FACHHOCHSCHULE FÜR TECHNIK ESSLINGEN

Wintersemester 2004 / 2005		Zahl der Blätter: 2 Blatt 1
Fachbereiche:	Informationstechnik (IT)	Studiengang: NT, SW, TI
Prüfungsfach:	Numerische Methoden	Fachnummer: 4094
Hilfsmittel:	Literatur, Manuskript	Zeit: 60 min

Aufgabe 1 (Newtonverfahren):

(a) Beschreiben Sie in ein paar Stichworten und / oder anhand einer Skizze die Grundidee des Newtonverfahrens für Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$!

(b) Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil des Newtonverfahrens gegenüber dem Bisektionsverfahren !

(c) Von der Funktion

$$\overrightarrow{f}(x,y) := \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4x^3 + 3y^2 + 2 \\ 3y^2 + 6xy \end{pmatrix}$$

soll mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Nullstelle berechnet werden.

(c_1) Wie lautet allgemein die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens ?

(c_2) Führen Sie mit den Startwerten $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ einen Newtonschritt durch !

Aufgabe 2 (Überbestimmte lineare Gleichungssysteme):

(a) Geben Sie eine „typische Situation“ an, in der überbestimmte lineare Gleichungssysteme in der Praxis auftauchen !

(b) Überbestimmte inhomogene lineare Gleichungssysteme sind im allgemeinen nicht lösbar. Welcher Gedanke lag unserer Entwicklung einer optimalen Näherungslösung zugrunde ? (D.h. nach welchem Kriterium haben wir optimiert ?)

(c) Gegeben sind die Punkte $A(0|1)$, $B(2|2)$, $C(4|5)$. Gesucht ist die optimale Ausgleichsgerade $y = mx + b$ zu diesen Meßpunkten.

(c_1) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für m, b auf !

(c_2) Bestimmen Sie die optimale Näherungslösung !

Aufgabe 3 (Bézierkurven):

Gesucht ist die kubische Bézierkurve zu den Interpolationspunkten $A(0|0)$ und $D(8|-2)$ sowie den „Richtungspunkten“ $B(3|3)$ und $C(6|2)$.

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau einen Zwischenpunkt P (z.B. den Punkt zum Parameterwert $t = 0.4$) auf der Kurve !

(b) Berechnen Sie die Gleichung der Bézierkurve ! Gesucht ist die Gleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0 \\ b_3\,t^3 + b_2\,t^2 + b_1\,t + b_0 \end{pmatrix} .$$

(c) Skizzieren Sie die Bézierkurve ! Achten Sie dabei insbesondere auf den Kurvenverlauf in der Nähe der Interpolationspunkte !

Aufgabe 4 (Splines):

Durch die Punkte $P_k(x_k|y_k)$, $k = 0, \ldots, n$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ soll ein *quadratischer* Spline gelegt werden; ein solcher Spline ist zusammengesetzt aus Polynomen *zweiten* Grades der Form

$$s_k(x) \;=\; a_k \;+\; b_k \cdot (x - x_k) \;+\; c_k \cdot (x - x_k)^2 \,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

zwischen je zwei benachbarten Stützpunkten.

(a) In der Vorlesung haben wir besprochen, daß zur Bestimmung der Koeffizienten a_k, b_k, c_k der Polynome Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen an den Stützpunkten aufgestellt werden. Bis zu welcher Ableitung kann man im vorliegenden Fall bei den Differenzierbarkeitsforderungen gehen? (Begründung!) Wie viele Randbedingungen kann man dann zusätzlich noch vorgeben?

(b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des quadratischen C^1-Splines s durch die Punkte

$$P_0(0|0)\,, \quad P_1(1|1)\,, \quad P_2(2|-1)\,,$$

der in P_0 mit der Steigung $s'(0) = 2$ startet.

Anleitung:

1. Bestimmen Sie a_0 und a_1 aus der Interpolationseigenschaft des Splines;
2. stellen Sie die Gleichungen für die Koeffizienten b_k, c_k $(k = 0, 1)$ auf;
3. bestimmen Sie b_0 aus der Randbedingung;
4. bestimmen Sie der Reihe nach die Koeffizienten c_0, b_1, c_1.
   (Hinweis: Dazu ist es *nicht* erforderlich, ein lineares Gleichungssystem zu lösen!)

Aufgabe 5 (Anfangswertprobleme):

(a) Erläutern Sie – z.B. anhand einer Skizze – die Idee des Euler'schen Polygonzugverfahrens (EPZ)!

(b) Wie muß man das Verhältnis der Schrittweiten h_{EPZ}/h_{Heun} wählen, damit der Vergleich zwischen dem Euler'schen Polygonzugverfahren und dem Verfahren von Heun „fair" ist? (Begründung!)

(c) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; 2xy\,, \qquad y(0) = 1\,; \qquad\qquad \text{exakte Lösung:} \quad y(x) = e^{(x^2)}\,.$$

1. Führen Sie, ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$, einen Heunschritt mit der Schrittweite h durch!
2. Führen Sie, ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$, *zwei* Eulerschritte mit der Schrittweite $h/2$ durch!
3. Zeigen Sie, daß der Näherungswert, den das Heun-Verfahren für $y(h)$ liefert, hier tatsächlich genauer ist als der Näherungswert, den das Euler'sche Polygonzugverfahren liefert! (Hinweis: Taylorentwicklung der exakten Lösung!)