Lösung von Gleichungssystemen über das Newton-Verfahren und APPROX für Windows

Im Abschnitt 1 werden die bekannten Algorithmen des Näherungsverfahrens angegeben. Der Abschnitt 2 enthält die Lösung eines speziellen Beispiels aus der Darstellenden Geometrie. Im Abschnitt 3 schließlich wird die rechnergestützte Lösung über das Programmpaket **APPROX für Windows** dargelegt.

Abschnitt 1:

Für das zu lösende Gleichungssystem gilt $F(X) = 0$, wobei X_0 der Startpunkt (-vektor) für das Iterationsverfahren ist und X^* mit $F(X^*) = 0$ die anzustrebende Lösung enthält.

Das Verfahren geht von der Einführung einer Größe aus, woraus $\boxed{H = X^* - X}$ (1)

$$F(X^*) = F(X) + (X^* - X) = F(X + H) = 0$$

geschrieben werden kann. Unter Beachtung der linearen Approximation gilt die Näherung:

$$F(X+H) \approx F(X) + F'(X) \cdot H$$

mit X als Variablenvektor und F'(X) als Jacobi-Matrix.

Für die zu ermittelnde Lösung gilt nun

$$F(X^*) \approx F(X) + F'(X) \cdot (X^* - X) = 0$$

und damit

$$F(X) + F'(X) \cdot H = 0.$$

Weiter ergibt sich mit den Werten der Komponenten des Variablenvektors X das <u>lineare Gleichungssystem</u>

$$\boxed{F'(X_j) \cdot H_j = -F'(X_j)} \quad , \tag{2}$$

aus dem über die Lösungen von H die Komponenten des den Lösungsvektor X^* approximierenden Vektors X_j folgen.

Das Iterationsverfahren wird so lange ausgeführt, bis

$$X_{j+1} - X_j \approx 0 \tag{3}$$

mit der für das jeweilige Beispiel ausreichenden Genauigkeit erreicht wird.

Abschnitt 2:

Die ausgewählte Aufgabe besteht in der Schnittpunktbestimmung zweier Ellipsen der Form

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2^2 - 4 &= 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \end{aligned}\right\} F(X) = 0. \tag{4}$$

In diesem Abschnitt wird F (X) = 0 mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst. Für das Beispiel lassen sich F (X) und die Jacobi-Matrix wie folgt angeben:

$$F(X) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 4 \\ 3x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$F'(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ 6x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Für den Startpunkt $X_0 = X_j$, j = 0, wird

$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gewählt, wodurch im ersten Iterationsschnitt gilt:

$$F(X_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F'(X_0) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (2) führt damit über

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

zu folgenden Komponentenwerten der Größe H:

$$\left.\begin{aligned} 2\,h_1 + 4\,h_2 &= 1 \\ 6\,h_1 + 2\,h_2 &= 0 \end{aligned}\right\} h_1 = -0{,}1\ ;\ h_2 = -0{,}3$$

Einen neuen Näherungswert X_1 erhält man über (1), wodurch allgemein die Iterationsvorschrift

$X_{j+1} = X_j + H$, $\quad j = 0,1$, … $\quad$ angegeben werden kann.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}3 \end{bmatrix}$$

Eine angenommene Abbruchschranke für die Änderung der Komponenten von X_1 zu X_0 nach (3) ist noch nicht erreicht, so dass die nächste Iteration durchgeführt werden muss.

Das nun zu lösende Gleichungssystem mit den Werten von X_1 lautet

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 & 5{,}2 \\ 5{,}6 & 2{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}12 \end{bmatrix},$$

woraus $h_1 = -1/180$ und $h_2 = -9/260$ folgen.

Der nächste Näherungswert X_2 ergibt sich zu

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/180 \\ -9/260 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}8944 \\ 1{,}2654 \end{bmatrix},$$

der im Vergleich zu X_1 noch keinen Abbruch zulässt. Weitere Iterationen sind also erforderlich.

Das endgültige Ergebnis wurde mit dem Modul OPTIMA des Programmpaketes APPROX für Windows erzielt und lautet:

Schnittpunkte $S_{1,2} = (\pm 0{,}8944 \,;\, 1{,}2649)^T$

Schnittpunkte $S_{3,4} = (\pm 0{,}8944 \,;\, -1{,}2649)^T$

Abschnitt 3:

Nach dem Aufruf des Moduls OPTIMA wird unter „Neue Optimierungsaufgabe" die Anzahl der Variablen für das zu lösende Gleichungssystem (4) mit n = 2 eingegeben. Danach folgt über den Schalter F(X) die Eingabe der Zielfunktion und der Restriktionen. Da für den Optimalfall $F(X^*) \approx 0$ gelten muss, ist in der entsprechenden Befehlszeile unter Zielfunktion

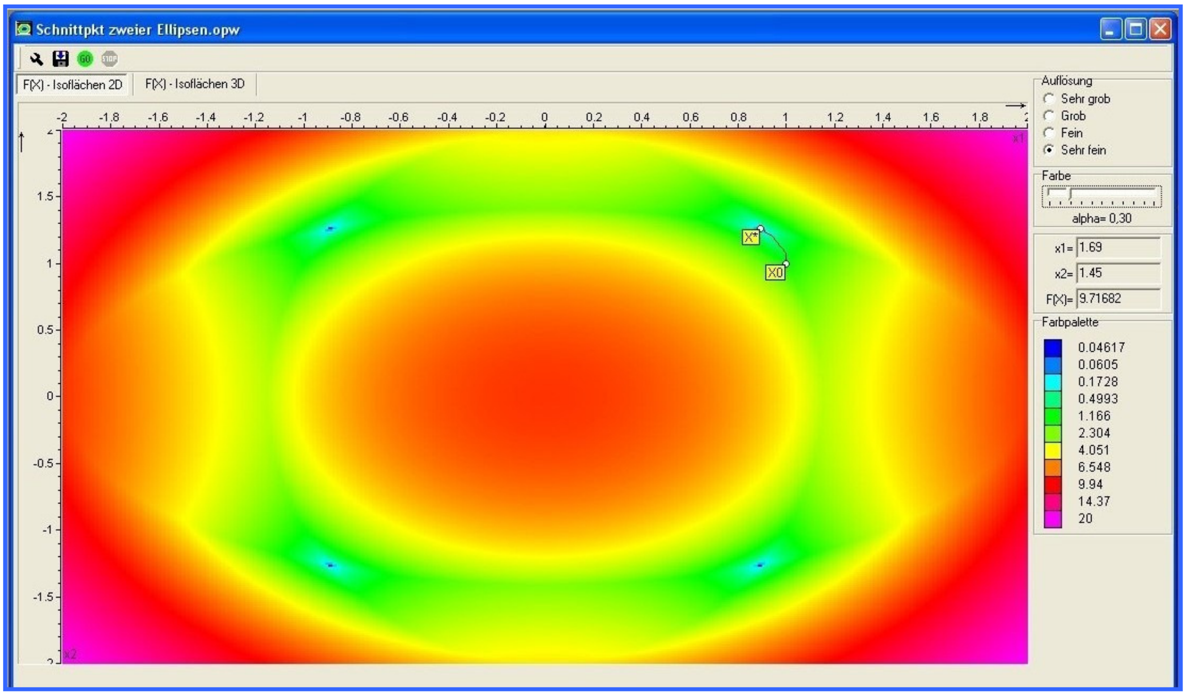
$$\boxed{\text{abs}\underbrace{\left(x_1^2 + 2x_2^2 - 4\right)}_{\text{1. Ellipse}} + \text{abs}\underbrace{\left(3x_1^2 + x_2^2 - 4\right)}_{\text{2. Ellipse}}}$$

einzugeben. Der Ordner Restriktionen bleibt leer und im Ordner Schranken (achsenparallele Restriktionen) wird der Variationsbereich (Bereich möglicher Lösungen) für x_1 über $-2 \le x_1 \le 2$ und x_2 über $-2 \le x_2 \le 2$ eingegeben.
Bei Betätigung von OK werden die Isoflächen der Zielfunktion F(X) gezeichnet. (blau: Minimum, rot: Maximum) und der Startpunkt X_0 angezeigt.

Mit dem beliebig gewählten Punkt $X_0 = (0;\, 0)^T$ wird der Optimierungsprozess gestartet, z.B. mit der Strategie von Nelder-Mead, der zu einem der vier Optimalpunkte als Schnittpunkte der beiden Ellipsen führt. Im Fenster Opti-Vektor X^* sind die Koordinaten des Schnittpunktes und darunter der Wert von $F(X^*)$ angegeben, der im Normalfall 10^{-5} erreichen sollte.

Die beigefügten 2D- und 3D-Darstellungen der Isoflächen der Zielfunktion F (X) in dem durch die Randbedingungen eingeschränkten Lösungsgebiet (Suchgebiet) zeigt die Lage und die gegen Null gehenden Funktionswerte der vier Schnittpunkte als Lösungen.

<u>2D-Darstellungen</u>



<u>3D-Darstellungen</u>