesamtbeschreibung empirischer Verteilungen</b> .....	<b>27</b>
3.1 Tabellarische Darstellungsmöglichkeiten .....	27
3.1.1 Elementare Begriffe und Notation .....	27
3.1.2 Häufigkeitstabellen bei Urlisten .....	29
3.1.3 Häufigkeitstabellen bei klassierten Daten .....	31
3.2 Grafische Darstellungsmöglichkeiten .....	32
3.2.1 Kreis-, Säulen- und Balkendiagramme .....	32
3.2.2 Stamm-Blatt-Diagramme .....	34
3.2.3 Histogramme (Häufigkeitsdichten) .....	35
3.2.4 Boxplots .....	39

3.3	Empirische Verteilungsfunktion (EVF).....	43
3.3.1	Häufigkeitsfunktion und EVF bei Urlisten .....	43
3.3.2	Häufigkeitsdichtefunktion und EVF bei klassierten Daten .....	45
<b>4</b>	<b>Spezifizierende Beschreibung empirischer Verteilungen .....</b>	<b>49</b>
4.1	Spezifika empirischer Verteilungen .....	49
4.2	Lagekennwerte .....	52
4.2.1	Arithmetisches Mittel .....	52
4.2.2	Median.....	56
4.2.3	Modalwert .....	59
4.2.4	Fechner'sche Lageregeln .....	59
4.3	Spezielle Lagekennwerte .....	61
4.3.1	Arithmetisches Mittel bei gruppierten Daten .....	61
4.3.2	Quantile .....	62
4.3.3	Geometrisches Mittel .....	65
4.4	Streuungskennwerte .....	69
4.4.1	Spannweite.....	69
4.4.2	Mittlere absolute Abweichungen .....	70
4.4.3	Median absoluter Abweichungen .....	72
4.4.4	Varianz, Standardabweichung und Schwankungsintervalle .....	73
4.5	Spezielle Streuungskennwerte.....	76
4.5.1	Varianz bei gruppierten Daten.....	76
4.5.2	Quantilsabstände .....	80
4.5.3	Variationskoeffizient .....	81
4.6	Standardisierung mittels Lage und Streuung .....	83
4.7	Messung von Schiefe .....	86
4.8	Darstellung und Messung von Konzentration .....	88
4.8.1	Lorenz-Kurve .....	88
4.8.2	Gini-Koeffizient .....	91
4.9	Spezifische Eigenschaften empirischer Kennwerte.....	94
4.9.1	Minimumeigenschaft des arithmetischen Mittels.....	94
4.9.2	Minimumeigenschaft des Medians.....	96
4.9.3	Transformationseigenschaften .....	98
4.9.4	Robustheit .....	103
<b>5</b>	<b>Beschreibung und Analyse empirischer Zusammenhänge .....</b>	<b>105</b>
5.1	Zusammenhänge zwischen kategorialen Merkmalen.....	105
5.1.1	Kontingenztabellen .....	105
	Verteilungen in Kontingenztabellen .....	105
	Empirische Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	110
	Konzeptionelle Vorüberlegungen für ein Zusammenhangsmaß.....	114

5.1.2	Zusammenhangsmaße für Kontingenztafeln .....	116
	Chi-Quadrat-Koeffizient .....	116
	Mittlere quadratische Kontingenz .....	119
	Kontingenzkoeffizient nach Pearson .....	120
	Transformationseigenschaften der Zusammenhangsmaße .....	122
5.1.3	Grafische Analysemöglichkeiten .....	124
	Gestapelte und gruppierte Säulendiagramme .....	124
	Segmentierte Säulen- und Balkendiagramme .....	125
	Assoziationsplots .....	126
	Mosaikplots .....	127
	Spineplots .....	128
5.2	Zusammenhänge zwischen metrischen Merkmalen .....	129
5.2.1	Grafische Analysemöglichkeiten .....	129
	Streudiagramme .....	129
	Streudiagramm-Matrizen .....	131
	Hexagonalplots .....	132
5.2.2	Zusammenhangsmaße für metrische Merkmale .....	132
	Empirische Kovarianz .....	132
	Empirischer Korrelationskoeffizient nach Pearson .....	137
	Empirische Kovarianz- und Korrelationsmatrizen .....	145
	Korrelationskoeffizient nach Spearman .....	146
5.2.3	Einfache lineare Regression .....	150
	Zweck und allgemeine Vorgehensweise .....	150
	KQ-Methode ( $L_2$ -Regression) .....	153
	LAD-Methode ( $L_1$ -Regression) .....	158
	Kritische Punkte und Alternativen .....	163
5.3	Ergänzende und vertiefende Themen .....	166
5.3.1	Zusammenhänge in anderen Skalierungsfällen .....	166
	Grafische Analysemöglichkeiten .....	166
	Zusammenhangsmaße .....	169
	Spezielle Regressionsmodelle .....	171
5.3.2	Grafische Darstellung höherdimensionaler Daten .....	174
	Höherdimensionale Mosaikplots .....	174
	3D-Punktwolken .....	176
	Biplots .....	176
5.3.3	Wichtige Aspekte bei der Analyse empirischer Zusammenhänge ...	183
	Empirische Zusammenhänge und Kausalität .....	183
	Spezielle Formen von Kausalität .....	186
	Systematische Verzerrungen .....	188
	Zufällige Schwankungen .....	198

<b>Teil 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Theoretischer Kalkül</b> .....	<b>203</b>
<b>6 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	<b>204</b>
6.1 Wichtige Grundbegriffe und Regeln .....	204
6.1.1 Interpretation von Zufall und Wahrscheinlichkeiten .....	204
6.1.2 Elementare Mengenlehre .....	209
6.1.3 Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff und Regeln .....	216
6.2 Rechnen mit abhängigen und unabhängigen Ereignissen .....	226
6.2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Rechenregeln .....	226
6.2.2 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen .....	233
6.2.3 Kalkül nach der Formel von Bayes .....	241
<b>7 Theoretische Verteilungen und Abhängigkeiten</b> .....	<b>245</b>
7.1 Zufallsvariablen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	245
7.1.1 Eindimensionale Zufallsvariablen .....	245
Konzept und Ausblick .....	245
Diskrete Zufallsvariablen und Additionskalkül .....	247
Stetige Zufallsvariablen und Integrationskalkül .....	250
Theoretische Verteilungsfunktion .....	255
Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	259
7.1.2 Mehrdimensionale Zufallsvariablen .....	260
Konzept und Ausblick .....	260
Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen .....	262
Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen .....	268
Stochastische Abhängigkeit und Unabhängigkeit .....	274
Höherdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	278
7.1.3 Verteilung von Funktionen von Zufallsvariablen .....	287
Funktionen einer Zufallsvariable .....	287
Funktionen aus mehreren Zufallsvariablen .....	293
7.2 Theoretische Kennwerte .....	296
7.2.1 Kennwerte in Bezug auf Lage und Streuung .....	297
Erwartungswert .....	297
Theoretische Varianz und Standardabweichung .....	312
Theoretische Quantile und theoretischer Median .....	316
7.2.2 Kennwerte in Bezug auf Abhängigkeiten .....	319
Bedingte Erwartungswerte und Varianzen .....	319
Theoretische Kovarianz und Korrelation .....	327
Theoretische Regressionskoeffizienten .....	333
7.2.3 Spezifische Eigenschaften theoretischer Kennwerte .....	334
Minimaleigenschaften von Lagekennwerten .....	334
Wichtige Transformationseigenschaften .....	335
Endliche und nicht endliche theoretische Momente .....	338
7.3 Spezielle eindimensionale Verteilungen .....	340
7.3.1 Spezielle diskrete Verteilungen .....	341
Elementare Kombinatorik .....	341

Einpunktverteilung .....	344
Bernoulli-Verteilung .....	344
Binomialverteilung .....	346
Poisson-Verteilung .....	350
7.3.2 Spezielle stetige Verteilungen .....	354
Stetige Gleichverteilung .....	354
Exponentialverteilung .....	356
Normalverteilung .....	361
7.4 Verteilung stochastischer Summen und Mittelwerte .....	369
7.4.1 Exakte Aussagen .....	370
Erwartungswerte und Varianzen .....	370
Verteilungen unter bestimmten Ausgangsverteilungen .....	373
7.4.2 Asymptotische und approximative Aussagen .....	379
Gesetz der großen Zahlen (GGZ) .....	379
Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS) .....	384
<b>8 Ergänzungen und Verallgemeinerungen .....</b>	<b>394</b>
8.1 Weitere eindimensionale Verteilungen .....	394
8.1.1 Weitere diskrete Verteilungen .....	394
8.1.2 Weitere stetige Verteilungen .....	396
8.1.3 Sonstige eindimensionale Verteilungen .....	400
8.2 Ergänzungen zu asymptotischen Aussagen .....	402
8.2.1 Alternative GGZ- und ZGWS-Varianten .....	403
8.2.2 Stochastische Konvergenz und Verteilungskonvergenz .....	407
8.3 Einige multivariate Verallgemeinerungen .....	411
8.3.1 Multivariate Abhängigkeiten .....	411
Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Zufallsvektoren .....	411
Bedingte Abhängigkeit und Unabhängigkeit .....	414
8.3.2 Kenngrößen multivariater Abhängigkeiten .....	415
Theoretische Kovarianz- und Korrelationsmatrix .....	415
Bedingte Kennwerte für $n > 2$ .....	416
8.3.3 Sonstige Verallgemeinerungen .....	419
<b>Teil 3: Induktive Statistik – Verbindung von Empirie und Theorie .....</b>	<b>427</b>
<b>9 Einführung in die induktive Statistik .....</b>	<b>428</b>
9.1 Modellierung und Handhabung von Schätz- und Testproblemen .....	428
9.2 Was versteht man unter einer Stichprobe? .....	432
9.3 Formale Unterscheidungsebenen .....	442

<b>10 Statistisches Schätzen</b> .....	<b>446</b>
10.1 Punktschätzung .....	446
10.1.1 Schätzer und ihre Gütekriterien .....	446
10.1.2 Erwartungstreue .....	453
10.1.3 Erwartete quadratische Abweichung (MSE) .....	457
10.1.4 Konsistenz .....	459
10.1.5 Effizienz .....	466
10.2 Intervallschätzung .....	469
10.2.1 Was versteht man unter einem Konfidenzintervall? .....	469
10.2.2 Konfidenzintervalle für Erwartungswerte .....	474
10.2.3 Konfidenzintervalle für Erwartungswertdifferenzen .....	480
10.2.4 Weitere Konfidenzintervalle .....	490
10.2.5 Adäquatheit bestimmter Modellannahmen .....	494
10.3 Schätzmethoden .....	500
10.3.1 Momentenmethode .....	500
10.3.2 Maximum-Likelihood-Methode .....	503
10.3.3 Weitere Schätzmethoden .....	509
<b>11 Statistisches Testen</b> .....	<b>511</b>
11.1 Was versteht man unter einem Test? .....	511
11.1.1 Einführende Beispiele .....	511
11.1.2 Grundstruktur und Durchführung .....	523
11.1.3 Zusammenhang zur Intervallschätzung .....	526
11.2 Wichtige Aspekte beim Testen .....	528
11.2.1 Hypothesenwahl und Fehlerarten .....	529
11.2.2 Irrtumswahrscheinlichkeiten und Güte .....	532
11.2.3 $p$ -Werte .....	543
11.2.4 Signifikanz vs. Relevanz .....	546
11.3 Ausgewählte Testverfahren .....	548
11.3.1 Tests über Erwartungswerte .....	548
11.3.2 Tests über Erwartungswertdifferenzen .....	552
11.3.3 Nichtparametrische $\chi^2$ -Tests .....	556
Allgemeiner Überblick .....	556
$\chi^2$ -Anpassungstest .....	557
$\chi^2$ -Unabhängigkeitstest .....	565
11.3.4 Weitere Tests .....	570
Tests über Anteilswerte .....	570
Tests auf Unkorreliertheit und Unabhängigkeit .....	576
Sonstige Tests und Testmethoden .....	580
11.3.5 Allgemein zu beachtende Punkte .....	583

<b>12 Das lineare Regressionsmodell</b> .....	<b>585</b>
12.1 Einfaches lineares Regressionsmodell .....	585
12.1.1 Grundmodell und KQ-Methode .....	585
Statistisches Grundmodell .....	585
Herleitung der KQ-Schätzer .....	587
Eigenschaften der empirischen KQ-Regression .....	590
Bestimmtheitsmaß und Standardfehler der Regression .....	594
12.1.2 Modellannahmen und theoretische KQ-Regression .....	598
Ensembles von Modellannahmen .....	598
Theoretische KQ-Regression .....	605
12.1.3 Verteilungstheoretische Grundlagen .....	610
Verteilungen der KQ-Schätzer .....	610
Konsistenz und Effizienz der KQ-Schätzer .....	619
Schätzung der Varianzen der KQ-Schätzer .....	620
Verteilungen der Inferenzstatistiken .....	623
12.1.4 Schätzen und Testen .....	624
Konfidenzintervalle und Tests .....	624
Spezialfall: Binärer Regressor .....	626
Adäquatheit bestimmter Modellannahmen .....	629
Fallbeispiel 1: Bewässerung und Wachstum .....	636
Fallbeispiel 2: Klassengröße und Lernerfolg .....	640
12.2 Einführung in das multiple lineare Regressionsmodell .....	646
12.2.1 Partielle lineare KQ-Regression .....	646
Empirische partielle Regression .....	646
Theoretische partielle Regression .....	652
Verbindung von Empirie und Theorie .....	654
12.2.2 Multiple lineare KQ-Regression .....	656
Empirische multiple Regression .....	656
Theoretische multiple Regression .....	659
Verbindung von Empirie und Theorie .....	661
Statistische Modelle und Inferenz .....	661
12.2.3 Fallbeispiele .....	670
Fallbeispiel 2 fortgesetzt: Determinanten des Lernerfolgs .....	670
Fallbeispiel 3: Gewicht und Geschlecht .....	672
Fallbeispiel 4: Binäre Regressoren und ANOVA-Modelle .....	674
<b>Anhang: Tabellen</b> .....	<b>678</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>681</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>690</b>