1.2. Markovketten auf abzählbaren Zustandsräumen

Im folgenden sei E endlich oder abzählbar unendlich, $\mathcal{E} = 2^E$ die Potenzmenge und $I = \mathbb{N}_0$.

Definition (Markoveigenschaft)

Ein stochastischer Prozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E besitzt die (elementare) Markoveigenschaft, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n].$$

Falls zudem für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ gilt, daß

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]$$

so besitzt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zeithomogene Markoveigenschaft.

Beispiel 3: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in E.

Dann gilt für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ und $x_0,\dots,x_{n+1}\in E$ mit $\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]>0$

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] \overset{\perp}{=} \mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}] \overset{\perp}{=} \mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n]$$

Folglich besitzt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markoveigenschaft. Falls die Zufallsvariablen zudem identisch verteilt sind, d.h. $\mathbb{P}[X_{n+1}=x]=\mathbb{P}[X_1=x]$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, so hat $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zeithomogene Markoveigenschaft.

Beispiel 4: Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in E.

Setze $X_n:=\max\{Y_0,\dots,Y_n\}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Dann besitzt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markoveigenschaft, denn für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ und $x_0,\dots,x_{n+1}\in E$ mit $\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]>0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]\\
&= \mathbb{P}[\max\{x_n,Y_{n+1}\}=x_{n+1}\mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] \overset{\perp}{=} \mathbb{P}[\max\{x_n,Y_{n+1}\}=x_{n+1}]\\
&\overset{\perp}{=} \mathbb{P}[\max\{x_n,Y_{n+1}\}=x_{n+1}\mid X_n=x_n]\\
&= \mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n]
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1] = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1-p, \qquad p\in(0,1)$$

Setze $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k$ und $M_n := \max\{S_0,\dots,S_n\}$ für $n\in\mathbb{N}_0$.

a) Zeige, daß die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_n := M_n - S_n$ die Markoveigenschaft besitzt.

b) Untersuche, ob die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_n := M_n + S_n$ die Markoveigenschaft besitzt.

Definition (stochastische Matrix)

Eine Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ heißt stochastisch oder Übergangsmatrix, falls

(i) $p(x,y) \geq 0$ für alle $x,y\in E$, (ii) $\sum_{y\in E} p(x,y) = 1$ für alle $x\in E$.

Aufgabe 5: Seien $P, Q : E\times E \to [0,1]$ zwei stochastische Matrizen. Zeige:

a) $P\cdot Q$ ist eine stochastische Matrix

b) $\lambda P + (1-\lambda) Q$ ist eine stochastische Matrix für jedes $\lambda\in[0,1]$

c) P^n ist eine stochastische Matrix für jedes $n\in\mathbb{N}_0$.

Satz 1.6 (Chapman-Kolmogorov Gleichung) Für jede stochastische Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ sei $P^n = (p_n(x,y))_{x,y\in E}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $m,n \in \mathbb{N}_0$

$$p_{m+n}(x,y) = \sum_{z\in E} p_m(x,z)\, p_n(z,y) \qquad \forall\, x,y \in E.$$

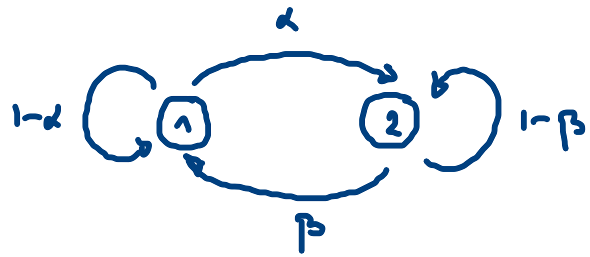
Beweis: Dies folgt direkt aus der Beziehung $P^{m+n} = P^m \cdot P^n$ durch Ausschreiben der Koeffizienten.

$\square$

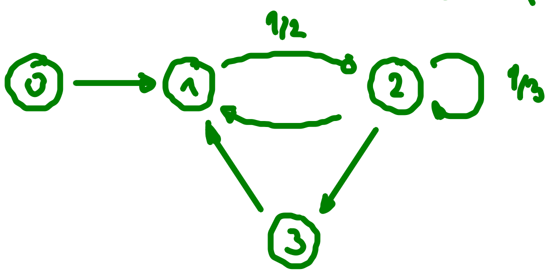
Beispiel 5: (Veranschaulichung einer stochastisch Matrix mittels Übergangsgraphen)

Sei $E = \{1,2\}$ und $\alpha,\beta \in [0,1]$

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$



Aufgabe 6: Bestimme die stochastische Matrix zu folgendem Übergangsgraphen



Definition (zeithomogene Markovkette)

Sei $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix und $\nu : E \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Ein stochastischer Prozeß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum E heißt (zeithomogene) Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν (kurz: (ν, P)-Markovkette), falls

(i) $\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = p(x_n, x_{n+1})$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] > 0$.

(ii) $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \nu(x_0)$ für alle $x_0 \in E$.

Notation: Um die Startverteilung zu betonen, schreiben wir auch $\mathbb{P}_\nu$ bzw. $\mathbb{P}_x$, falls $\nu = \mathbb{1}_{\{x\}}$.

Bemerkung 7: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein E-wertiger stochastischer Prozeß, der die zeithomogene Markoveigenschaft besitzt. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E Startverteilung $\nu = \mathbb{P} \circ X_0^{-1}$ und Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ mit

$$p(x,y) := \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x].$$

Beispiel 6: Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Y_1=1]=\mathbb{P}[Y_1=-1]=\frac{1}{2}$.

Setze $X_0=1$ und $X_n=Y_n$, $n\in\mathbb{N}$. Dann besitzt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wegen Beispiel 3 die zeithomogene Markoveigenschaft und ist somit wegen Bemerkung 7 eine Markovkette auf dem Zustandsraum $E=\{-1,+1\}$ mit Startverteilung $\nu=\mathbb{1}_{\{1\}}$ und Übergangsmatrix

$$P=(p(x,y))_{x,y\in E} \quad \text{mit} \quad p(x,y)=\frac{1}{2} \quad \forall\, x,y\in E.$$

Aufgabe 7: Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Y_1=-1]=\mathbb{P}[Y_1=1]=\frac{1}{2}$.

a) Setze $X_0=0$ und $X_n=X_{n-1}+Y_n$, $n\in\mathbb{N}$.

b) Setze $X_n=(Y_n,Y_{n+1})$, $n\in\mathbb{N}$.

c) Setze $X_n=Y_n+Y_{n+1}$

Untersuche, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist, und bestimme ggf. den Zustandsraum, die Startverteilung ν und die Übergangsmatrix P.

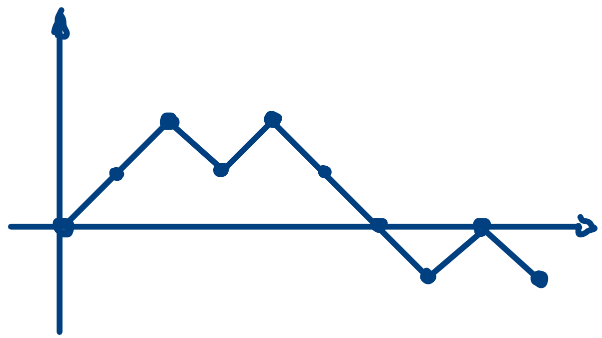
Beispiel 7: (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{Z}^d$. Setze

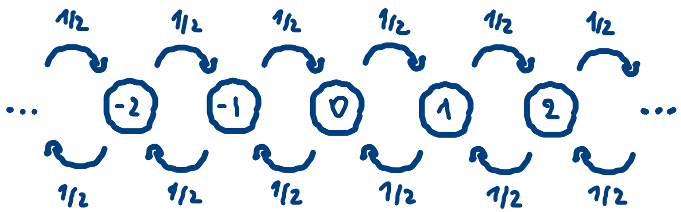
$$p(x,y) = \mu(y-x) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{Z}^d$$

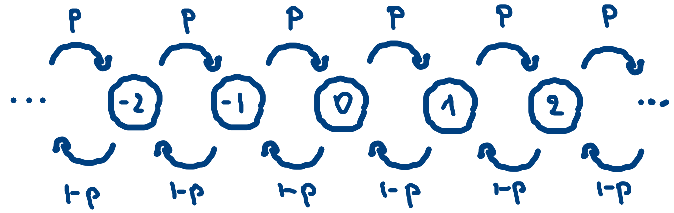
Offensichtlich ist $P = (p(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ eine stochastische Matrix. Dann nennt man die $(\mathbb{1}_x, P)$-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt (random walk) auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x \in \mathbb{Z}^d$. Im Spezialfall, daß

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |x| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

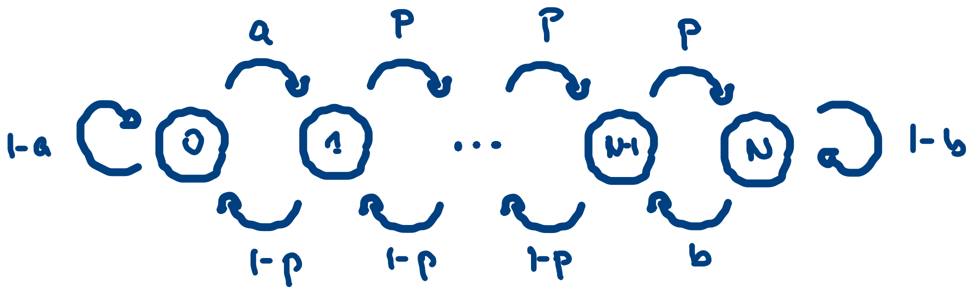
nennt man $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache, symmetrische Irrfahrt.







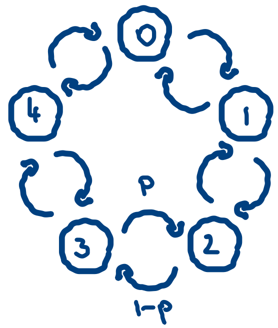
Beispiel 8: (Irrfahrt auf $\{0,\dots,N\}$) Eine (ν,P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine einfache Irrfahrt auf $E=\{0,\dots,N\}$ mit Startverteilung ν, wenn P durch folgenden Übergangsgraphen gegeben ist



$p\in(0,1)$, $a,b\in[0,1]$

Der Rand $x=0$ heißt absorbierend, wenn $p(0,0)=1$ (d.h. $a=0$) bzw. reflektierend, wenn $p(0,1)=1$ (d.h. $a=1$).

Beispiel 9: (Irrfahrt auf dem Torus $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$) Sei $E=(\mathbb{Z} \bmod N)^d=(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ für $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 2$, μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E und $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$ mit $p(x,y)=\mu(y-x)$. Dann ist die (ν,P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf dem Torus mit Startverteilung ν.



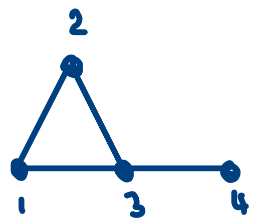
<u>Beispiel 10</u>: (einfache Irrfahrt auf einem Graphen) Sei $G=(V,E(V))$ ein Graph mit Knotenmenge (Vertizes) V und Kantenmenge $E(V)$.

<u>Schreibweise:</u> $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x,y \in V$ sind durch eine Kante aus $E(V)$ verbunden

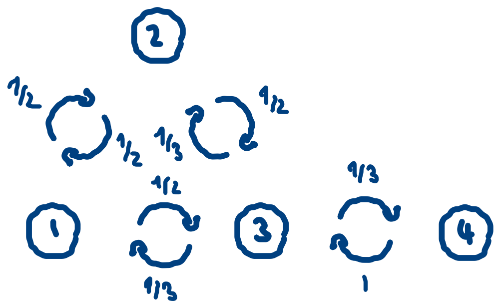
Betrachte

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/\deg(x) & , x \sim y \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\deg(x)$ die Anzahl der von x ausgehenden Kanten ist. Dann ist $P=(p(x,y))_{x,y\in V}$ eine stochastische Matrix, und die (ν,P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet man als Irrfahrt auf dem Graphen G mit Startverteilung ν.



$G=(V,E(V))$



Beispiel 11: (Verzweigungsprozesse*) Sei X_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation. Jedes Individuum der n-ten Generation wird unabhängig von allen anderen in der folgenden Generation mit Wahrscheinlichkeit $\mu(y)$ durch $y \in \mathbb{N}_0$ Nachkommen ersetzt. Dann läßt sich $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch eine Markovkette auf $E = \mathbb{N}_0$ mit Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$

$$p(x,y) = \mu^{*x}(y) = \sum_{y_1+\ldots+y_x=y} \mu(y_1)\ldots\mu(y_x) \qquad \text{mit} \quad \mu^{*0}(y) = \mathbb{1}_{\{0\}}(y)$$

Frage: woher kommt die Faltung?

Sei $(X_n^{(i)})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_n^{(i)} = k] = \mu(k)$. Setze

$$X_0 = x \qquad \text{und} \qquad X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} X_{n-1}^{(i)}$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]$$
$$= \mathbb{P}[X_n^{(1)} + \ldots + X_n^{(x_n)} = x_{n+1}] = \mu^{*x_n}[x_{n+1}] = p(x_n, x_{n+1}).$$

---

* Erstmal untersucht von Galton und Watson (1889) hinsichtlich der Frage des Aussterbens der ausschließlich männlich vererbten englischen Adelstitel

Frage: Besitzen Markovketten die Markoveigenschaft?

Satz 1.7 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von E-wertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, ν eine Verteilung auf E und $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix.

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine (ν,P)-Markovkette, wenn für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $x_0,\dots,x_n\in E$ gilt

$$\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]=\nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n).$$

(ii) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette, so gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=y\mid X_n=x]=p(x,y)\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}_0 \text{ und } x,y\in E \text{ mit } \mathbb{P}[X_n=x]>0.$$

__Beweis__: (i) "$\Leftarrow$" Sei $n\in\mathbb{N}_0$ und $x_0,\dots,x_{n+1}\in E$ mit $\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]>0$. Dann gilt

- $$\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]$$
$$=\frac{\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_{n+1}=x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]}=\frac{\nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n)\,p(x_n,x_{n+1})}{\nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n)}=p(x_n,x_{n+1})$$

- $$\mathbb{P}[X_0=x_0]=\nu(x_0)$$

Folglich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein (ν,P)-Markovkette.

"$\Rightarrow$" Beweis durch vollständige Induktion über n

$\boxed{\text{IA}}$ $n=0$: $\mathbb{P}[X_0=x_0] \overset{(ii)}{=} \nu(x_0)$

$n=1$: $\mathbb{P}[X_0=x_0, X_1=x_1] = \mathbb{P}[X_0=x_0]\,\mathbb{P}[X_1=x_1 \mid X_0=x_0] \overset{(i),(ii)}{=} \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)$

$\boxed{\text{IS}}$ $n \to n+1$

Sei $\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] > 0$ (andernfalls sind beide Seiten identisch gleich 0).

$$\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n, X_{n+1}=x_{n+1}]$$
$$= \mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]\,\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]$$
$$\overset{\boxed{\text{IV}}}{=} \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n)\,\mathbb{P}[X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_0=x_0,\dots,X_n=x_n]$$
$$\overset{(i)}{=} \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n)\,p(x_n,x_{n+1})$$

(ii) Für $n\in\mathbb{N}_0$ und $x,y\in E$ mit $\mathbb{P}[X_n=x]>0$

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=y \mid X_n=x] = \frac{\mathbb{P}[X_0\in E,\dots,X_{n-1}\in E, X_n=x, X_{n+1}=y]}{\mathbb{P}[X_0\in E,\dots,X_{n-1}\in E, X_n=x]}$$
$$= \frac{\sum_{x_0,\dots,x_{n-1}} \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x)\,p(x,y)}{\sum_{x_0,\dots,x_{n-1}} \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x)} = p(x,y)$$

$\square$

Satz 1.8 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_n = x] = \sum_{x_0,\dots,x_{n-1}\in E} \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x) = (\nu P^n)(x) \quad \forall n\in\mathbb{N},\ x\in E$$

Insbesondere gilt für alle $m,n\in\mathbb{N}_0$ und alle $x,y\in E$ mit $\mathbb{P}[X_m=x]>0$

$$\mathbb{P}[X_{m+n}=y \mid X_m = x] = (P^n)(x,y) \equiv p_n(x,y).$$

Beweis: Übungsaufgabe

Beispiel 12: Sei $E=\{1,2\}$ und $P=\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ mit $\alpha,\beta\in[0,1]$

Im folgenden soll $\mathbb{P}[X_n=1 \mid X_0=1] = (P^n)(1,1)$ berechnet werden. Es gilt

$$p_n(1,1) = (P^{n-1}\cdot P)(1,1) = p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + p_{n-1}(1,2)\beta$$

$$= p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + (1-p_{n-1}(1,1))\beta = (1-\alpha-\beta)p_{n-1}(1,1)+\beta$$

Mit $P^0(1,1)=1$ besitzt die obige Rekursionsgleichung folgende eindeutige Lösung

$$p_n(1,1) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n, & \text{falls } \alpha+\beta>0 \\ 1, & \text{falls } \alpha+\beta=0 \end{cases}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 8: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette auf einem Zustandsraum E und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}_0$. Setze $Y_n := X_{r_n}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Zeige, daß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Markoveigenschaft besitzt. Bestimme für $k\in\mathbb{N}$ und $r_n := k\cdot n$, $n\in\mathbb{N}_0$ die zugehörige Startverteilung und Übergangsmatrix.

Korollar 1.9 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt für alle $m,n\in\mathbb{N}_0$, $x\in E$ und $f\in\ell^\infty(E)$

$$\mathbb{E}\left[f(X_{m+n}) \mid X_m = x\right] = (P^n f)(x) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \nu P^n f$$

Beweis: Aus Satz 1.8 folgt

$$\mathbb{E}\left[f(X_{m+n}) \mid X_m = x\right] = \sum_{y\in E} f(y)\,\mathbb{P}\left[X_{m+n} = y \mid X_m = x\right] = (P^n f)(x)$$

$$\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \sum_{x\in E} f(x)\,\mathbb{P}\left[X_n = x\right] = \sum_{x\in E} (\nu P^n)(x) f(x) = \nu P^n f$$

wobei die absolute Konvergenz der beiden Reihen durch die Voraussetzung $f\in\ell^\infty(E)$ garantiert ist, da $\mathbb{E}\left[|f(X_n)|\right] \leq \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$.

$\square$