Kapitel 6

Funktionenfolgen

Bemerkung 6.1 Motivation. Dieser Abschnitt betrachtet die Konvergenz von Folgen von auf einem gemeinsamen Intervall definierten Funktionen. Dies ist eine wichtige Grundlage, um eine weitere Eigenschaft der Integralrechnung zu untersuchen, nämlich unter welchen Bedingungen man Integration und Grenzübergang vertauschen kann. □

Definition 6.2 Funktionenfolge, punktweise Konvergenz, Grenzfunktion. Sind die Glieder einer unendlichen Folge keine Zahlen sondern Funktionen, die in einem Interval $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind, so spricht man von einer Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Für jedes $x_0 \in I$ ist dann $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Zahlenfolge.

Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ konvergent, falls die Zahlenfolge $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Ist $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent für jedes $x \in I$, so heißt $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise auf I konvergent. In diesem Fall gibt es eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für jedes feste $x \in I$ gilt. Diese Funktion heißt Grenzfunktion. Die Schreibweise ist auch $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung 6.3 Zur punktweisen Konvergenz. Es gilt $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem festen $x \in I$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon, x).$$

□

Definition 6.4 Stetige Funktionenfolge. Eine auf $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge heißt stetig, falls jede der Funktionen $f_n(x)$ auf I stetig ist. □

Beispiel 6.5 Stetigkeit der Grenzfunktion. Die Grenzfunktion einer stetigen Funktionenfolge kann stetig sein, sie muss es jedoch nicht.

- Betrachte $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ auf $I = [0, 1/2]$. Es gilt für alle $x \in I$

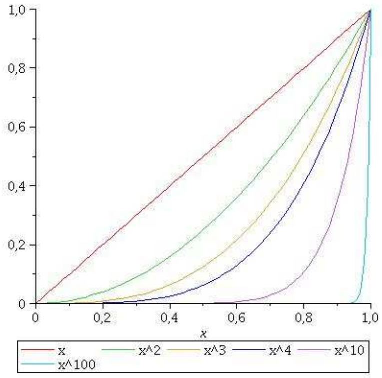
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

  Demzufolge ist die Grenzfunktion $f(x) = 0$. Sie ist stetig.

- Betrachte die gleichen Funktionen wie eben, aber auf $I = [0, 1]$. Für jedes $x \in [0, 1)$ gilt $x^n \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x = 1$ hat man jedoch $1^n = 1$ für alle n, womit $f_n(1) \to 1$ für $n \to \infty$ folgt. Die Grenzfunktion ist damit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

  Sie ist unstetig auf I



- Betrachte

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{nx}{1 + n^2x^2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

  auf $I = \mathbb{R}$. Für $x = 0$ gilt $f_n(0) = 0$ für alle n, also $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ hat man

$$0 < \frac{nx}{1 + n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

  Damit ist die Grenzfunktion $f(x) = 0$. Sie ist stetig auf I.

□

Definition 6.6 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen $f(x)$ auf I, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \neq n_0(\varepsilon, x)$ existiert, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ und für alle $x \in I$ gilt. Man schreibt $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$. □

Bemerkung 6.7 Wie schon bei der Defintion der gleichmäßigen Stetigkeit, Definition 3.23, bedeutet auch die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, dass man in der Konvergenzdefinition etwas unabhängig von einem Parameter wählen kann, nämlich n_0 unabhängig von x. □

Satz 6.8 Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz. *Aus $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ folgt $f_n(x) \to f(x)$.*

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus der Definition der gleichmäßigen Konvergenz. Für die punktweise Konvergenz kann man in der Definition für vorgegebenes ε alle $x \in I$ den Index $n_0(\varepsilon, x) = n_0(\varepsilon)$ wählen, wobei $n_0(\varepsilon)$ der Index aus der Definition der gleichmäßigen Konvergenz ist. ■

Beispiel 6.9 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.

- Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ ist auf $[0,a]$, $a \in (0,1)$ gleichmäßig gegen $f(x) = 0$ konvergent. Es gilt nämlich für alle $0 < \varepsilon < 1$, dass

$$\begin{array}{ll} |x^n - 0| \le |a^n - 0| = a^n < \varepsilon & \Longleftrightarrow \\ n \ln(a) < \ln(\varepsilon) & \Longleftrightarrow \\ n\,|\ln(a)| > |\ln(\varepsilon)| & \Longleftrightarrow \\ n > \dfrac{|\ln(\varepsilon)|}{|\ln(a)|}. & \end{array}$$

Man kann also $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{|\ln(\varepsilon)|}{|\ln(a)|}\right] \ne n_0(\varepsilon, x)$ wählen.
- Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ ist auf $[0,1)$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $f(x) = 0$ konvergent. Die punktweise Konvergenz folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{für} \quad x \in [0,1).$$

Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in [0,1)$ existiert ein n_0 mit $|x^n - 0| = x^n < \varepsilon$. Mit der gleichen Rechnung wie im vorherigen Beispiel erhält man $n_0 = \left[\frac{|\ln(\varepsilon)|}{|\ln(x)|}\right] = n_0(\varepsilon, x)$. Man kann insbesondere kein n_0 finden, so dass $|x^n - 0| < \varepsilon < 1/2$ für alle $n > n_0$ und alle $x \in [0,1)$ ist. Wähle $x = 1 - \frac{1}{2n} < 1$ mit $n > n_0$. Dann ist

$$|x^n - 0| = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \ge 1 - \frac{n}{2n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Für die Abschätzung wurde die Bernoulli[1]–Ungleichung

$$(1+a)^n \ge 1 + na \;\; \text{für } a > -1,\; n \in \mathbb{N},$$

verwendet.
- Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=4}^{\infty}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx) & \text{für } 0 \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{n} < x \le 1, \end{cases}$$

ist auf $[0,1]$ punktweise gegen $f(x) = 0$ konvergent. Sie ist jedoch nicht gleichmäßig konvergent.
Es wird zunächst die punktweise Konvergenz gezeigt. Für jedes $\varepsilon > 0$ und festes $x_0 \in [0, \pi/n]$ gilt

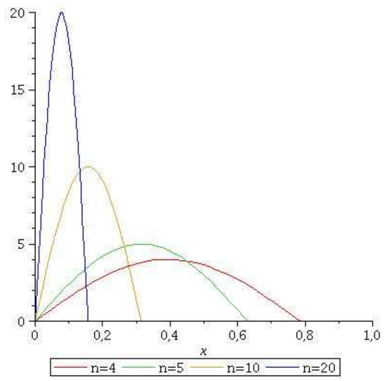
$$|f_n(x_0) - 0| = |n\sin(nx_0) - 0| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |\sin(nx_0)| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Wegen $|\sin(nx_0)| \le |nx_0|$ gilt für $|x_0 - 0| < \delta(\varepsilon, n) := \varepsilon/n^2$, dass

$$|f_n(x_0) - 0| = |n\sin(nx_0)| \le \left|n^2 x_0\right| < n^2 \frac{\varepsilon}{n^2} = \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen $f(x) = 0$.

[1] Jakob Bernoulli (1655 – 1705)



Nun wird gezeigt, dass die Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergiert. Wähle ein beliebiges $\varepsilon < 1$. Dann gibt es ein $x_0 := \pi/(2n)$ mit

$$|f_n(x_0) - 0| = |n\sin(nx_0)| = \left|n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |n| = n > \varepsilon.$$

Damit gibt es für $\varepsilon < 1$ kein $n_0(\varepsilon)$ mit $|f_n(x_0) - 0| < \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$.

□

Satz 6.10 Hinreichende und notwendige Bedingung für gleichmäßige Konvergenz. *Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf I genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

Beweis: $\Longrightarrow$ Die Funktionenfolge konvergiere gleichmäßig gegen $f(x)$. Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0(\varepsilon) \text{ und } \forall\ x \in I.$$

Damit ist ε eine obere Schranke der Menge $\{|f_n(x) - f(x)|\ :\ x \in I\}$. Da das Supremum die kleinste obere Schranke ist, folgt

$$\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n > n_0(\varepsilon)$. Damit folgt $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$.

$\Longleftarrow$ Gelte $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$. Dann findet man für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0(\varepsilon) \text{ und } \forall\ x \in I.$$

Das ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge. ■

Bemerkung 6.11 Existiert für alle n sogar $\max_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$, so ist es ausreichend zu zeigen, dass $\max_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$. □

Beispiel 6.12 Hinreichende und notwendige Bedingung für gleichmäßige Konvergenz.

- Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,a]$, $0 < a < 1$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$. Es gilt nämlich

$$\max_{x\in[0,a]}|x^n - 0| = a^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, konvergiert nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Man findet für alle n ein $x \in [0,1)$, so dass x^n beliebig nahe an 1 ist. Damit folgt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

Satz 6.13 Majorantenkriterium. *Sei die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ auf I definiert. Ferner existiere eine Zahlenfolge $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $|f_n(x)| < M_n$ für alle $n \ge n_0$ und mit $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Dann konvergiert $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ auf I gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.*

Beweis: Aus der Nullfolgeneigenschaft von $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ folgt, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert mit $0 \le M_n < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$. Daraus ergibt sich sofort

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \le M_n < \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_0(\varepsilon).$$

■

Bemerkung 6.14 Beliebige Funktionenfolge. Betrachte eine beliebige Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit Grenzfunktion $f(x)$. Dann wendet man das Majorantenkriterium auf $\{f_n(x)-f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ an, um die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ zu überprüfen. □

Satz 6.15 Cauchy–Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz. *Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf I genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \ne n_0(\varepsilon, x)$ existiert, so dass $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $m, n > n_0(\varepsilon)$ und alle $x \in I$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu Zahlenfolgen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus der Tatsache, dass $n_0(\varepsilon)$ nicht von x abhängt. ■

Übungsaufgabe: Grenzfunktion einer Folge unstetiger Funktionen kann unstetig oder stetig sein.

Bemerkung 6.16 Vertauschung von Grenzwerten. Bei auf einem Intervall I definierten Funktionenfolgen kann man zwei Grenzwerte betrachten, nämlich $n \to \infty$ und $x \to x_0$ mit $x_0 \in I$. Man hat nun zwei Wege. Zum einen kann man erst den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten, also zur Grenzfunktion übergehen, und danach $x \to x_0$ bilden. Umgekehrt kann man ebenfalls vorgehen. Beide Wege müssen im allgemeinen nicht den gleichen Wert liefern.

Betrachte $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ auf $[0,1]$ und $x_0 = 1$. Es gilt für $x \in [0,1)$, erster Weg,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 0 = 0.$$

Für den zweiten Weg erhält man

$$\lim_{x\to 1} f_n(x) = f_n(1) = 1^n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Das Problem bei diesem Beispiel ist die Unstetigkeit der Grenzfunktion. □

Satz 6.17 Stetigkeit der Grenzfunktion und Vertauschung von Grenzwerten. *Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sei auf $I \subset \mathbb{R}$ definiert, sie sei stetig und gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergent. Dann ist die Grenzfunktion stetig und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0)$$

für alle $x_0 \in I$. Mit anderen Worten: Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ und alle $x \in I$. Sei $x_0 \in I$ beliebig. Da jede Funktion $f_n(x)$ stetig ist, gilt für jedes $\varepsilon > 0$, insbesondere für das oben gewählte, $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$. Mit Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= 3\varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n > n_0(\varepsilon)$ und alle $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$. Damit ist die Stetigkeit der Grenzfunktion gezeigt.

Da $f_n(x)$ stetig ist, gilt $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ für alle $x_0 \in I$. Mit der Konvergenz von $f_n(x_0)$ folgt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x_0)) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Andererseits folgt aus der Konvergenz von $\{f(x)\}_{n=1}^{\infty}$, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Mit der Stetigkeit der Grenzfunktion ergibt sich

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0}(f(x)) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

Damit ist die zweite Aussage des Satzes bewiesen. ■

Folgerung 6.18 *Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ gegen eine unstetige Funktion $f(x)$, so kann die Konvergenz nur punktweise und nicht gleichmäßig sein.*

Beweis: Wäre die Konvergenz gleichmäßig, dann wäre die Grenzfunktion stetig. ■

Beispiel 6.19 Die Folge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$ konvergiert gegen eine unstetige Grenzfunktion. Sie kann damit nicht gleichmäßig konvergent sein. □

Satz 6.20 Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration. *Es sei $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ für alle n, eine Folge Riemann–integrierbarer Funktionen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $f(x)$ ebenfalls Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ und alle $x \in [a,b]$ gilt

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \le f(x) \le f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Bildet man die Unter– und Obersummen, erhält man für jede beliebige Zerlegung Z von $[a,b]$

$$\begin{aligned}
S_*(f_n, Z) - \varepsilon &\le S_*(f, Z) \le S_*(f_n, Z) + \varepsilon, \\
S^*(f_n, Z) - \varepsilon &\le S^*(f, Z) \le S^*(f_n, Z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hierbei beachte man, dass die Unter– und Obersumme einer Konstanten gleich der Konstante mal der Intervalllänge sind. Da die Funktionen $f_n(x)$ nach Voraussetzung integrierbar sind, folgen für $\delta(Z) \to 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon &\le \int_a^b {}_*f(x)\,dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon, \qquad (6.1)\\ \int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon &\le \int_a^b {}^*f(x)\,dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$0 \le \int_a^b {}^*f(x)\,dx - \int_a^b {}_*f(x)\,dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon - \left(\int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon\right) = 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, folgt

$$\int_a^b {}^*f(x)\,dx = \int_a^b {}_*f(x)\,dx$$

und damit die Riemann–Integrierbarkeit von $f(x)$.

Mit diesem Wissen erhält man aus (6.1) für alle $n \ge n_0(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \varepsilon.$$

Das bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx,$$

wobei die rechte Gleichung eine Konsequenz der Konvergenz der Funktionenfolge ist. ∎

Bemerkung 6.21 Die gleichmäßige Konvergenz ist im allgemeinen eine zu starke Forderung, um Grenzwert und Integral vertauschen zu können. Das kann jedoch mittels Riemannscher Integrationstheorie nicht bewiesen werden, dazu braucht man beispielsweise Lebesguesche Integrationstheorie. Dann kann gezeigt werden, dass punktweise Konvergenz und eine integrierbare Schranke $F(x)$ mit $|f_n(x)| \le F(x)$ als Voraussetzung ausreichen.

Damit wird auch klar, warum zum Beispiel für die Folge $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty = \{x^n\}_{n=1}^\infty$ auf $[0,1]$ gilt

$$0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = 0,$$

obwohl diese Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergiert. □

Bemerkung 6.22 Funktionenreihen. Neben Funktionenfolgen kann man auch Reihen von auf einem gemeinsamen Intervall definierten Funktionen $\sum_{i=1}^\infty f_i(x)$ betrachten. Die Untersuchung solcher Funktionenreihen wird auf die Untersuchung der Partialsummenfolge $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$ mit $s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ zurückgeführt. Diese Partialsummenfolge ist eine Funktionenfolge, womit man die in diesem Kapitel eingeführten Werkzeuge verwenden kann. □

Kapitel 7

Taylor–Formel und Taylor–Reihen

Bemerkung 7.1 Motivation. Neben der Bedeutung der Taylor–Formel innerhalb der Analysis, ist sie wichtig, um Funktionswerte von hinreichend oft differenzierbaren Funktionen für beliebige Argumente zu approximieren. □

Satz 7.2 Taylor[1]–Formel mit Restglied in Integralform. *Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(k+1)$–mal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$. Dann besitzt $f(x)$ in (a,b) die Darstellung*

$$f(x) = T_k(x,x_0) + R_k(x,x_0)$$

mit dem Taylor–Polynom k–ter Ordnung von $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0

$$T_k(x,x_0) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j$$

und dem Restglied in Integralform

$$R_k(x,x_0) := \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(s)(x-s)^k \, ds.$$

Beweis: Man muss zeigen, dass mit dem angegebenen Restglied die obige Gleichung erfüllt ist. Dies geschieht durch Induktion.

$k = 0$. Es gilt mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$T_0(x,x_0) + R_0(x,x_0) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s) \, ds = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x).$$

$k-1 \to k$. Sei die Taylor–Formel für $0, \ldots, k-1$ gültig. Dann erhält man mit partieller Integration (beachte die Integrationsvariable ist s)

$$\begin{aligned}
&T_k(x,x_0) + R_k(x,x_0) \\
&= T_k(x,x_0) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(s)(x-s)^k \, ds \\
&= T_k(x,x_0) + \frac{1}{k!} \left(-f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + k \int_{x_0}^{x} f^{(k)}(s)(x-s)^{k-1} \, ds \right) \\
&= T_k(x,x_0) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{k-1}(x,x_0) = T_{k-1}(x,x_0) + R_{k-1}(x,x_0) = f(x).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt nach Induktionsvoraussetzung. ■

[1] Brook Taylor (1685 – 1731)

Bemerkung 7.3 Zur Taylor–Formel.

- Beim Induktionsanfang sieht man, dass man für $k = 0$ den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int_{x_0}^{x} f'(s)\ ds = f(x) - f(x_0)$$

hat. Die Taylor–Formel mit Restglied in Integralform ist eine Verallgemeinerung dieses Hauptsatzes.
- Das Restglied in Integralform ist universell einsetzbar, aber nicht leicht zu merken. Dazu sind andere Restglieder geeigneter.

□

Satz 7.4 Lagrange[2]–Restglied. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.2 gibt es ein* $\xi \in (x_0, x)$, $x_0 < x$, *so dass*

$$R_k(x, x_0) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

gilt. Es gilt die Darstellung $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ *mit einem unbekannten* $\theta \in (0, 1)$. *Eine analoge Darstellung gilt für das Intervall* (x, x_0) *falls* $x < x_0$.

Beweis: Setze

$$M := \max_{t \in [x_0, x]} f^{(k+1)}(t), \quad m := \min_{t \in [x_0, x]} f^{(k+1)}(t).$$

Mit Satz 7.2 folgen

$$R_k(x, x_0) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(s)(x - s)^k\ ds \le \frac{M}{k!}\int_{x_0}^{x} (x - s)^k\ ds = M\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

und analog

$$R_k(x, x_0) \ge m\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt $f^{(k+1)}(t)$ in (x_0, x) alle Werte in $[m, M]$ an. Also existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$R_k(x, x_0) = f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

■

Bemerkung 7.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Für $k = 0$ erhält man für das Lagrangesche Restglied, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ gibt mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das ist gerade der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. □

Beispiel 7.6 Funktionswertapproximationen mit Taylor–Polynom. Mit Hilfe von Taylor–Polynomen kann man Funktionswerte von Funktionen für eine vorgegebene Genauigkeit approximieren.

[2] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

- Betrachte die Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion um $x_0 = 0$. Aus

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

folgt für $x_0 = 0$ und $\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(e^x) = e^x$

$$f(x) = \exp(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} + \underbrace{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{\theta x}}_{R_k(x,0)} \qquad \text{mit } 0 < \theta < 1.$$

Damit hat man beispielsweise für $0 \le x \le 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_k(x,0)| = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{\theta x} \le \frac{1}{(k+1)!} e.$$

Hieraus folgt für $k = 10$

$$|R_{10}(x,0)| \le \frac{1}{11!} e \approx 6.81\ 10^{-8}.$$

Man erhält also mit elf Summanden schon eine recht gute Approximation der Exponentialfunktion im Intervall $[0,1]$.
- Jetzt wird die Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion um $x_0 = 0$ betrachtet. Wegen $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ und $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1$ folgt, dass $T_k(x,0)$ keine geraden Potenzen in x enthält

$$\begin{array}{rclrcl} (\sin x)' & = & \cos x & \cos 0 & = & 1 \\ (\sin x)'' & = & -\sin x & -\sin 0 & = & 0 \\ (\sin x)''' & = & -\cos x & -\cos 0 & = & -1 \\ (\sin x)^{(4)} & = & \sin x & \sin 0 & = & 0 \\ (\sin x)^{(5)} & = & \cos x & \cos 0 & = & 1 \\ & & \vdots & & & \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{x^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(\sin x)\bigg|_{x=0} + R_{2k+2}(x,0) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2}(x,0), \end{aligned}$$

vergleiche Satz 2.6. Da der $(2k+2)$–te Summand des Taylor–Polynoms verschwindet, gilt $R_{2k+2}(x,0) = R_{2k+3}(x,0)$. Daraus folgt

$$R_{2k+2}(x,0) = (-1)^{k+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2k+3)!} x^{2k+3}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Für $|x| \le 1$ und $k = 3$ folgt beispielsweise

$$|R_8(x,0)| \le \frac{1}{9!} \approx 2.8\ 10^{-6}.$$

$\square$

Bemerkung 7.7 Asymptotik des Restgliedes. Ist $a < \tilde{a} < x_0 < \tilde{b} < b$, so ist $f^{(k+1)}(x)$ auf $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ beschränkt (Satz von Weierstraß) und man hat für alle $x \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$

$$f(x) = T_k(x, x_0) + \mathcal{O}\left(|x - x_0|^{k+1}\right) = T_k(x, x_0) + o\left(|x - x_0|^k\right),$$

was ausführlich bedeutet

$$\left|\frac{R_k(x, x_0)}{|x - x_0|^{k+1}}\right| \le C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}, \quad \text{oder} \quad \left|\frac{R_k(x, x_0)}{|x - x_0|^k}\right| \to 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

□

Definition 7.8 Taylor–Reihe. Lässt man $k \to \infty$ gehen, so erhält man statt der Taylor–Polynome $T_k(x, x_0)$ die formale Taylor–Reihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0

$$T(x, x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

□

Bemerkung 7.9 Die Taylor–Reihe ist eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius einer Taylor–Reihe kann $\rho = 0$ sein. Außer im Punkt $x = x_0$ braucht die Taylor–Reihe nirgends zu konvergieren. □

Satz 7.10 Konvergenz der Taylor–Reihe. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und sei $x_0 \in (a, b)$. Dann konvergiert die Taylor–Reihe von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 genau dann gegen $f(x)$, wenn*

$$\lim_{k \to \infty} R_k(x, x_0) = 0$$

ist. Alle Aussagen sind im punktweisen Sinne zu verstehen.

Beweis: Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus Satz 7.2. ■

Beispiel 7.11 Taylor–Reihen. Nicht ohne Grund heißt es „konvergiert gegen $f(x)$“. Die Tatsache, dass die Taylor–Reihe von $f(x)$ konvergiert, muss noch nicht bedeuten, dass sie auch gegen $f(x)$ konvergiert, siehe zweites Beispiel.

- Die Taylor–Reihe zur Exponentialfunktion im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

  Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\exp(x)$.
- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0, \end{cases}$$

  siehe Abbildung 7.1. Diese Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar. Für $x \neq 0$ ist das klar. Für $x < 0$ sind alle Ableitungen von $f(x)$ gleich 0. Für $x > 0$ haben die Ableitungen die Gestalt $f^{(k)}(x) = P_{k-1}(x)\exp(-1/x)/P_{2k}(x)$, wobei $P_k(x)$ ein Polynom k–ten Grades ist. Das zeigt man durch vollständige Induktion. Insbesondere folgt

$$\lim_{x \to 0, x > 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{P_{k-1}(x)\exp(-1/x)}{P_{2k}(x)} = 0,$$

was man beispielsweise mit der Regel von Bernoulli–l'Hospital nachrechnen kann.
Also ist $f(x)$ auch in $x = 0$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt $T_k(x, 0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Taylor–Reihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ verschwindet und es gilt $\lim_{k\to\infty} R_k(x, 0) = f(x)$. Für $x > 0$ konvergiert die Taylor–Reihe daher nicht gegen $f(x)$.

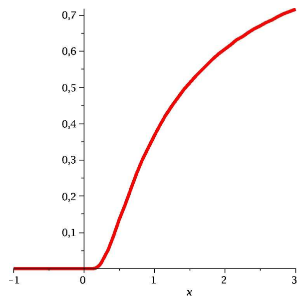


Abbildung 7.1: Funktion zum zweiten Beispiel aus Beispiel 7.11.

□

Ist jedoch eine Potenzreihendarstellung von $f(x)$ bekannt, so ist die Lage klar.

Satz 7.12 Taylor–Reihe und Potenzreihendarstellung von $f(x)$. *Ist $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x)$ in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt*

$$a_j = \frac{1}{j} f^{(j)}(x_0)$$

und folglich stimmen die Potenzreihe und die Taylor–Reihe von $f(x)$ überein. Sie konvergieren in jedem Intervall $(x_0 - \rho + \varepsilon, x_0 + \rho - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig gegen $f(x)$.

Beweis: Die Aussagen folgen aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen, beispielsweise aus dem Identitätssatz. ■

Satz 7.13 Konvergenzkriterium für Taylor–Reihen von Bernstein[3] (1914). *Seien $x_0 = 0$, $r > 0$, $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und für alle $j \geq j_0$, $j_0 \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(j)}(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in (-r, r)$$

oder

$$(-1)^j f^{(j)}(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in (-r, r).$$

Dann konvergiert die Taylor–Reihe $T(x) := T(x, 0)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ in $(-r, r)$ gegen $f(x)$.

Beweis: Betrachte das erste Kriterium und dort zunächst den Fall $x_1 > 0$. Bezeichne

$$T_k(x_1) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{1}{j!} f^{(j)}(0) x_1^j}_{\geq 0 \text{ falls } j \geq j_0}, \quad R_k(x_1) = \frac{1}{k!} \int_0^{x_1} \underbrace{f^{(k+1)}(t)(x_1 - t)^k}_{\geq 0 \text{ falls } k+1 \geq j_0} \, dt.$$

[3] Sergei Natanowitsch Bernstein (1880 – 1968)

Die Verwendung des Restglieds in Integralform ist wichtig für diesen Beweis. Nach der Taylor–Formel, Satz 7.2, gilt

$$f(x_1) = T_k(x_1) + R_k(x_1).$$

Ist $k \ge j_0$, so ist $T_k(x_1)$ für wachsende k monoton wachsend, da nur nichtnegative Summanden hinzukommen. Des Weiteren gilt $R_k(x_1) \ge 0$. Wegen der Gleichheit in der Taylor–Formel ist deswegen dann $R_k(x_1)$ monoton fallend. Damit ist die Menge $\{R_k(x_1)\}_{k=0}^{\infty}$ beschränkt. Es gibt also ein $C_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 \le R_k(x_1) \le C_1 \quad \text{für } k \ge 0.$$

Sein nun $q \in (0,1)$ so, dass $x_1/q < r$. Betrachte für $x \in (-qr, qr)$ die Funktion

$$g(x) = f\left(\frac{x}{q}\right).$$

Dann gilt (die Abschätzung für $j \ge j_0$)

$$g^{(j)}(x) = \frac{1}{q^j} f^{(j)}\left(\frac{x}{q}\right) \ge 0.$$

Damit lässt sich formal für alle $x \in (-qr, qr)$ die Taylor–Formel

$$g(x) = \tilde{T}_k(x) + \tilde{R}_k(x)$$

aufschreiben. Wegen $x_1 \in (-qr, qr)$ argumentiert man analog zu oben, dass es ein $C_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$0 \le \tilde{R}_k(x_1) \le C_2 \quad \text{für } k \ge 0.$$

Für $j \ge j_0 - 1$ folgt aus $f^{(j+1)}(x) \ge 0$, dass die Funktionen $f^{(j)}(x)$ monoton wachsend sind. Wegen $q \in (0,1)$ gilt damit für alle $x \ge 0$

$$g^{(j)}(x) = \frac{1}{q^j} f^{(j)}\left(\frac{x}{q}\right) \ge \frac{1}{q^j} f^{(j)}(x).$$

Daraus folgt für $k \ge j_0$

$$k!\tilde{R}_k(x_1) = \int_0^{x_1} g^{(k+1)}(t)\underbrace{(x_1 - t)^k}_{\ge 0}\, dt \ge \int_0^{x_1} \frac{1}{q^{k+1}} f^{(k+1)}(t)(x_1 - t)^k\, dt = \frac{1}{q^{k+1}} k! R_k(x_1).$$

Damit ergibt sich

$$0 \le R_k(x_1) \le q^{k+1}\tilde{R}_k(x_1) \le q^{k+1} C_2,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x_1) = \lim_{k\to\infty} q^{k+1} C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} T_k(x_1) = f(x_1).$$

Den Fall $x_1 < 0$ führt man auf den soeben behandelten Fall zurück, indem man die Monotonie von $f^{(k+1)}(x)$ für $k+1 \ge j_0$ ausnutzt,

$$\begin{aligned} |R_k(x_1)| &= \frac{1}{k!}\int_{x_1}^0 f^{(k+1)}(t)(t - x_1)^k\, dt = \frac{1}{k!}\int_0^{|x_1|} f^{(k+1)}(-t)\left(|x_1| - t\right)^k\, dt \\ &\le \frac{1}{k!}\int_0^{|x_1|} f^{(k+1)}(t)\left(|x_1| - t\right)^k\, dt = R_k\left(|x_1|\right) \to 0, \end{aligned}$$

da $|x_1| > 0$. Damit ist der Fall des ersten Kriteriums bewiesen.

Den Fall des zweiten Kriteriums führt man auf das erste Kriterium zurück, indem man $f(-x)$ betrachtet. ■

Beispiel 7.14 Binomialreihe. Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}\,, \quad x > -1.$$

Es gilt

$$f^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^{k} (\alpha + 1 - j)\,(1+x)^{\alpha - k}\,.$$

Die Terme $(1+x)^{\alpha-k}$ sind immer positiv. Für hinreichend große k sind die Exponenten $\alpha - k$ jedoch alle negativ. Dann sind die Faktoren, die man beim Ableiten erhält alle negativ und die Ableitung $f^{(k)}(x)$ beginnt irgendwann im Vorzeichen zu alternieren. Damit ist das zweite Kriterium von Satz 7.13 für $r = 1$ erfüllt. Es folgt, die Konvergenz der Binomialreihe

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1,$$

mit

$$\binom{\alpha}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)\,,\ \alpha \in \mathbb{R},\ k \geq 0.$$

□