Einführung in die Analysis

für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker

Prof. Dr. Peter Becker

Fachbereich Informatik
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg

Sommersemester 2023

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Zu meiner Person

- Name: Peter Becker
- E-Mail: `peter.becker@h-brs.de`
- Professor an der H-BRS im FB Informatik seit 2001
- Lehrgebiet: Wissens- und Informationsmanagement
- Diplom in Wirtschaftsmathematik (Uni Ulm)
  Promotion in Informatik (Uni Tübingen)
- Themen in Lehre und Forschung:
  - Angewandte mathematische Optimierung
    - Kombinatorische Optimierung, Graphentheorie
    - Lineare Optimierung
  - Data Science Algorithmen
  - Künstliche Intelligenz

Analysis-Team

Peter Becker
Vorlesung
Übungen

Marco Hülsmann
Vorlesung
Übungen

Oliver Lanzerath
Übungen
Tutorium

Rodica Marcov
Übungen

Arkadiusz
Zarychta
ACAT

Allgemeines zur Vorlesung

Homepage:

`https://www2.inf.h-brs.de/~pbecke2m/analysis/`

▸ Link zur Homepage

Die Vorlesung wird bei mir überwiegend folienbasiert gehalten.

Die Folien enthalten nur die wichtigsten Aspekte (Definitionen, Sätze, knappe Beispiele, wichtige Bemerkung).

Alles was sonst eine Vorlesung ausmacht (Erläuterungen, ausführliche Beispiele, Beweise, Anwendungen, Querverweise auf andere Gebiete der Mathematik und Informatik, etc.) gibt es nur in der Vorlesung selbst.

Die Folien zur Vorlesung (Skript) stehen auf der Homepage vor der Vorlesung zur Verfügung.

Termine der Vorlesung

- Dienstags, 10:45 bis 12:15 Uhr, H 1/2
- Donnerstags, 10:45 bis 12:15 Uhr, H 1/2

- Wir fangen pünktlich an!

  Nehmen Sie rechtzeitig ihre Plätze ein. Wer zu spät kommt, stört alle anderen Zuhörer.
- Sollten Sie dennoch zu spät sein, nutzen Sie bitte leise die oberen Eingänge.
- Bitte Ruhe während der Vorlesung!

  Sie stören nicht mich, sondern Ihre Kommilitonen.

Videos

- Kein Livestreaming!
- Aber: Die Vorlesungs- und Übungsvideos aus dem Jahr 2020 stehen online auf YouTube zur Verfügung!
- Link zur Playlist:

  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLtxHl65RI1EAgOzNdBbQZ-m4WCN5jSxSH`

▸ Link zur Playlist

Präsenzübungen

- Beginn der Übungen: nächste Woche
- 2 Stunden Übungen pro Woche
- 7 Gruppen insgesamt
- wöchentliche Ausgabe eines Übungsblatts
- Übungsblatt 1 erscheint diese Woche.
- Ein Übungsblatt wird in der Woche nach Ausgabe in den Präsenzübungen besprochen.
- Mathematik lernt man nur durch üben!!!
- Genau dazu dienen die Übungsblätter!
- wichtig: selber versuchen, die Aufgaben zu lösen

Termine für die Präsenzübungen

BI:

- Gruppe 1: Mo., 13:30–15:00 Uhr
  Becker
- Gruppe 2: Mo., 17:00–18:30 Uhr
  Becker
- Gruppe 3: Mo., 13:30–15:00 Uhr
  Hülsmann
- Gruppe 4: Do., 9:00–10:30 Uhr
  Lanzerath

BWI:

- Gruppe 1: Mo., 15:15–16:45 Uhr
  Hülsmann
- Gruppe 2: Do., 9:00–10:30 Uhr
  Marcov
- Gruppe 3: Do., 9:00–10:30 Uhr
  Becker

Inhalt

Lernziele (allgemein)

- Grundlegende Begriffe der Analysis kennen und deren exakte Definition wiedergeben können.
  - ☞ Es ist nicht ausreichend, nur eine ungefähre Vorstellung der mathematischen Begriffe zu haben.
- Die zentralen Theoreme der Analysis kennen, sowie deren Voraussetzungen und Aussagen benennen können.
  - ☞ Prämisse und Konklusion der Aussagen müssen exakt wiedergegeben werden.
- Beweistechniken beherrschen und mathematische Aussagen in der Analysis beweisen können.
  - ☞ Beweise sind das Herz der Mathematik.
- Theoreme anwenden können, um damit mathematische Probleme zu lösen.

Inhaltliche Voraussetzungen

Diskrete Mathematik und lineare Algebra aus dem ersten Semester. Insbesondere:

- Mengen, Relationen
- Beweisverfahren, vollständige Induktion
- Eigenschaften von Funktionen
- Algebraische Strukturen (Gruppe, Körper, Vektorraum)
- Lineare Algebra

☞ Sie müssen die genannten Gebiete gut beherrschen.

☞ keine tiefgehende Wiederholung bekannter Begriffe

☞ Wer die Voraussetzungen nicht mitbringt, ist voraussichtlich chancenlos.

Viel Theorie, wenig Praxis

Typische Klagen und Fragen von Studenten: Der Stoff ist so theoretisch. Was kann man denn damit überhaupt anfangen? Wozu dient das eigentlich alles?

Die Analysis versetzt Sie erst in die Lage, anwendungsorientierte mathematische Inhalte höherer Semester zu verstehen.

- Beispiel: Sie beschäftigen sich in der zweiten Hälfte Ihres Studiums (4. bis 6. Semester) mit stochastischer Simulation.
- Dazu brauchen Sie Kenntnisse über Wahrscheinlichkeitstheorie (3. Semester).
- Die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzt durchgehend Techniken der Analysis (2. Semester).

Was tun bei Problemen?

Realistisch bleiben und ehrlich zu sich selbst sein!

- Besser verzichten als erzwingen: Gehen Sie niemals schlecht vorbereitet in eine Prüfung.
- Besser zwei Module voll als vier Module halb: Formal haben Sie beliebig lange Zeit fürs Studium, aber nicht beliebig viele Fehlversuche.
- Nehmen Sie mit, was Sie gelernt haben: Die Vorkenntnisse aus diesem Semester erleichtern Ihnen den Einstieg im kommenden Jahr.

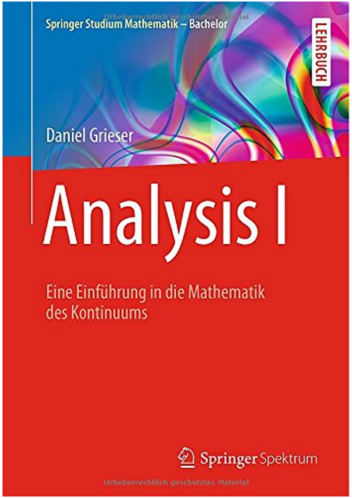
Prüfungszulassung/Vorleistung/Tests/ACAT

- Online-Testsystem ACAT
- Informationen zu Zugang etc. erfolgt in separater E-Mail
- Es gibt insgesamt sechs ACAT-Tests im Semester, die bewertet werden.
- Ein Test besteht aus individuellen Aufgaben, die innerhalb einer Woche zu lösen sind.
- Für die Zulassung zur Prüfung müssen als Vorleistung 50% der insgesamt möglichen Punkte erreicht werden.
- Ausgenommen: Studenten, die die Zulassung schon in den Sommersemestern 2015 bis 2022 erlangt haben oder bis WS 2014/15 an einer Analysis-Prüfung teilgenommen haben.
- Wer einmal die Zulassung geschafft hat, muss sie in späteren Jahren nicht wiederholen.

Prüfung

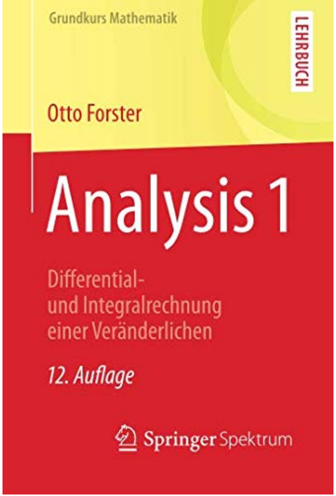
- Klausur, 120 Minuten
- Inhalte: alles aus Vorlesung und Übung
- Hilfsmittel: keine
- 6 Credits
- Termin: siehe Prüfungsplan (i. d. R. im zweiten Prüfungszweitraum)
- Zulassung nur mit erbrachter Vorleistung

Literatur



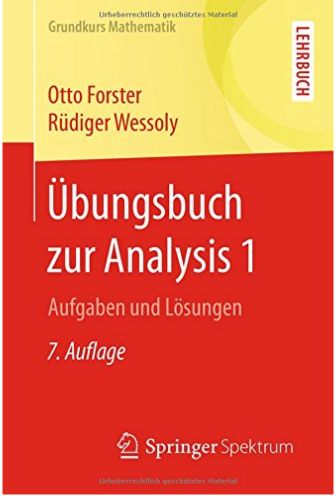
Daniel Grieser
Analysis 1
Springer Spektrum, 2015

- aktuell mein persönlicher Favorit
- exakt, didaktisch sehr gut aufgebaut
- Vorlesung folgt diesem Buch
- als PDF in der Bibliothek



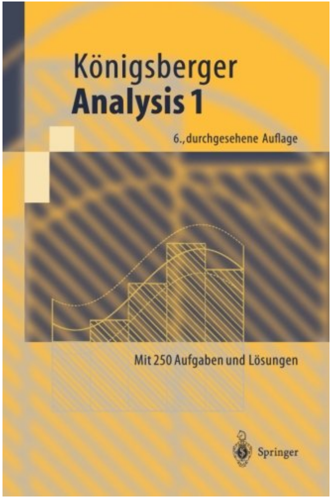
Otto Forster
Analysis 1
Springer Spektrum, 2016

- Klassiker
- auch für Informatiker und Physiker geeignet
- ziemlich trocken
- als PDF in der Bibliothek



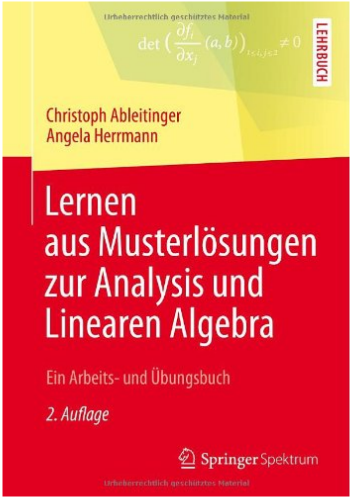
Otto Forster, Rüdiger Wessoly
Übungsbuch zur Analysis 1
Springer Spektrum, 2017

- anspruchsvolle Übungen
- als PDF in der Bibliothek



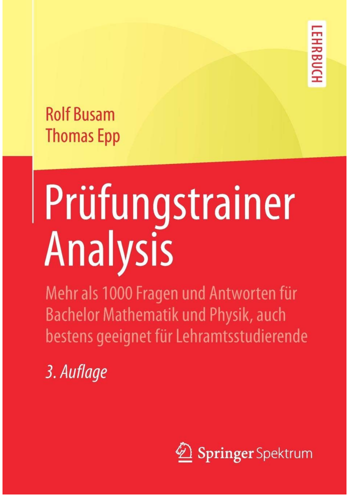
Konrad Königsberger
Analysis 1
Springer, 2004

- weiterer Klassiker
- hohes Niveau
- exakt, didaktisch sehr gut aufgebaut
- ausleihbar in der Bibliothek



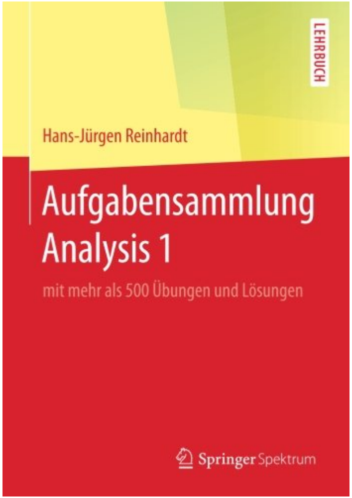
Christoph Ableitinger, Angela Herrmann
Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra
Springer Spektrum, 2013

- Übungsaufgaben und wie man an solche Aufgaben herangeht
- systematisches Vorgehen beim Lösen von Aufgaben
- ausführliche, kleinschrittige Lösungsbeschreibungen
- als PDF in der Bibliothek



Rolf Busam, Thomas Epp
Prüfungstrainer Analysis
Springer Spektrum, 2018

- Fragen sind eher Verständnisfragen und auf eine mündliche Prüfung ausgelegt.
- ideal zur Nachbereitung und Wiederholung
- als PDF in der Bibliothek



Hans-Jürgen Reinhardt
Aufgabensammlung Analysis 1
Springer Spektrum, 2016

- Übungs- und Klausuraufgaben
- zur Klausurvorbereitung
- als PDF in der Bibliothek

Kapitel 1

Zahlen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Inhalt

1 Zahlen

- Körper
- Die reellen Zahlen als angeordneter Körper
- Vollständigkeit der reellen Zahlen
- Die komplexen Zahlen als Vektoren

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Aus "Einführung in Diskrete Mathematik und Lineare Algebra" sind uns bekannt:

- die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\},$$

- die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Körper

Definition 1.1

Ein Körper ist ein Tripel $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $\mathcal{K}$ und zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften (Körperaxiomen):

(K1) $(\mathcal{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element $0_\mathcal{K}$).

(K2) $(\mathcal{K} \setminus \{0_\mathcal{K}\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element $1_\mathcal{K}$).

(K3) Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Bezeichnungen in einem Körper

Wir nutzen die üblichen Bezeichnungen: Für $a \in \mathcal{K}$ ist

- $-a$ das additiv Inverse von a und
- a^{-1} das multiplikativ Inverse von a.

Weiterhin definieren wir für $a, b \in \mathcal{K}$ die Differenz

$$a - b := a + (-b)$$

und den Quotienten

$$\frac{a}{b} = a/b := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a \text{ für } b \neq 0_{\mathcal{K}}.$$

Rechenregeln für Körper

Wir wissen, dass in jedem Körper $\mathcal{K}$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{array}{ll} -(-a) = a, & (-a) + (-b) = -(a+b), \\ (a^{-1})^{-1} = a, & a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1} \text{ für } a, b \neq 0_{\mathcal{K}}, \\ a \cdot 0_{\mathcal{K}} = 0_{\mathcal{K}}, & a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, & a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c. \end{array}$$

Jeder Körper ist nullteilerfrei:

$$a \cdot b = 0_{\mathcal{K}} \Rightarrow a = 0_{\mathcal{K}} \vee b = 0_{\mathcal{K}}.$$

Regeln für das Bruchrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d} \quad \text{für } c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad \text{für } c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \\ \frac{a/c}{b/d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{für } b, c, d \neq 0_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Charakterisierung der reellen Zahlen

In der Mathematik fragt man nicht: “Was sind Zahlen?”, sondern: “Wie operiert man mit Zahlen?”.

Ein Axiom ist eine Aussage, die als wahr angenommen wird.

Wir werden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch drei Gruppen von Axiomen charakterisieren:

- die Körperaxiome,
- die Anordnungsaxiome und
- das Vollständigkeitsaxiom.

Körper- und Anordnungsaxiome gelten auch für die rationalen Zahlen, das Vollständigkeitsaxiom aber nicht.

Körper der reellen Zahlen

Wir wollen mit reellen Zahlen mittels der üblichen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) rechnen können.

Daher fordern wir:

Axiom 1

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Wie üblich ist 0 das neutrale Element der Addition und 1 das der Multiplikation.

Ordnungsrelation

Wir wollen reelle Zahlen untereinander "anordnen" können. Hierfür definieren wir, welche Regeln für solch eine Anordnung gelten sollen.

Definition 1.2

Es sei $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein Körper.

Eine Relation $\leq$ auf $\mathcal{K}$, die für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt, heißt Ordnungsrelation.

(A1) $a \leq b \vee b \leq a$ (Vergleichbarkeit, Reflexivität und Totalität)

(A2) $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$ (Identitätseigenschaft, Antisymmetrie)

(A3) $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität)

(A4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (Monotonie bzgl. $+$)

(A5) $(0_{\mathcal{K}} \leq a \wedge 0_{\mathcal{K}} \leq b) \Rightarrow 0_{\mathcal{K}} \leq a \cdot b$ (Monotonie bzgl. $\cdot$)

$a \in \mathcal{K}, a \neq 0_{\mathcal{K}}$ heißt positiv, wenn $0_{\mathcal{K}} \leq a$ gilt, und negativ, wenn $a \leq 0_{\mathcal{K}}$ gilt.

Ordnungsbezeichungen

Weiterhin definieren wir die üblichen Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
a \geq b \quad &:\Leftrightarrow \quad b \leq a \\
a < b \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge a \neq b \\
a > b \quad &:\Leftrightarrow \quad b < a \\
a \leq b \leq c \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge b \leq c \\
a \leq b < c \quad &:\Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge b < c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Angeordneter Körper

Definition 1.3

Wir sagen, dass ein Körper $\mathcal{K}$ angeordnet werden kann, wenn auf $\mathcal{K}$ eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert werden kann.

Das Tupel $(\mathcal{K}, \leq)$ heißt dann angeordneter Körper.

Axiom 2

Der Körper $\mathbb{R}$ kann angeordnet werden.

Regeln für angeordnete Körper

Lemma 1.4

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) *Genau eine der drei Aussagen* $a = b$, $a < b$, $a > b$ *ist wahr.*

(ii) $(a \leq b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

(iii) $(0 < a \wedge 0 < b) \Rightarrow 0 < a \cdot b$

(iv) $(a \leq b \wedge c \geq 0) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

(v) $(a \leq b \wedge c \leq 0) \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Beweis.

(i) Wir müssen zeigen, dass mindestens eine der drei Aussagen gilt und dass höchstens eine der drei Aussgagen gilt.

Mindestens: Für den Fall $a = b$ ist eine Aussage erfült. Sei also $a \neq b$. Nach (A1) gilt $a \leq b \vee b \leq a$. Wegen $a \neq b$ folgt $a < b \vee b < a$.

Höchstens: $a = b$ schließt nach Definition $a < b$ und $a > b$ aus. Sei also $a \neq b$. Ann.: $a < b \wedge a > b$ ist wahr. Mit (A2) folgt daraus aber $a = b$. Widerspruch!

(ii) Aus (A3) folgt $a \leq c$. Ann.: $a = c$. Wegen $b < c$ gilt dann auch $b < a$. Wegen (i) ist dies ein Widerspruch zu $a \leq b$. Also gilt $a < c$.

(iii) Aus (A5) folgt $0 \leq a \cdot b$. Wegen (i) gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Damit folgt $a \cdot b \neq 0$, weil $\mathbb{R}$ als Körper nullteilerfrei ist. Also gilt $0 < a \cdot b$.

Fortsetzung Beweis.

(iv)

$$
\begin{aligned}
a \leq b &\overset{A4}{\Rightarrow} a + (-a) \leq b + (-a) \\
&\Rightarrow 0 \leq b - a \\
&\overset{A5}{\Rightarrow} 0 \leq (b - a) \cdot c \\
&\Rightarrow 0 \leq b \cdot c - a \cdot c \\
&\overset{A4}{\Rightarrow} a \cdot c \leq b \cdot c
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beweis.

(v)

$$\begin{aligned} & c \leq 0 \\ \stackrel{A4}{\Rightarrow} \quad & 0 = c + (-c) \leq (-c) \end{aligned}$$

Mit (iv) folgt

$$\begin{aligned} & a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \\ \stackrel{A4}{\Rightarrow} \quad & a \cdot (-c) + b \cdot c \leq 0 \\ \stackrel{A4}{\Rightarrow} \quad & b \cdot c \leq a \cdot c \end{aligned}$$

Vorzeichenregeln

Lemma 1.5

Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

(ii) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$

(iii) $a \cdot a \geq 0$

(iv) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

(v) $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

Beweis.

(i)

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq a \\
\overset{A4}{\Rightarrow} \quad & 0 + (-a) \leq a + (-a) \\
\Rightarrow \quad & -a \leq 0
\end{aligned}
$$

(ii) Aus $a \neq 0$ folgt $a \cdot a \neq 0$, weil $\mathbb{R}$ als Körper nullteilerfrei ist.

$$a \geq 0 \overset{A5}{\Rightarrow} a \cdot a \geq 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot a > 0$$

$$a \leq 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} (-a) \geq 0 \overset{A5}{\Rightarrow} (-a) \cdot (-a) \geq 0 \Rightarrow a \cdot a \geq 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot a > 0$$

Fortsetzung Beweis.

(iii)

$$\left.\begin{array}{lcl} a = 0 & \Rightarrow & a \cdot a = 0 \\ a \neq 0 & \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} & a \cdot a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot a \geq 0$$

(iv) $a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0.$

$$\begin{array}{rl} \text{Wegen (ii) gilt dann} & a^{-1} \cdot a^{-1} > 0 \\ \Rightarrow & a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} > a \cdot 0 \\ \Rightarrow & a^{-1} > 0 \end{array}$$

(v) analog zu (iv)

Bemerkungen zur Anordnung

- Auch wenn wir Lemma 1.4 und Lemma 1.5 nur für $\mathbb{R}$ formuliert haben, gelten die Aussagen in jedem angeordneten Körper.
- $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ bezeichnet die positiven reellen Zahlen.
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ bezeichnet die nichtnegativen reellen Zahlen.

Unendlichkeit von $\mathbb{R}$

Satz 1.6

$\mathbb{R}$ *hat unendlich viele Elemente.*

Beweis.

Nach Lemma 1.5 gilt $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$ und somit $1 > 0$.

Mit (A4) erhalten wir $1 + 1 > 1$ und daraus wieder mit (A4) $1 + 1 + 1 > 1 + 1$.

Diesen Prozess können wir beliebig oft wiederholen. $\square$

- Die Argumentation im Beweis können wir auf jeden angeordneten Körper anwenden.
- Konsequenz: Endliche Körper wie bspw. die Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ können nicht angeordnet werden.

Monotonie der Quadratfunktion

Lemma 1.7

Für $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $a \geq 0$ *gilt*

$$a < b \Rightarrow a \cdot a < b \cdot b.$$

Beweis.

1. Fall: $a = 0$.

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow b > 0 \\ &\overset{\text{Lemma 1.5 (ii)}}{\Rightarrow} b \cdot b > 0 = a \cdot a \end{aligned}$$

2. Fall: $a > 0$.

$$a < b \overset{\text{Lemma 1.4 (iv)}}{\Rightarrow} a \cdot a \leq a \cdot b$$

Fortsetzung Beweis.

Mit Lemma 1.4 (ii) folgt aus $0 < a$ und $a < b$ auch $b > 0$ und somit

$$a < b \overset{\text{Lemma 1.4 (iv)}}{\Rightarrow} a \cdot b \leq b \cdot b.$$

Wegen (A3) folgt insgesamt $a \cdot a \leq b \cdot b$.

Ann.: $a \cdot a = b \cdot b$. Dann müsste auch

$$a \cdot a = a \cdot b$$

gelten und damit

$$0 = a \cdot (b - a).$$

Aus der Nullteilerfreiheit folgt dann $a = 0 \vee b = a$. Widerspruch!

Potenzen

Definition 1.8

Für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ defininieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \\ a^{n+1} &:= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Weiterhin sei für $n \in \mathbb{N}$

$$a^{-n} := (a^n)^{-1}\,.$$

a^{-n} bezeichnet also das Inverse von a^n bzgl. der Multiplikation.

Damit können wir z. B. kurz a^2 für $a \cdot a$ schreiben.

Die Aussage von Lemma 1.7 lautet damit

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Fakultät

Definition 1.9

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt das Produkt

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Fakultät von n. Wir setzen $0! = 1$.

Beispiel 1.10

$$\begin{aligned} 5! &= 120 \\ 10! &= 3628800 \\ 20! &= 2432902008176640000 \\ 30! &= 265252859812191058636308480000000 \approx 2.65 \cdot 10^{32} \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

Definition 1.11

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der Ausdruck

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient von n über k.

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Satz 1.12

Es gilt:

(i)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis.

✎ Tafel, Übungsaufgabe.

Binomische Formel

Satz 1.13

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Lemma 1.14

Für alle $q \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Beweis zu Satz 1.13 ist Übungsaufgabe, Beweis zu Lemma 1.14: Tafel ✎.

Bernoullische Ungleichung

Satz 1.15

Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion.

$n = 0$: $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

$n \to n + 1$:

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \\
&\geq (1 + n \cdot x)(1 + x) \\
&= 1 + n \cdot x + x + n \cdot x \cdot x \\
&= 1 + (n + 1) \cdot x + n \cdot x^2 \\
&\geq 1 + (n + 1) \cdot x
\end{aligned}
$$

□

An welcher Stelle benötigen wir im Beweis die Voraussetzung $x \geq -1$?

Betrag

Definition 1.16

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ heißt der Betrag von a.

Rechenregeln für den Betrag

Satz 1.17

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ *(Homogenität)*

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis.

(i) und (ii): Fallunterscheidungen, Tafel ✎

Fortsetzung Beweis.

Vorbemerkung: Offensichtlich gilt:

- $|a| \geq a$ und $|a| \geq -a$
- $|a| = |-a|$

(iii) Aus der Vorbemerkung folgt sowohl

$$|a| + |b| \geq a + b$$

als auch

$$|a| + |b| \geq (-a) + (-b) = -(a + b).$$

Da $|a + b|$ entweder $a + b$ oder $-(a + b)$ ist, folgt die Aussage.

Normierter Körper

Definition 1.18

Ein Körper $\mathcal{K}$, auf dem eine Abbildung

$$\begin{array}{rcrcl} |\cdot| & : & \mathcal{K} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

definiert ist, so dass die Eigenschaften aus Satz 1.17 erfüllt sind, heißt normierter Körper und die Abbildung $|\cdot|$ wird Norm genannt.

- Nach Satz 1.17 ist jeder angeordnete Körper auch ein normierter Körper.
- Die Umkehrung gilt nicht. Ein Beispiel hierfür ist der Körper der komplexen Zahlen, den wir im übernächsten Abschnitt kennenlernen.

Umgekehrte Dreiecksungleichung

Satz 1.19

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Beweis.

- Aus der Dreiecksungleichung folgt $|a + b| - |b| \leq |a|$.
  Einsetzen von $a = x + y, b = -y$ gibt $|x| - |y| \leq |x + y|$.
- Setzt man stattdessen $b = -x$ ein, so erhalten wir $|y| - |x| \leq |x + y|$ und somit insgesamt

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

- Ersetzen wir nun y durch $-y$, dann erhalten wir auch noch

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

$\sqrt{2}$ ist irrational

Satz 1.20

Es gibt keine rationale Zahl x, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.

Beweis.

Annahme: Es existiert $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wegen $x \in \mathbb{Q}$ folgt $x = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p und q.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \\
\Rightarrow \quad & p^2 = 2q^2 \\
\Rightarrow \quad & 2 | p^2 \\
\Rightarrow \quad & 2 | p \\
\Rightarrow \quad & p = 2r
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beweis.

Wir setzen $p = 2r$ in die Gleichung $p^2 = 2q^2$ ein.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 4r^2 = 2q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2r^2 = q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|q^2 \\
&\Rightarrow \quad 2|q
\end{aligned}$$

Also folgt, dass 2 sowohl Teiler von p als auch von q ist. Widerspruch zu p und q sind teilerfremd!

Supremum und Infimum

Definition 1.21

Es sei $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper und $A \subseteq \mathcal{K}$.

- A heißt **nach oben (unten) beschränkt**, wenn ein $S \in \mathcal{K}$ (bzw. $s \in \mathcal{K}$) existiert mit $x \leq S$ (bzw. $x \geq s$) für alle $x \in A$.
  S (bzw. s) heißt dann **obere (bzw. untere) Schranke von A**.
- $S \in \mathcal{K}$ heißt **Supremum von A**, falls gilt:
  - S ist obere Schranke von A.
  - Für jede obere Schranke S' von A gilt $S \leq S'$.

  Wir schreiben **$\sup(A)$** für das Supremum von A.
- $s \in \mathcal{K}$ heißt **Infimum von A** falls gilt:
  - s ist untere Schranke von A.
  - Für jede untere Schranke s' von A gilt $s' \leq s$.

  Wir schreiben **$\inf(A)$** für das Infimum von A.

Fortsetzung Definition.

- Gilt $\sup(A) \in A$, dann nennen wir $\sup(A)$ auch das Maximum von A und schreiben $\max(A)$ für $\sup(A)$.
- Gilt $\inf(A) \in A$, dann nennen wir $\inf(A)$ auch das Minimum von A und schreiben $\min(A)$ für $\inf(A)$.

Beispiel 1.22

Für

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sup(A) &= 1, \\ \max(A) &: \text{existiert nicht}, \\ \inf(A) &= 0, \\ \min(A) &= 0. \end{aligned}$$

Alternative Charakterisierung für Supremum

Lemma 1.23

Es sei $\mathcal{K}$ ein angeordneter Körper und $A \subseteq \mathcal{K}$ eine Teilmenge von $\mathcal{K}$.

$S \in \mathcal{K}$ ist genau dann das Supremum von A, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

(i) *Für alle $x \in A$ gilt $x \leq S$.*

(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in A$ mit $S - \epsilon < x \leq S$.*

Beweis.

$\Rightarrow$: Es sei S das Supremum von A.

- Nach Definition von Supremum ist S auch eine obere Schranke von A.
- Damit gilt (i), denn (i) entspricht genau der Definition einer oberen Schranke von A.

Fortsetzung Beweis.

Ann.: (ii) gilt nicht. D.h.

$$\exists \epsilon > 0 \, \forall x \in A : S - \epsilon \geq x$$

Damit wäre $S - \epsilon$ auch eine obere Schranke von A. Wegen $S - \epsilon < S$ ist dies ein Widerspruch zur Definition von Supremum.

$\Leftarrow$: Für S gelte (i) und (ii). Da (i) der Definition für obere Schranke von A entspricht ist die erste Supremumseigenschaft erfüllt.

Es sei S' eine beliebige obere Schranke von A. Ann.: $S > S'$.

- Dann folgt $\epsilon := S - S' > 0$.
- N.V. existiert ein $x \in A$ mit $x > S'$.
- Damit ist S' keine obere Schranke. Widerspruch.
- Also: $S \leq S'$.

Anwendung von Lemma 1.23

Beispiel 1.24

Wir zeigen formal

$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{4n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = 1,$$

in dem wir zeigen

- 1 ist eine obere Schranke der Menge und
- für alle $\epsilon > 0$ ist $1 - \epsilon$ keine obere Schranke.

Tafel ✎.

$\mathbb{R}$ als vollständiger Körper

Definition 1.25

Ein angeordneter Körper $\mathcal{K}$ heißt vollständig, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathcal{K}$ ein Supremum hat.

Aus Satz 1.20 und Lemma 1.23 folgt, dass die Teilmenge

$$A := \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$$

der rationalen Zahlen nichtleer und nach oben beschränkt ist, aber in $\mathbb{Q}$ kein Supremum hat. Also ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Axiom 3

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist vollständig.

Archimedisches Prinzip

Satz 1.26

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist damit nicht nach oben beschränkt.

Beweis.

Ann.: $\mathbb{N}$ sei eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Nach Axiom 3 existiert dann das Supremum $S := \sup(\mathbb{N})$. Damit ist $S - 1$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Es muss also eine natürliche Zahl n existieren mit $n > S - 1$. Dann ist aber $n + 1 \in \mathbb{N}$ und es gilt $n + 1 > S$. Widerspruch!

Wachstum von Potenzen

Satz 1.27

Es sei b eine reelle Zahl.

(i) *Ist $b > 1$, so existiert für alle $M \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$b^n > M$$

gilt.

(ii) *Ist $0 < b < 1$, so existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$b^n < \epsilon$$

gilt.

Beweis.

(i) Wir setzen $x := b - 1$. Damit gilt $x > 0$ und wir können die Bernoullische Ungleichung anwenden.

$$b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{M-1}{x}$. Hieraus folgt $b^n > M$.

(ii) Vorüberlegungen:

- Aus $b > 0$ folgt mit Lemma 1.5 (iv) auch $b^{-1} > 0$.
- Aus $0 < b < 1$ folgt $b^{-1} > 1$. ✎
- Es gilt $\left(b^{-1}\right)^n = (b^n)^{-1}$. ✎

Sei also $0 < b < 1$. Dann ist $b^{-1} > 1$. Nach (i) existiert zu $M = \epsilon^{-1}$ ein n, so dass gilt

$$(b^n)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^n > \epsilon^{-1}.$$

Hieraus folgt durch Invertieren die Behauptung.

Eindeutigkeit von $\sqrt{2}$

Lemma 1.28

Es existiert genau eine reelle Zahl $b > 0$ mit $b^2 = 2$.

Beweis.

Eindeutigkeit: Es seien b_1, b_2 reelle Zahlen mit $b_1^2 = b_2^2 = 2$. Dann folgt

$$0 = b_1^2 - b_2^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2).$$

Es gilt also entweder $b_1 = b_2$ oder $b_1 = -b_2$. Mit Lemma 1.5 (i) folgt, dass es nur eine positive Lösung geben kann.

Existenz: Wegen Axiom 3 existiert das Supremum der Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leq 2\}.$$

Es sei $b := \sup(A)$. Wir zeigen jetzt $b^2 = 2$.

Fortsetzung Beweis.

Ann.: $b^2 < 2$.

Dann folgt $2 - b^2 > 0$. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{2b+1}{2-b^2} < n.$$

Es gilt

$$\frac{2b+1}{2-b^2} < n \Rightarrow b^2 + \frac{2b+1}{n} < 2.$$

Wegen $n \geq 1$ und $\frac{1}{n} \leq 1$ erhalten wir

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n} < 2.$$

Daraus folgt $b + \frac{1}{n} \in A$ und $b + \frac{1}{n} > b = \sup(A)$. Widerspruch!

Fortsetzung Beweis.

Ann.: $b^2 > 2$.

Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\max\left\{\frac{1}{b}, \frac{2b}{b^2-2}\right\} < n.$$

Hieraus folgt

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} > 2.$$

Damit wäre $b - \frac{1}{n} < b$ eine obere Schranke von A. Widerspruch!

Also folgt mit Lemma 1.4 (i): $b^2 = 2$.

Eindeutigkeit k-ter Wurzeln

Lemma 1.29

Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert genau eine reelle Zahl $b > 0$ mit $b^k = a$.

Quadratwurzeln und k-te Wurzeln

Definition 1.30

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}$.

Die nach Lemma 1.29 eindeutig bestimmte positive reelle Zahl b mit der Eigenschaft $b^k = a$ heißt k-te Wurzel von a und wir schreiben $\sqrt[k]{a}$ für b.

Für $k = 2$ nennen wir b auch die (Quadrat-)Wurzel von a und schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 1.31

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$. Dann setzen wir

$$a^r := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p .$$

Potenzregeln

Lemma 1.32

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

(i) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(ii) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(iii) $a^r b^r = (ab)^r$,

(iv) $a \neq 0 \to \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r} = a^{-r}$.

Hier ohne Beweis, da wir die Definition der Potenzen später auf reelle Exponenten erweitern werden.

Körper der komplexen Zahlen

Aus dem 1. Semester kennen Sie den Körper der komplexen Zahlen.

- $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b | a, b \in \mathbb{R}\}$
- Die Zahl i heißt imaginäre Einheit.
- Sei $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$.
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$
  - $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

$\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper

Satz 1.33

Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *kann nicht angeordnet werden.*

Beweis.

In einem angeordneten Körper $\mathcal{K}$ gilt nach Lemma 1.5 $z^2 \geq 0_{\mathcal{K}}$ für alle $z \in \mathcal{K}$.

Unabhängig von einer Anordnung gilt in $\mathbb{C}$ aber stets $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.

Inverse Elemente

Es sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
-z &= (-a) + \mathrm{i}(-b) = -a - \mathrm{i}b \\
z^{-1} &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2}\,(a - \mathrm{i}b)\,.
\end{aligned}
$$

Die konjugiert komplexe Zahl

Definition 1.34

Für eine komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ heißt

- $\mathrm{Re}(z) := a$ der Realteil von z,
- $\mathrm{Im}(z) := b$ der Imaginärteil von z,
- $\overline{z} := a - \mathrm{i}b$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Lemma 1.35

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Für $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2a \in \mathbb{R}, \\ z\overline{z} &= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der Betrag komplexer Zahlen

Definition 1.36

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den Betrag $|z|$ durch

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Lemma 1.37

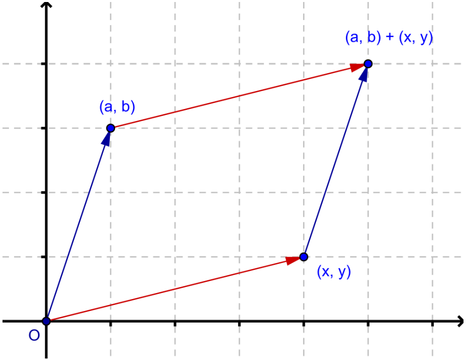
$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \text{für } z \neq 0, \\ |z| &= |\overline{z}|, \\ |z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}}. \end{aligned}$$

Satz 1.38

$\mathbb{C}$ bildet mit dem Betrag $|\cdot|$ als Norm einen normierten Körper.

Komplexe Zahlen als Vektoren

Durch die Bijektivität zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ können wir komplexe Zahlen als Vektoren bzw. Punkte der Ebene darstellen.

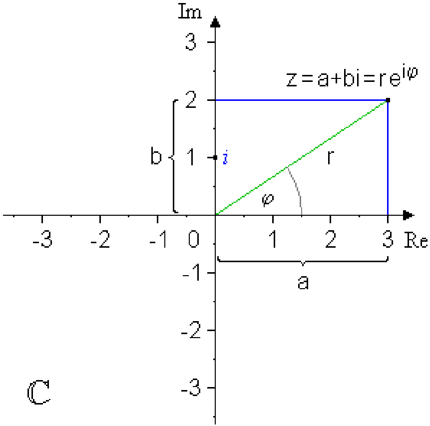


$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & a + \mathrm{i}b \\ z_2 & = & x + \mathrm{i}y \\ \Rightarrow z_1 + z_2 & = & (a + x) + \mathrm{i}(b + y) \end{array}$$

Die Ebene der komplexen Zahlen wird auch komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene genannt.

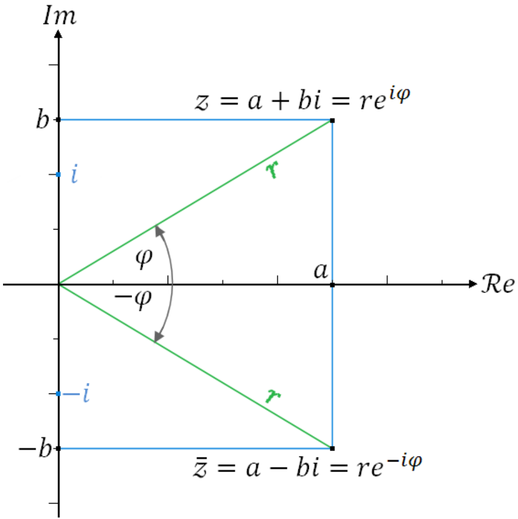
Polarkoordinaten

Punkte in der Ebene können wir auch durch Polarkoordinaten beschreiben, d.h. durch die Länge $r \geq 0$ eines Ortsvektors und seinen Winkel φ mit der x-Achse.



$$
\begin{aligned}
z &= a + \mathrm{i}b \\
r &= |z| \in \mathbb{R} \\
\varphi &= \arg(z) \\
\Rightarrow z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\
&= r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}
\end{aligned}
$$

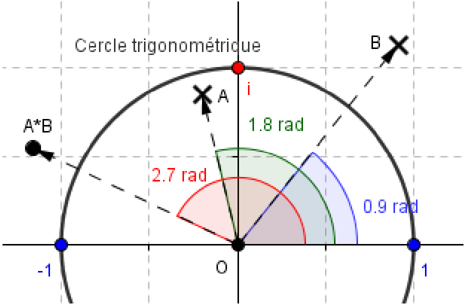
Komplexe Konjugation



$$
\begin{aligned}
z &= a + \mathrm{i}b \\
&= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\
\Rightarrow \bar{z} &= a - \mathrm{i}b \\
&= r \cdot (\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))
\end{aligned}
$$

Multiplikation komplexer Zahlen

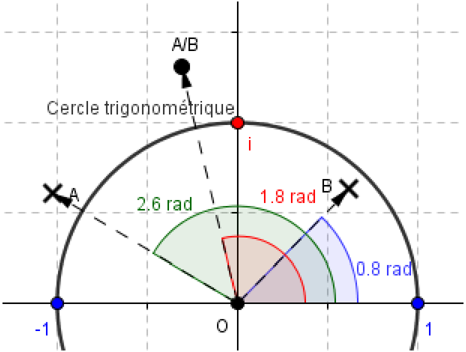
Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 entspricht dem Addieren der Winkel und dem Multiplizieren der Beträge.



$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\
z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
\Rightarrow z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \\
&\qquad \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Division komplexer Zahlen

Die Division zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 entspricht der Differenz der Winkel und der Division der Beträge.



$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\
z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\
&\qquad \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Potenzieren komplexer Zahlen

Aus der n-fachen Anwendung der Multiplikation ergibt sich

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ \Rightarrow z^n &= r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)). \end{aligned}$$

Beispiel 1.39

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \mathrm{i}^{2015} &= \cos(2015\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(2015\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi \\ &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wurzeln komplexer Zahlen

Aus Multiplikation und Division erschließt sich leicht, wie man Wurzeln in $\mathbb{C}$ zieht.

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ \Rightarrow \sqrt{z} &= \sqrt{r} \cdot (\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}) \end{aligned}$$

Beispiel 1.40

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{\mathrm{i}} &= \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Probe:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 \\ &= \frac{1}{2}((1\cdot 1 - 1\cdot 1) + \mathrm{i}(1\cdot 1 + 1\cdot 1)) \\ &= \frac{1}{2}(0+\mathrm{i}2) \\ &= \mathrm{i}\end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen $(-z)^2 = z^2$ ist auch

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$$

eine Wurzel von i.

k-te Wurzeln komplexer Zahlen

Satz 1.41

Es sei $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$*. Dann gilt für die komplexen Zahlen*

$$z_j = \sqrt[k]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k} \right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k} \right) \right), \quad j = 0 \ldots, k-1$$

die Gleichung $z_j^k = z$*.*

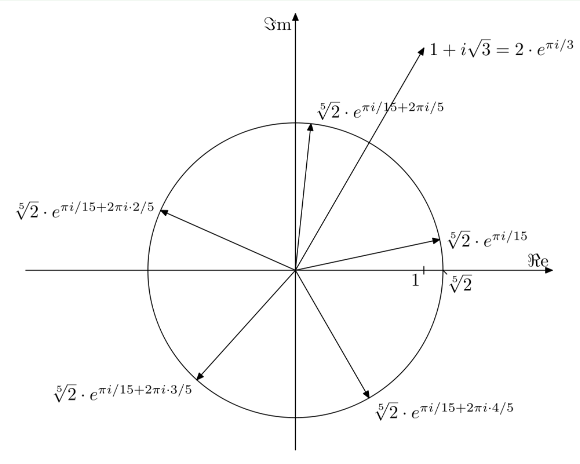
Definition 1.42

Die komplexen Zahlen z_j aus Satz 1.41 sind die k-ten Wurzeln von z.

Die k-ten Wurzeln von $z = 1$ heißen k-te Einheitswurzeln.

Beispiel 1.43

Die fünften Wurzeln von $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.



Fundamentalsatz der Algebra

Satz 1.44

Jede Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

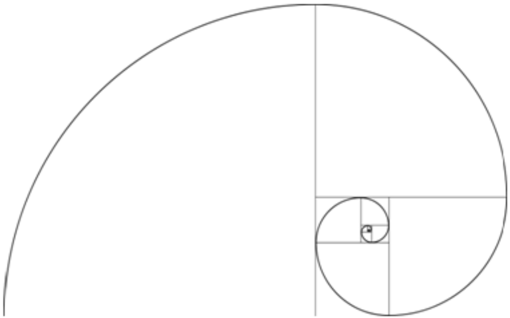
mit $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ *besitzt eine Lösung in* $\mathbb{C}$.

Zusammenfassung

- $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter, vollständiger, normierter Körper.
- $\mathbb{C}$ ist ein normierter Körper, aber kein angeordneter Körper.
- $\mathbb{C}$ ist tatsächlich auch vollständig.
- Um die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ zu begründen, bräuchten wir aber einen etwas anders definierten Vollständigkeitsbegriff, der auf sogenannten Cauchy-Folgen basiert (siehe nächstes Kapitel).
- Im Folgenden können wir alle Aussagen, die nur auf der Vollständigkeit oder Normiertheit eines Körpers beruhen, sowohl auf $\mathbb{R}$ als auch auf $\mathbb{C}$ anwenden.

Kapitel 2

Folgen



Inhalt

2 Folgen

- Definition
- Konvergenz
- Konvergenzkriterien
- Konvergenz in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}^d$

Motivation

Von Intelligenztests kennen wir die Aufgabe, eine Abfolge von Zahlen fortzusetzen:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$
$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$$
$$1, 5, 7, 17, 31, 65, \ldots$$
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$
$$1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \ldots$$

Solch eine Regelmäßigkeit in der Abfolge der Zahlen drücken wir in der Mathematik durch eine Funktion aus.

Folge

Definition 2.1

Es sei M eine Menge. Eine Folge oder Zahlenfolge in M ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} a: & \mathbb{N} & \to & M \\ & n & \mapsto & a(n). \end{array}$$

Statt $a(n)$ schreiben wir i. d. R. a_n und für diese Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ oder auch nur (a_n).

Das Element a_n heißt n-tes Folgenglied der Folge (a_n).

Für $M = \mathbb{R}$ sprechen wir von einer reellen Folge, für $M = \mathbb{C}$ von einer komplexen Folge.

Beispiele für Folgen

Beispiel 2.2

Die Folgen von Folie 95:

$$
\begin{aligned}
a_n &= n^2 \\
b_n &= n\text{-te Primzahl} \\
c_n &= (-1)^{n+1} n \\
d_n &= 2^n + (-1)^n \\
e_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
f_n &= \mathrm{i}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Rekursiv definierte Folgen

Folgen müssen nicht — wie die vorangegangenen Beispiele — explizit definiert sein, sondern können auch rekursiv definiert werden.

Definition 2.3 (Fibonacci-Folge)

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \geq 0}$ ist wie folgt definiert:

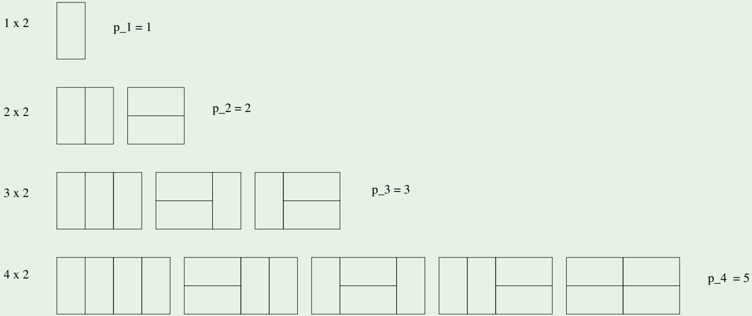
$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Typisches Problem bei der Analyse von Algorithmen:

- Ermittle eine explizite Formel für die Folgenglieder einer rekursiv definierten Folge.
- Für die Fibonacci-Folge leistet dies die Formel von Moivre-Binet.

Beispiel 2.4

Wie viele Parkettierungen p_n mit Kacheln der Größe 1×2 bzw. 2×1 gibt es für ein Feld der Größe $n \times 2$?



Also gilt

$$p_1 = 1, p_2 = 2, p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ für } n \geq 3$$

und somit $p_n = F_{n+1}$.

Formel von Moivre-Binet

Satz 2.5

Für die Fibonacci-Folge (F_n) gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion. $\square$

- Der Beweis für die Korrektheit einer expliziten Formel ist i. d. R. viel einfacher als die Herleitung solch einer expliziten Formel.
- Im Verlauf der Vorlesung lernen Sie auch erste Ansätze zur Herleitung solch expliziter Formeln.

Grenzwert einer Folge

Definition 2.6

Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jeder (noch so kleinen) reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

- Im Folgenden bezeichne ϵ stets eine positive reelle Zahl und n eine natürliche Zahl.
- In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung aus Definition 2.6:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Beispiele für Grenzwerte von Folgen

Beispiel 2.7

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0.

   Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (nach Archimedischem Prinzip möglich). Damit folgt für alle $n \geq n_0$:
   $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

2. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := 1 - \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 1.
   Wegen
   $$|b_n - 1| = |1 - \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$$
   verläuft der Beweis analog zur Folge (a_n).

Fortsetzung Beispiel.

3. Die Folge (c_n) mit $c_n := q^n$ hat für alle $0 < q < 1$ den Grenzwert 0. Dies folgt direkt aus Satz 1.27 (ii).
4. Die Folge (d_n) mit $d_n := \sqrt[n]{K}$ hat für alle $K \geq 1$ den Grenzwert 1.
   Beweis: Für $x_n := \sqrt[n]{K} - 1$ ergibt die Bernoullische Ungleichung

$$K = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n.$$

Damit folgt $x_n < \frac{K}{n}$ und es gilt

$$\left|\sqrt[n]{K} - 1\right| = x_n < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 > \frac{K}{\epsilon}.$$

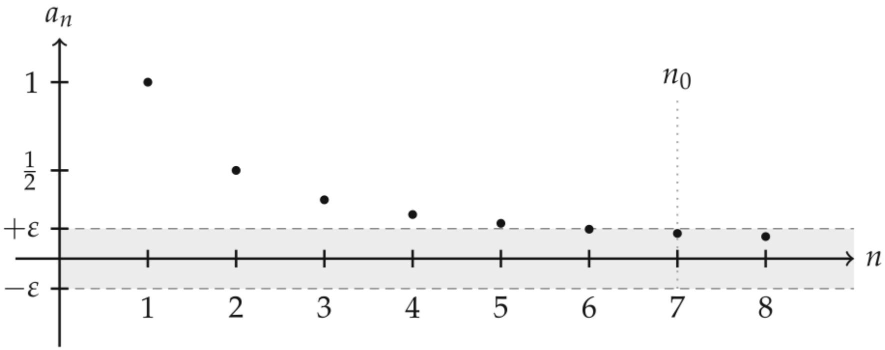
Mathe $\longleftrightarrow$ Deutsch

$\forall \epsilon > 0$	Für jeden noch so schmalen Streifen
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	gibt es einen Index n_0,
$\forall n \geq n_0$	so dass ab diesem Index n_0 alle Folgenglieder
$\lvert a_n - a \rvert < \epsilon$	in diesem Streifen um a herum liegen.

- Wie hängt typischerweise n_0 von ϵ ab?
- Genauer: Was passiert mit n_0, wenn ϵ kleiner wird?

Veranschaulichung der Grenzwertdefinition

$a_n = \frac{1}{n}$



Negation der Grenzwertdefintion (1)

Aus den mathematischen Grundlagen kennen Sie (strenge) prädikatenlogische Formeln der Form

$$\forall x\, A(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x\, A(x).$$

Die Formel

$$\forall x > 0 : A(x)$$

entspricht eigentlich nicht der strengen Syntax der Prädikatenlogik. Sie ist eine Kurzform für

$$\forall x\, (x > 0 \rightarrow A(x)).$$

Wie lautet die Negation dieser Formel?

Negation der Grenzwertdefintion (2)

Negation:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall x\,(x > 0 \to A(x))) \\
\equiv\quad & \exists x\,\neg(x > 0 \to A(x)) \\
\equiv\quad & \exists x\,\neg(\neg(x > 0) \vee A(x)) \\
\equiv\quad & \exists x\,(x > 0 \wedge \neg A(x)) \\
\equiv\quad & \exists x > 0 : \neg A(x)
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Charakterisierung für "a ist nicht Grenzwert der Folge (a_n)":

$$\exists \epsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon$$

Konvergenz

Definition 2.8

Die reelle Folge (a_n) heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Wenn (a_n) nicht konvergent ist, dann heißt (a_n) divergent.

- In Quantorenschreibweise lautet konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

- und dementsprechend divergent

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \epsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon.$$

Beispiele für divergente Folgen

Beispiel 2.9

1. Die Folge (a_n) mit $a_n = q^n$ ist für alle $q > 1$ divergent. Dies folgt direkt aus Satz 1.27 (i).
2. Die Folge (b_n) mit $b_n = (-1)^n$ ist divergent.

   Beweis:

   - Für jedes $a \notin \{1, -1\}$ gilt mit $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{|a-1|, |a+1]\} > 0$, dass $|a_n - a| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also kommen nur 1 und -1 als Grenzwert in Frage.
   - Sei $a = 1$. Wähle $\epsilon = 1$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n = 2n_0 + 1$. Damit gilt

   $$|a_n - a| = |(-1)^{2n_0+1} - 1| = |-1-1| = 2 \geq \epsilon = 1.$$

   - Analog für $a = -1$: Wähle hier $n = 2n_0$.

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Satz 2.10

Es sei (a_n) eine konvergente Folge und a und a' seien Grenzwerte von (a_n).

Dann gilt $a = a'$.

Damit ist der Grenzwert einer konvergenten Folge stets eindeutig bestimmt.

Definition 2.11

Für den (eindeutigen) Grenzwert a einer Folge (a_n) schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Weitere geläufige Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beweis.

Es sei (a_n) eine konvergente Folge und sowohl a als auch a' sei ein Grenzwert von (a_n).

Ann.: $a \neq a'$. Dann ist $|a - a'| > 0$. Wir wählen $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|a - a'|$. Dann existieren n_1 und n_2 mit

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1 &: |a_n - a| < \epsilon \\ \forall n \geq n_2 &: |a_n - a'| < \epsilon. \end{aligned}$$

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\} =: n_0$ folgt

$$\begin{aligned} |a - a'| &= |a - a_n + a_n - a'| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - a'| \\ &< 2\epsilon \\ &< |a - a'| \end{aligned}$$

Widerspruch! Also gilt $a = a'$. $\square$

Beschränktheit

Definition 2.12

Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

(i) (a_n) heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) (a_n) heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt,so dass $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) (a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}_+$ gibt (also $K > 0$), so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine beschränkte Folge ist stets sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Warum?

Beispiele für beschränkte Folgen

Beispiel 2.13

Die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

$$
\begin{aligned}
a_n &:= (-1)^n \\
b_n &:= \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
c_n &:= (-1)^n(1 - q^n) \text{ mit } 0 < q < 1
\end{aligned}
$$

sind alle beschränkt und divergent.

Konvergente Folgen sind beschränkt

Satz 2.14

Jede konvergente reelle Zahlenfolge (a_n) *ist beschränkt.*

Beweis.

Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

N.V. existiert n_0 mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{array}{rcl} |a_n| & = & |a_n - a + a| \\ & \leq & |a_n - a| + |a| \\ & \leq & 1 + |a|. \end{array}$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$. Damit gilt dann $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 2.15

Es seien (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen in* $\mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

(i) *Die Folge* $(a_n \pm b_n)$ *ist konvergent mit Grenzwert* $a \pm b$.

(ii) *Die Folge* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist konvergent mit Grenzwert* λa.

(iii) *Die Folge* $(a_n b_n)$ *ist konvergent mit Grenzwert* ab.

(iv) *Wenn* $a \neq 0$ *ist, dann existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *ist.*

Die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ *ist dann konvergent mit Grenzwert* $\frac{1}{a}$.

(v) *Die Folge* $(|a_n|)$ *ist konvergent mit Grenzwert* $|a|$.

Beweis von (i).

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Weil die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent sind mit den Grenzwerten a und b gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_1$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_2$$

Wähle $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Werkzeug für Grenzwertbeweise

Lemma 2.16

Es sei (a_n) eine reelle Folge.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) (a_n) *ist konvergent mit Grenzwert* a.

(ii)

$$\exists \kappa > 0 \, \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \kappa\epsilon.$$

Nach Satz 2.16 genügt es, $|a_n - a| < \kappa\epsilon$ für irgendein positives und von ϵ unabhängiges κ zu zeigen, um damit auf Konvergenz schließen zu können.

Beweis.

(i)⇒(ii): Mit $\kappa = 1$ entspricht (ii) der Grenzwertdefinition.

(ii)⇒(i): Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $\epsilon' := \frac{\epsilon}{\kappa}$. Nach (ii) existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \kappa\epsilon'$. Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \kappa\epsilon' \\ &= \kappa\frac{\epsilon}{\kappa} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.16 werden Grenzwertbeweise einfacher, weil wir nun nicht mehr umständlich ein n_0 konstruieren müssen, um damit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ zu zeigen.

Wir werden Lemma 2.16 in vielen zukünftigen Beweisen nutzen.

Beweis von Satz 2.15 (iii)

Man beachte: Als konvergente Folge ist (b_n) beschränkt, d. h. es existiert ein $B > 0$ mit $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) und (b_n) konvergent sind, existieren n_1 und n_2 mit $|a_n - a| < \epsilon$ bzw. $|b_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq n_1$ bzw. $n \geq n_2$. Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\
&\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\
&= |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\
&= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\
&< B\epsilon + |a|\epsilon \quad \text{für } n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\} \\
&= (B + |a|)\epsilon.
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 2.16 folgt, dass ab Grenzwert der Folge $(a_n b_n)$ ist.

Beweis von Satz 2.15 (ii), (iv), (v)

Übungsaufgabe.

Folgerung 2.17

Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

- *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge $\left(a_n^k\right)$ konvergent mit Grenzwert a^k.*
- *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ eine Nullfolge.*

Beweis.

Übungsaufgabe.

Anwendung der Grenzwertregeln

Beispiel 2.18

Wir betrachten die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n) mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \\ b_n &= (3 + 10^{-n}) \cdot \frac{1}{2^{n-3}} \\ c_n &= \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 1} \\ d_n &= \frac{-5n + 1}{4n^2 - 7}. \end{aligned}$$

Tafel ✎.

Bestimmte Divergenz

Definition 2.19

Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

Wir sagen, dass (a_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$), wenn es zu jeder Konstanten $M > 0$ ein n_0 gibt, so dass $a_n > M$ für alle $n \geq n_0$ ist.

Wir nennen (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), wenn die Folge $(-a_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Beispiele für bestimmte Divergenz

Beispiel 2.20

Wir betrachten die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n) mit

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \\ b_n &= -n^2 \\ c_n &= (-1)^n \cdot n^2 \\ d_n &= n + (-1)^n \end{aligned}$$

$(a_n), (b_n), (d_n)$ sind bestimmt divergent, (c_n) nicht.

Rechenregeln für bestimmte Divergenz

Wir können Satz 2.15 auch für bestimmt divergente Folgen verwenden, wenn wir dabei die folgenden Regeln berücksichtigen:

$$
\begin{array}{rcl}
c \pm \infty & = & \pm\infty \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\
\pm c \cdot \infty & = & \pm\infty \quad \text{für } c > 0 \\
\pm c \cdot (-\infty) & = & \mp\infty \quad \text{für } c > 0 \\
\dfrac{c}{\pm\infty} & = & 0 \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\
\infty + \infty & = & \infty \\
-\infty - \infty & = & -\infty \\
\infty \cdot \infty & = & \infty \\
-\infty \cdot \infty & = & -\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) & = & \infty
\end{array}
$$

Unbestimmte Verknüpfungen bei bestimmter Divergenz

Folgende Verknüpfungen mit ∞ können wir nicht ohne weitere Untersuchung vereinfachen:

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}.$$

Wenn wir auf einen dieser Ausdrücke stoßen, müssen wir die Folge so lange umformen, bis wir entscheiden können, ob sie konvergent oder divergent ist.

Konvergenzkriterien

- Um die Konvergenz einer Folge mittels Ihrer Definition oder den Rechenregeln zu zeigen, benötigen wir den Grenzwert der Folge.
- Häufig kennen wir den Grenzwert aber nicht.
- Wir betrachten nun Kriterien, mit denen wir die Konvergenz einer Folge zeigen können, ohne deren Grenzwert zu kennen.

Beispiel 2.21

Es sei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wir wollen die Folge (a_n) auf Konvergenz untersuchen. Es sieht so aus, als sei diese Folge konvergent.

n	1	2	3	5	10	20	50	100	1000
a_n	2	2.250	2.370	2.488	2.594	2.653	2.692	2.704	2.717

Aber wie können wir Konvergenz zeigen, wenn wir den Grenzwert nicht kennen?

$\leq$ bei Folgengliedern setzt sich auf Grenzwerte fort

Satz 2.22

Es seien (a_n) und (b_n) reelle, konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis.

Wir definieren:

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ann.: $a > b$.

Dann wählen wir $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. N.V. existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \epsilon$$

Für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann

$$a_n > a - \epsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \epsilon > b_n.$$

Widerspruch!

Schachtelungsprinzip

Satz 2.23

Es seien (a_n), (b_n), (c_n) *reelle Zahlenfolgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Weiterhin seien* (a_n) *und* (c_n) *konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dann ist auch die Folge (b_n) *konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Beweis.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_2 : |c_n - a| < \epsilon$$

Es sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Wegen

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon$$

folgt dann auch $|b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Anwendung des Schachtelungsprinzips

Beispiel 2.24

Für die Folge (a_n) mit $a_n := (5 + (-1)^n)\frac{1}{n}$ gilt

$$\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0}.$$

Nach dem Schachtelungsprinzip folgt

$$\lim_{n\to\infty} (5 + (-1)^n)\frac{1}{n} = 0.$$

Weiteres Beispiel: Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n}$. Tafel ✎.

Monotonie

Definition 2.25

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt

- monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Satz von der monotonen Konvergenz

Satz 2.26

Jede beschränkte, monotone reelle Zahlenfolge (a_n) ist konvergent.

Beweis.

O.B.d.A. sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt.

Es sei $a := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen, dass a der Grenzwert von (a_n) ist.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Lemma 1.23 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$. Da die Folge monoton wachsend ist, folgt für alle $n \geq n_0$:

$$a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a.$$

und damit $|a_n - a| < \epsilon$.

Anwendungen monotoner Konvergenz

Beispiel 2.27

Wir setzen Beispiel 2.21 fort.

- Die Folge a_n mit
$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
ist monoton wachsend.
- Die Folge b_n mit
$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$$
ist monoton fallend.

Fortsetzung Beispiel.

- Wegen
$$a_1 \leq a_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = b_n \leq b_1$$
sind (a_n) und (b_n) beschränkt.
- Also sind nach Satz 2.26 beide Folgen konvergent (mit Grenzwert a bzw. b).
- Wegen
$$b_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{a_n}_{\to a}$$
haben beide Folgen aber den gleichen Grenzwert, also $a = b$.
- Zur Information: Dieser gemeinsame Grenzwert ist die Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2.7182818284\ldots$.
- Wir werden e später über eine andere Folge definieren.

Konstruktiver Wurzelbeweis

Satz 2.28

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die Folge (x_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_n &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

definiert.

Dann ist die Folge (x_n) konvergent und für ihren Grenzwert x gilt $x > 0$ und $x^2 = a$.

Bemerkung: Die in Satz 2.28 definierte Folge (x_n) heißt Heron'sche Folge.

Beweis.

Durch Induktion sieht man sofort, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für alle $n \geq 2$ gilt

$$
\begin{aligned}
x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - \frac{4a}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beweis.

Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2x_n}}_{\geq 0} \underbrace{\left(x_n^2 - a\right)}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}
$$

Also ist $(x_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend und beschränkt und damit konvergent mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Fortsetzung Beweis.

Aus der Definition der Folge ergibt sich

$$x_n x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^2 + a\right).$$

Da die Folge (x_{n+1}) den gleichen Grenzwert wie die Folge (x_n) hat ergibt sich für die Grenzwerte der linken und rechten Seite

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + a\right)$$

und damit $x^2 = a$.

Implementierung der Heron'schen Folge

$x' := a$
do
$\quad x := x'$
$\quad x' := \frac{1}{2}\left(x' + \frac{a}{x'}\right)$
while $x' \neq x$
return x

Fehlerabschätzung und Konvergenzgeschwindigkeit

Für den Fehler

$$f_n := x_n - \sqrt{a}$$

erhält man mit der Definition der Heron'schen Folge $f_{n+1} = \frac{1}{2x_n} f_n^2$ und wegen $x_n \geq \sqrt{a}$ weiterhin

$$|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2.$$

Damit liegt bei der Heron'schen Folge quadratische Konvergenz vor.

Allgemein ist eine Folge (a_n) mit Grenzwert a quadratisch konvergent, wenn eine Konstante K existiert mit

$$|a_{n+1} - a| \leq K \cdot |a_n - a|^2.$$

Konstruktion k-ter Wurzeln

Satz 2.29

Es sei $a \in \mathbb{R}_+$. Die Folge (x_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_n &= \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right) \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

definiert.

Dann ist die Folge (x_n) konvergent und für ihren Grenzwert x gilt $x > 0$ und $x^k = a$.

Intervalle

Definition 2.30

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nennen die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

das abgeschlossene Intervall von a bis b, die Menge

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

das linksoffene Intervall von a bis b, die Menge

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

das rechtsoffene Intervall von a bis b und die Menge

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

das offene Intervall von a bis b.

Intervallschachtelung

Satz 2.31

Es seien (x_n) und (y_n) reelle Folgen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : I_n := [x_n, y_n] \neq \emptyset$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subseteq I_n$ *und*

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n - x_n = 0.$

Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in [x_n, y_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- (a) ist äquivalent zu: $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) ist äquivalent zu: $x_n \leq x_{n+1} \wedge y_{n+1} \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Aus (b) folgt, dass (x_n) monoton wächst und (y_n) monoton fällt. Wegen (a) gilt weiterhin für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1.$$

Damit sind die Folgen auch beschränkt und somit konvergent mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to} y_n$.

Aus (c) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} y_n - x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= y - x \end{aligned}$$

woraus wiederum $y = x =: a$ folgt. Für a wiederum gilt $x_n \leq a \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel 2.32

Für $a \in \mathbb{R}_+$ konstruieren wir (x_n) und (y_n) und eine Hilfsfolge (z_n) wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
y_1 &= a \\
z_n &= \frac{1}{2}(x_n + y_n) \quad \text{für } n \geq 1 \\
x_n &= \begin{cases} x_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 \geq a \\ z_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 < a \end{cases} \quad \text{für } n \geq 2 \\
y_n &= \begin{cases} z_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 \geq a \\ y_{n-1} & \text{falls } z_{n-1}^2 < a \end{cases} \quad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}$$

Dann bilden die Folgen (x_n) und (y_n) eine Intervallschachtelung mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{a}.$$

Teilfolge

Definition 2.33

Es sei (a_n) eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < \ldots$.

Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ Teilfolge der Folge (a_n).

Beispiel 2.34

- Für $n_k = 2k - 1$ erhalten wir die Teilfolge $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$ der ungeraden Folgenglieder und
- dementsprechend für $n_k = 2k$ die Teilfolge $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ der geraden Folgenglieder.
- $n_k = k$-te Primzahl ergibt die Teilfolge $a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, \ldots$ mit einer Primzahl als Index.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 2.35

Jede beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis.

N.V. gibt es $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $([A_k, B_K])_{k \in \mathbb{N}}$ von Intervallen und eine Folge (n_k) natürlicher Zahlen, so dass für alle k die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) In $I_k := [A_k, B_k]$ liegen unendlich viele Folgenglieder von (a_n),

(ii) $[A_{k+1}, B_{k+1}] \subseteq [A_k, B_k]$,

(iii) $B_{k+1} - A_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k - A_k)$,

(iv) $n_{k+1} > n_k$,

(v) $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Fortsetzung Beweis.

$k = 1$: Wir definieren:

$$A_1 := A, \quad B_1 := B, \quad n_1 := 1$$

$k \to k+1$:

- Sind $I_k = [A_k, B_k]$ und n_k bereits konstruiert, so ist $M_k := \dfrac{A_k + B_k}{2}$ die Mitte des Intervalls I_k.
- Wegen (i) liegen in $[A_k, M_k]$ oder in $[M_k, B_k]$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n). Es sei $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ solch ein Intervall mit unendlich vielen Folgengliedern.
- Mit dieser Konstruktion sind (i) bis (iii) erfüllt.

Fortsetzung Beweis.

- Da $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n) enthält, gibt es ein $n > n_k$ mit $a_n \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$.
- Es sei n_{k+1} das kleinste solche n. Damit sind (iv) und (v) erfüllt.
- Nach Satz 2.31 (Intervallschachtelung) folgt: Es existiert genau ein a, dass in allen Intervallen I_k liegt.
- Damit konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen dieses a.

Cauchy-Folge

Definition 2.36

Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Bemerkungen:

- Wir werden gleich sehen, dass eine reelle Folge genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn sie konvergent ist.
- Da bei der Definition einer Cauchy-Folge aber kein Grenzwert auftritt, haben wir mit der Definition der Cauchy-Folge ein weiteres Konvergenzkriterium ohne Grenzwert.

Cauchy-Folgen sind beschränkt

Lemma 2.37

Jede reelle Cauchy-Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis.

N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < 1$.

Damit erhalten wir für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \\ &\leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \\ &< 1 + |a_{n_0}|. \end{aligned}$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Konvergenz $\Leftrightarrow$ Cauchy-Folge

Satz 2.38

Es sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt: (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Folge

(a_n) sei eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Beweis: Cauchy-Folge $\Rightarrow$ konvergent

Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge.

Nach Lemma 2.37 ist (a_n) beschränkt. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, dass (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) hat. Es sei a der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir zeigen jetzt, dass a auch der Grenzwert von (a_n) ist.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (a_{n_k}) gegen a konvergiert, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ für alle $n_k \geq N_1$.

Aus der Cauchy-Eigenschaft von (a_n) folgt, dass ein $N_2 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N_2$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Es sei $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$. Weiterhin wählen wir ein beliebiges n_k mit $n_k \geq N_0$. Damit gilt dann:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon$$

für alle $n \geq N_0$.

Grenzwert einer komplexen Zahlenfolge

- Auch für die komplexen Zahlen haben wir einen Betrag definiert.
- Die Grenzwertdefinition 2.6 stützt sich nur auf den Betrag.
- Daher können wir die Grenzwertdefinition auf die komplexen Zahlen ausdehnen.

Definition 2.39

Es sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge.

Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

gilt.

Grenzwert komplexer Folgen

Lemma 2.40

Es sei (a_n) eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \wedge \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a).$$

Beweis.

Übungsaufgabe. $\square$

Beschränkte komplexe Folgen

- Da $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist, existiert keine Ordnungsrelation $\leq$ für die komplexen Zahlen.
- Daher macht es keinen Sinn, für komplexe Folgen von einer Beschränkung nach oben oder unten zu reden.
- Wir können aber den Begriff beschränkt auf komplexe Folgen übertragen.

Definition 2.41

Eine komplexe Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq M$$

gilt.

Auf komplexe Folgen übertragbare Aussagen

Alle Aussagen über reelle Folgen, die im Beweis nicht die Anordnung der reellen Zahlen ausnutzen, können wir auf komplexe Folgen übertragen. Dies sind insbesondere

- die Eindeutigkeit von Grenzwerten, Satz 2.10,
- die Beschränktheit konvergenter Folgen, Satz 2.14,
- die Rechenregeln für Grenzwerte, Satz 2.15,
- das Werkzeug für Grenzwertbeweise, Lemma 2.16 und
- die Aussagen über Cauchy-Folgen, Lemma 2.37, Satz 2.38.

Konvention

Viele Aussagen lassen sich sowohl für die reellen als auch für die komplexen Zahlen formulieren.

Konvention:

- Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir sowohl den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als auch den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
- Innerhalb einer Definition oder eines Satzes wird mit $\mathbb{K}$ aber stets derselbe Körper bezeichnet.

Konvergenz in höherdimensionalen Räumen

Definition 2.42

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Bei einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^d$ ist jedes Folgenglied ein d-Tupel in $\mathbb{K}^d$, also

$$a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(d)}).$$

Die Folge (a_n) in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann gegen

$$a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)}) \in \mathbb{K}^d,$$

wenn für jede Komponentenfolge $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ für $i = 1, \dots, d$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)}.$$

Beispiel 2.43

Die Folge

$$\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0,1)$, denn

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= 1. \end{aligned}$$

Bemerkung:

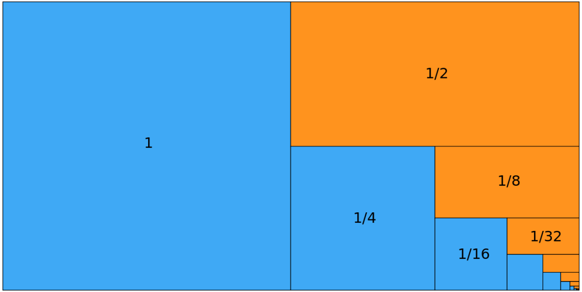
- Da wir jede Folge in $\mathbb{C}$ auch als Folge in $\mathbb{R}^2$ auffassen können, haben wir mit Definition 2.39 und Definition 2.42 zwei Konvergenzdefinitionen für komplexe Folgen.
- Wegen Lemma 2.40 sind diese Definitionen aber äquivalent.

Zusammenfassung

- Konvergenz, Grenzwert: $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
- Rechenregeln für Grenzwerte
- Bestimmte Divergenz
- Konvergenzkriterien: Schachtelung, Monotonie und Beschränktheit, Intervallschachtelung, Satz von Bolzano-Weierstraß, Cauchy-Folgen
- Konvergenz in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^d$ komponentenweise

Kapitel 3

Reihen,
Potenzreihen
und
elementare Funktionen



Inhalt

Reihe als Folge der Partialsummen

Definition 3.1

Es sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{K}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Reihe und S_n ist die n-te Partialsumme der Reihe. Wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

für die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unabhängig davon, ob die Folge konvergiert oder nicht.

Konvergenz von Reihen

Definition 3.2

Eine Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

heißt konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert. Andernfalls heißt die Reihe divergent.

Wenn die Reihe konvergent ist, dann wird auch der Grenzwert der Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Ist die Reihe divergent, wird dem Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ keine Zahl zugeordnet.

- Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann also eine Doppelbedeutung haben.
- Es bezeichnet immer die Folge der Partialsummen, im Konvergenzfall zusätzlich auch den Grenzwert der Folge der Partialsummen.

Nullfolge ist notwendig für Konvergenz einer Reihe

Lemma 3.3

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} &\Rightarrow (S_n) \text{ ist konvergent} \\
&\Rightarrow (S_n) \text{ ist Cauchy-Folge} \\
&\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |S_m - S_n| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 + 1.$$

Geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

heißt geometrische Reihe. Für $|q| \geq 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, die geometrische Reihe also divergent. Für $|q| < 1$ gilt jedoch

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Daraus folgt für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Harmonische Reihe

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt harmonische Reihe. Diese Reihe ist divergent, obwohl $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist.

Für den Beweis der Divergenz zeigen wir, dass (S_n) keine Cauchy-Folge ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Und noch ein Beispiel

Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wegen $\frac{1}{n^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge (S_n) monoton wachsend. Die Folge (S_n) ist aber auch beschränkt, denn

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Also ist (S_n) monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent.

Teleskopsumme und -reihe

Für eine Folge (a_n) ist

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$$

eine Teleskopsumme. Solche Summen lassen sich leicht auswerten:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Eine Reihe, deren Partialsummen Teleskopsummen sind, heißt Teleskopreihe. Eine Teleskopreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

ist genau dann konvergent, wenn (a_n) konvergent ist (mit Grenzwert a). Der Grenzwert der Teleskopreihe ist dann $a_1 - a$.

Linearkombination konvergenter Reihen

Lemma 3.4

Wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ *sind und* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *ist, dann ist auch die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis.

Folgt durch Anwendung der Grenzwertregeln für Folgen auf die Folgen der Partialsummen.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k), \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad U_n := \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n + \mu U_n) \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n + \mu \lim_{n\to\infty} U_n \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.5

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ist konvergent, denn für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=0}^{n} 3\left(\frac{1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 3\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\to \frac{1}{1-\frac{1}{4}}} + 2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k}_{\to \frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{3}{2} = 7.$$

Leibniz-Kriterium

Satz 3.6

Wenn (a_n) eine monotone Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beispiel 3.7

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, denn $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Beweis des Leibnizkriteriums.

O.B.d.A. sei (a_n) monoton fallend. Da (a_n) außerdem eine Nullfolge ist, folgt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$

Wir werden zeigen, dass die Teilfolgen (S_{2n}) und (S_{2n+1}) konvergent sind und gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Weil (a_n) monoton fallend ist, folgt

$$\begin{array}{rcl} S_{2n+2} - S_{2n} & = & a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad \text{und} \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} & = & -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0 \end{array}$$

Damit ist die Teilfolge (S_{2n}) monoton fallend und (S_{2n+1}) monoton steigend. Weiterhin gilt

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0.$$

Fortsetzung Beweis.

Damit folgt
$$S_2 \geq S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_1.$$

Somit sind beide Folgen auch beschränkt und damit konvergent. Es sei
$$s := \lim_{n\to\infty} S_{2n} \text{ und } s' := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}.$$

Damit folgt
$$\begin{aligned} s - s' &= \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $s = s'$.

Fortsetzung Beweis.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass aus der Konvergenz von (S_{2n}) und (S_{2n+1}) gegen den gleichen Grenzwert auch die Konvergenz von (S_n) folgt.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aus der Konvergenz von (S_{2n}) und (S_{2n+1}) gegen s folgt die Existenz von $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1 : |S_{2n} - s| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_2 : |S_{2n+1} - s| < \epsilon.$$

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder in der Folge $(2n)$ oder in der Folge $(2n+1)$ enthalten ist, folgt für alle $n \geq n_0 := \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, dass $|S_n - s| < \epsilon$ gilt.

Absolute Konvergenz

Definition 3.8

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergent ist.

Beispiel 3.9

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Dreiecksungleichung für absolut konvergente Reihen

Satz 3.10

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und für die Grenzwerte gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergent} \\
\Rightarrow \quad & S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\
\Rightarrow \quad & \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 : |S_m - S_n| < \epsilon \\
\Rightarrow \quad & \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Also ist auch $T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Aus der Dreiecksungleichung folgt auch $|T_n| \leq S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit Satz 2.15 (v) und Satz 2.22

$$
\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \lim_{n \to \infty} |T_n| \leq \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.
$$

Beispiel 3.11

- Wir betrachten die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
mit
$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Da diese Reihe absolut konvergent ist, ist sie auch konvergent.
- Den zugehörigen Grenzwert kennen wir für diese Reihe aber nicht.

Majoranten- und Minorantenkriterium

Satz 3.12

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent ist, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ divergent.*

- Aussage (i) ist das sogenannte Majorantenkriterium und
- Aussage (ii) das Minorantenkriterium.
- Die beiden Aussagen sind semantisch äquivalent.

Beweis.

Es seien

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \text{und} \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

und $\epsilon > 0$ beliebig. N.V. ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Damit ist (T_n) ist eine Cauchy-Folge und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n \geq n_0$

$$|T_m - T_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < \epsilon$$

gilt. Wegen $|a_k| \leq |b_k|$ folgt

$$|S_m - S_n| = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < \epsilon.$$

Also ist auch (S_n) eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Beispiel 3.13

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{4^n}$$

ist absolut konvergent.

Begründung:

$$\left| \frac{3^n + (-2)^n}{4^n} \right| \leq \frac{3^n + 2^n}{4^n} \leq \frac{3^n + 3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{=4} = 8$$

ist absolut konvergent (geometrische Reihe).

Beispiel 3.14

Die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

sind für $k \geq 2$ absolut konvergent.

Begründung:

- Für $k \geq 2$ und $n \geq 1$ gilt $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent (siehe Folie 171) und wegen $\frac{1}{n^2} > 0$ auch absolut konvergent.
- Also können wir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als Majorante nutzen und
- mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ absolut konvergent ist.

Quotientenkriterium

Satz 3.15

Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiterhin gebe es eine Zahl $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta$$

erfüllt ist.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis.

Beweisidee: Wir nutzen die geometrische Reihe als Majorante.

N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq \theta |a_{n-1}| \leq \theta^2 |a_{n-2}| \leq \cdots \leq \theta^{n-n_0} |a_{n_0}|.$$

Es folgt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{n} |a_k| = |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \\ &\leq |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \sum_{k=n_0}^{n} \theta^{k-n_0} \end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

$$= \quad |a_1| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n-n_0} \theta^k}_{\text{absolut konvergent}}$$

Es sei

$$b_k := \begin{cases} |a_k| & \text{für } k < n_0 \\ |a_{n_0}|\theta^{k-n_0} & \text{für } k \geq n_0 \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium absolut.

Beispiel 3.16

Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

mit dem Quotientenkriterium auf (absolute) Konvergenz. Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 .$$

Für $n \geq 3$ gilt dann

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1.$$

Mit $\theta = \frac{8}{9}$ ist das Quotientenkriterium erfüllt. Also ist die Reihe absolut konvergent.

Beispiel 3.17

Wir betrachten wieder die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Wir wissen, dass die Reihe divergiert. Für den Quotienten gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

gibt es aber kein θ und kein n_0, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Wir sehen daran, dass die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta < 1$ wesentlich ist. Nur $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ reicht nicht aus.

Beispiel 3.18

Wie wir von Folie 171 wissen, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (absolut). Aber auch für diese Reihe gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

Damit existiert auch hier kein θ wie im Quotientenkriterium gefordert.

Dies zeigt, dass das Quotientenkriterium nur hinreichend aber nicht notwendig für absolute Konvergenz ist.

Folgerung 3.19

Existiert der Grenzwert

$$\theta := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

dann gilt:

(i) *Für* $\theta < 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Für* $\theta > 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Für* $\theta = 1$ *ist keine Aussage über Konvergenz möglich.*

Wurzelkriterium

Satz 3.20

Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Weiterhin gebe es eine Zahl $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$$

erfüllt ist.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis.

Die Bedingung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ ist äquivalent zu $|a_n| \leq \theta^n$. Damit können wir ab n_0 die geometrische Reihe als Majorante nutzen.

Lemma 3.21

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Beweis.

Setze $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Wir zeigen, dass (b_n) eine Nullfolge ist.

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2$$

"$\geq$" ergibt sich durch die binomische Formel und weglassen der Summanden, ausgenommen für $k = 0$ und $k = 2$. Es folgt

$$b_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0.$$

Beispiel 3.22

Wir untersuchen die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1.$$

Für festes $k \geq 2$ folgt damit

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k \longrightarrow 1.$$

Wir sehen, dass auch das Wurzelkriterium nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium für absolute Konvergenz ist.

Folgerung 3.23

Existiert der Grenzwert

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dann gilt:

(i) *Für* $\theta < 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Für* $\theta > 1$ *ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Für* $\theta = 1$ *ist keine Aussage über Konvergenz möglich.*

Cauchy-Produkt

Definition 3.24

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \right)$$

das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bemerkung: Wenn die Reihen mit $n = 0$ beginnen, dann lautet das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) .$$

Cauchy-Produkt und das Produkt von Reihen

Satz 3.25

Wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, dann ist auch deren Cauchy-Produkt absolut konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \right)
\end{aligned}$$

Potenzreihe

Definition 3.26

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Potenzreihe in der Variablen x mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizientenfolge (a_n).

- Für $x = x_0$ und $n = 0$ erhalten wir 0^0.
- Es gilt $0^0 = 1$. Also ist $(x-x_0)^0$ bei Potenzreihen immer 1.

Potenzreihen als Funktion

Wir interessieren uns zunächst für die Werte $x \in \mathbb{K}$, für welche die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konvergiert. Es sei

$$D := \{x \in \mathbb{K} | P(x) ist \text{ konvergent}\}$$

die Menge dieser Werte. Dann können wir eine Potenzreihe als Funktion

$$\begin{aligned} P \quad : \quad & D \to \mathbb{K} \\ & x \mapsto P(x) \end{aligned}$$

auffassen. Wir werden sehen, dass wir viele wichtige Funktionen durch Potenzreihen ausdrücken können.

Beispiel 3.27

Wir betrachten die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

in $\mathbb{C}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ (geometrische Reihe).

Wir wissen, dass die Reihe für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert, also $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Wir kennen sogar die Funktion, die von dieser Potenzreihe dargestellt wird. Es gilt nämlich

$$P(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Beispiel 3.28

Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir

$$\left| \frac{(n+2) z^{n+1}}{(n+1) z^n} \right| = \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1} |z| \longrightarrow |z|.$$

Hieraus folgt, dass auch diese Potenzreihe für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert.

Beispiel 3.29

Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-1)^n$$

konvergieren ensprechend der beiden vorangegangenen Beispielen für $|z-1|<1$ und sind divergent für $|z-1|>1$.

Beispiel 3.30

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Für den Beweis nutzen wir das Cauchy-Produkt.

Beweis für die Formel.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} z^j z^{k-j}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} z^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k.
\end{aligned}$$

Konvergenzradius (1)

Es ist kein Zufall, dass die Mengen $D = \{z \in \mathbb{C} | P(z) \text{ ist konvergent}\}$ in den vorangegangenen Beispielen alle kreisförmig sind.

Lemma 3.31

Konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

in einem Punkt $x_1 \neq x_0$, dann konvergiert die sie auch in jedem Punkt $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ absolut.

Beweis.

- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n(x_1 - x_0)^n)$ eine Nullfolge und damit konvergent.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt. Also existiert ein $M > 0$ mit

$$|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung Beweis.

- Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
|a_n(x - x_0)^n| &= \left| a_n(x_1 - x_0)^n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| \\
&= |a_n(x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| \\
&\leq Mq^n
\end{aligned}
$$

  mit $q := \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} < 1$.
- Damit können wir die geometrische Reihe als Majorante nutzen.
- Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolut konvergent ist für $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Konvergenzradius (2)

Folgerung 3.32

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor:

(i) *Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut.*

(ii) *Die Potenzreihe divergiert für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{x_0\}$.*

(iii) *Es existiert genau ein $R \in \mathbb{R}_+$, so dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-x_0| < R$ absolut konvergiert und für $|x-x_0| > R$ divergiert.*

Definition 3.33

Die Zahl R in Fall (iii) der vorstehenden Folgerung heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Liegt Fall (i) vor, dann sagen wir, dass der Konvergenzradius Unendlich ist ($R = \infty$), im Fall (ii) ist der Konvergenzradius Null ($R = 0$).

Beispiel 3.34

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + 7n + 12)z^n$$

hat den Konvergenzradius $R = 1$.

Dies zeigen wir mit dem Quotientenkriterium. Tafel ✎

Man kann sogar den Grenzwert für diese/solche Reihen exakt bestimmen. Dies machen Sie in den ACAT-Übungen.

Beispiel 3.35

Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n$$

gilt $R = 2$.

Diesmal mit dem Wurzelkriterium begründet:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{n+2}{2^n} z^n \right|} = \frac{|z|}{2} \underbrace{\sqrt[n]{n+2}}_{\to 1} \longrightarrow \frac{|z|}{2}$$

Dabei zeigt man $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$ leicht mit dem Schachtelungsprinzip.

Beispiel 3.36

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n} z^n$$

hat den Konvergenzradius $R = 0$.

Das Quotienkriterium liefert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{1000^{n+1}} \cdot \frac{1000^n}{n! z^n} \right| = \frac{n+1}{1000} |z| \longrightarrow \infty.$$

Exponentialfunktion (1)

Satz 3.37

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut ($R = \infty$).

Beweis.

Mit dem Quotienkriterium ergibt sich für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Exponentialfunktion (2)

Definition 3.38

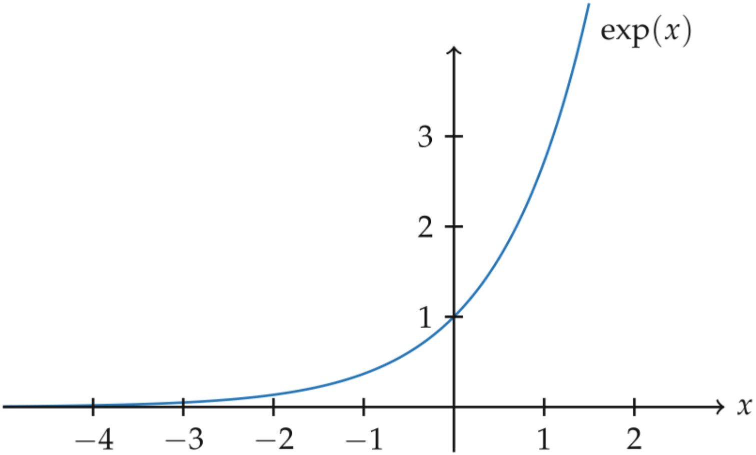
Die durch

$$\begin{aligned} \exp \quad &: \quad \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ & z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

definierte Funktion heißt (komplexe oder reelle) Exponentialfunktion.

Bei Funktionen oder Potenzreihen im Reellen schreiben wir meist x statt z (und x_0 statt z_0).

Exponentialfunktion (3)



Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Satz 3.39

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis.

Wir nutzen das Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Eulersche Zahl

Definition 3.40

Die Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

heißt Eulersche Zahl.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz 3.41

Es gilt:

(i) $\exp(0) = 1$,

(ii) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(iii) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(iv) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(v) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(vi) $\exp(r) = e^r$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$.

Beweis.

(i) Einsetzen: $0^0 = 1$, $0! = 1$ und $0^n = 0$ für $n \geq 1$.

Fortsetzung Beweis.

(ii) Ann.: Es existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Dann gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z) = 0 \cdot \exp(-z) = 0.$$

Widerspruch!

(iii) Folgt aus $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$.

(iv) Betrachte zunächst die Partialsummen:

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$$

Weiterhin folgt mit Lemma 2.40: Wenn eine komplexe Folge (z_n) gegen z konvergiert, dann konvergiert die Folge $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z}$. Damit folgt die Aussage.

Fortsetzung Beweis.

(v) Für $x \geq 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 > 0$.

Wegen (iii) gilt die Aussage auch für $x < 0$.

(vi) $r = 0$: (i)

$r > 0$: Dann gilt $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und

$$(\exp(r))^q = \exp(r \cdot q) = \exp(p) = (\exp(1))^p = \mathrm{e}^p.$$

Also: $\exp(r) = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p}$.

$r < 0$: Mit (iii) und Potenzregeln folgt

$$\exp(r) = \frac{1}{\exp(-r)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-r}} = \mathrm{e}^r.$$

Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion

Satz 3.42

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| \leq 1 + \frac{n}{2}$

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Eulersche Zahl ist irrational

Folgerung 3.43

Die Eulersche Zahl e *ist irrational.*

Sinus und Kosinus (1)

Satz 3.44

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\exp(ix)| = 1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|\exp(ix)|^2 &= \exp(ix)\overline{\exp(ix)} \\
&= \exp(ix)\exp(\overline{ix}) \\
&= \exp(ix)\exp(-ix) \\
&= \exp(ix - ix) \\
&= \exp(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sinus und Kosinus (2)

Definition 3.45

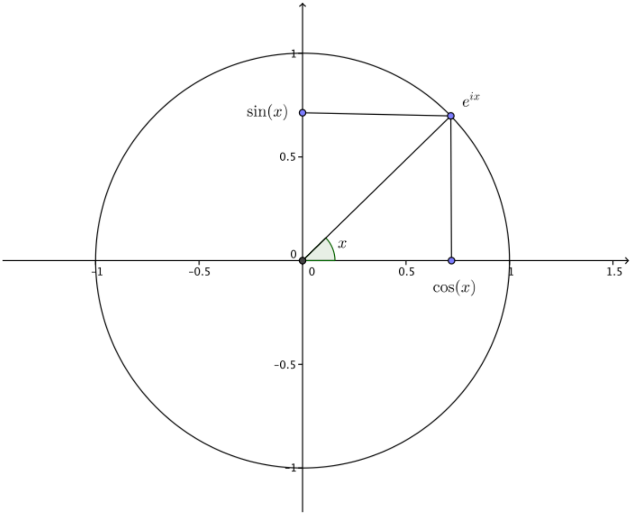
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) \\ \cos(x) &= \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x)). \end{aligned}$$

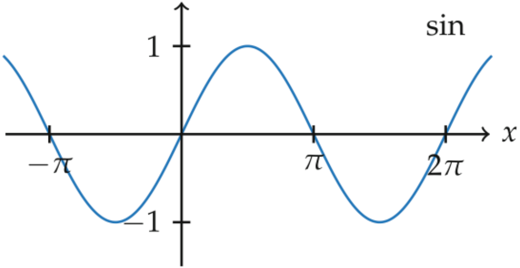
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt also die Eulersche Formel

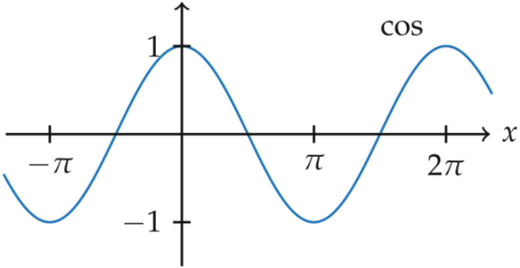
$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x).$$

Sinus und Cosinus für $x \in \mathbb{R}$ (1)



Sinus und Cosinus für $x \in \mathbb{R}$ (2)





Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (1)

Lemma 3.46

Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis.

Quotienkriterium für die erste Reihe: Sie $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n z^{2n+1}} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0$$

Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (2)

Lemma 3.47

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

Beweis.

Für gerade $n \in \mathbb{N}$ können wir $n = 2m$ schreiben, für ungerade $n = 2m + 1$. Wegen der Konvergenz der betreffenden Reihen gilt

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2m} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Wegen $\mathrm{i}^{2m} = (\mathrm{i}^2)^m = (-1)^m$ ergibt sich

$$\exp(\mathrm{i}x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Also

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

Potenzreihendarstellung von Sinus und Cosinus (3)

Da die Potenzreihen im vorangegangenen Lemma für alle komplexen Zahlen konvergieren, können wir dies nutzen, um die Definitionen von Sinus und Cosinus auf die komplexe Ebene fortzusetzen.

Definition 3.48

Für alle $z \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Eulersche Formel

Folgerung 3.49

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

Beweis.

Analog zum Beweis von Lemma 3.47. Es ergibt sich dann die Potenzreihendarstellung

$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + \mathrm{i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

$\square$

Eigenschaften von Sinus und Cosinus (1)

Satz 3.50

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(i)

$$\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$$

(ii)

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) \\ \sin(z) &= -\sin(-z) \end{aligned}$$

Eigenschaften von Sinus und Cosinus (2)

Satz 3.51

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)) \end{aligned}$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Satz 3.52

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(i)

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \end{aligned}$$

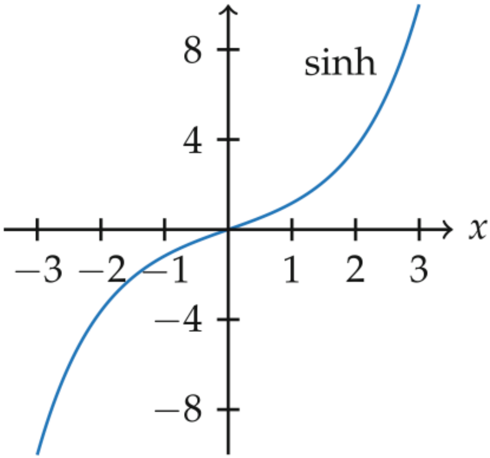
Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

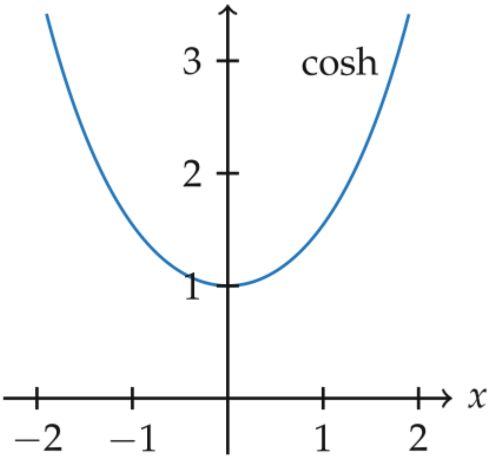
Definition 3.53

Für alle $z \in \mathbb{C}$ seien die Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)),\\ \cosh(z) &= \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z))\end{aligned}$$

Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus in $\mathbb{R}$





Potenzreihendarstellung des Sinus/Cosinus Hyperbolicus

Satz 3.54

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Eigenschaften des Sinus/Cosinus Hyperbolicus

Satz 3.55

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\sinh(z) + \cosh(z) = \exp(z)$,

(ii) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$,

(iii) $\cosh(z \pm w) = \cosh(z)\cosh(w) \pm \sinh(z)\sinh(w)$,

(iv) $\sinh(z \pm w) = \sinh(z)\cosh(w) \pm \cosh(z)\sinh(w)$,

(v) $\sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\sinh(y)$

(vi) $\cos(\mathrm{i}y) = \cosh(y)$

(vii) $\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y)$,

(viii) $\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$.

Identitätssatz für Potenzreihen

Satz 3.56

Seien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien $R_f > 0$ *und* $R_g > 0$.

Gilt

$$f(z) = g(z) \text{ für alle } z \text{ mit } 0 \leq |z| < \min\{R_f, R_g\},$$

dann sind die beiden Potenzreihen identisch, d. h. $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Anschauliche Interpretation:

- Wenn zwei Potenzreihen die gleiche Funktion darstellen, sind die Koeffizientenfolgen identisch.

Mit dem Identitätssatz können wir explizite Formeln für rekursiv definierte Folgen begründen.

Beispiel 3.57

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Mit dieser Folge definieren wir die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wegen

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = 2|z|$$

beträgt der Konvergenzradius $R = \frac{1}{2}$.

Fortsetzung Beispiel.

Durch Anwendung der rekursiven Definition ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n \\
&= 1 + 2z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} \\
&= 1 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + 2z\, f(z).
\end{aligned}
$$

Wenn wir die Gleichung nach $f(z)$ auflösen, erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir kennen aber noch eine andere Potenzreihe, welche die Funktion $\frac{1}{1-2z}$ darstellt, denn mit der Formel für die geometrische Reihe erhalten wir

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}.$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt, dass die Koeffizienten der beiden Potenzreihen $f(z)$ und $g(z)$ gleich sind, also

$$a_n = 2^n.$$

Damit haben wir eine explizite Formel für die Folgenglieder.

Das letzte Beispiel war sehr einfach, auf die explizite Formel wäre man wohl auch durch scharfes Hinsehen gekommen. Das nächste Beispiel ist ein wenig schwieriger.

Beispiel 3.58

Wir wandeln die Folge des letzten Beispiels leicht ab.

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} + 1 \text{ für } n \geq 1.$$

Herleitung an der Tafel, u. a. wird das Cauchy-Produkt von Reihen verwendet.

Ergebnis:

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

Partialbruchzerlegung

Eine sehr hilfreiche Technik bei der Behandlung komplexerer Rekursionen ist die Partialbruchzerlegung.

Satz 3.59

Seien $Z(x)$ und $N(x)$ Polynome und der Grad von $Z(x)$ sei kleiner als der Grad von $N(x)$. Wir betrachten hier nur den Fall, dass $N(x)$ ausschließlich reelle Nullstellen hat.

- *m sei die Anzahl der reellen Nullstellen von $N(x)$,*
- *$x_1, x_2, \ldots, x_m$ seien diese Nullstellen und*
- *r_i mit $i = 1, \ldots, m$ sei die Vielfachheit der Nullstelle x_i.*

Dann existieren reelle Zahlen a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i)$ mit

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j}.$$

Beispiel 3.60

Wir betrachten die Funktion

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{4x}{1-2x-3x^2}.$$

Die Nullstellen von $N(x)$ sind $\frac{1}{3}$ und -1 jeweils mit Vielfachheit 1. Nach dem Satz der Partialbruchzerlegung existieren also Konstanten a und b mit

$$\frac{4x}{1-2x-3x^2} = \frac{-\frac{4}{3}x}{x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}} = \frac{a}{x-\frac{1}{3}} + \frac{b}{x+1}.$$

Um diese Zahlen a und b zu ermitteln, machen wir die Summanden des rechten Terms gleichnamig und führen einen Koeffizientenvergleich durch.

$$\frac{a}{x-\frac{1}{3}} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-\frac{1}{3})}{(x-\frac{1}{3})(x+1)} = \frac{(a+b)x+(a-\frac{1}{3}b)}{(x-\frac{1}{3})(x+1)}$$

Fortsetzung Beispiel.

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -\frac{4}{3} \\ a & - & \frac{1}{3}b & = & 0 \end{array}$$

Mit der Lösung $a = -\frac{1}{3}$ und $b = -1$. Also

$$\begin{aligned} \frac{4x}{1-2x-3x^2} &= \frac{-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Erzeugende Funktion

Definition 3.61

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die Funktion

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

erzeugende Funktion der Folge (a_n).

- Schon in den Beispielen 3.57 und 3.58 haben wir erzeugende Funktionen verwendet.
- Mit Ihnen gelingt der Übergang von einer Folge zu einer Funktion.

Beispiele für erzeugende Funktionen

Beispiel 3.62

- $a_n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

- $a_n = n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

- $a_n = n^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Fortsetzung Beispiel.

- $a_n = (-1)^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

- $a_n = a^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}$$

- $a_n = \frac{1}{n!}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z)$$

Vorgehen zur Herleitung expliziter Folgen

1. Zu einer rekursiv definierten Folge (a_n) stellen wir die Potenzreihe der erzeugenden Funktion auf und zeigen $R > 0$.
2. Durch Anwendung der rekursiven Definition von a_n auf die Potenzreihe ermitteln wir die die explizite Darstellung der erzeugenden Funktion.
3. Wir stellen die erzeugende Funktion als Linearkombination bekannter Potenzreihen dar. Hierbei ist häufig eine Partialbruchzerlegung hilfreich.
4. Wir fassen die Linearkombination der Potenzreihen zu einer Potenzreihe zusammen. So entsteht eine explizite Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe der erzeugenden Funktion. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen diese dann mit der rekursiven Definition übereinstimmen.

Beispiel: Herleitung einer expliziten Folge

Beispiel 3.63

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, a_1 = 4 \text{ und } a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Schritt 1: Mit Induktion sieht man leicht, dass (a_n) nicht negativ und damit monoton steigend ist. Das Quotientenkriterium liefert

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{2a_n + 3a_{n-1}}{a_n} |z| \leq \frac{2a_n + 3a_n}{a_n} |z| \leq 5|z|.$$

Die Potenzreihe $G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert also für $|z| < \frac{1}{5}$, damit gilt $R > 0$ und $G(z)$ ist für $|z| < \frac{1}{5}$ definiert.

Fortsetzung Beispiel.

Schritt 2:

$$
\begin{aligned}
G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 + 4z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \\
&= 4z + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \\
&= 4z + 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + 3z^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} \\
&= 4z + 2z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + 3z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= 4z + 2zG(z) + 3z^2 G(z)
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Beispiel.

Wir lösen nach $G(z)$ auf und erhalten

$$G(z) = \frac{4z}{1 - 2z - 3z^2}.$$

Schritt 3: Aus Beispiel 3.60 wissen wir

$$\frac{4z}{1 - 2z - 3z^2} = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 + z}.$$

Beide Summanden der rechten Seite sind geometrische Reihen.

$$\frac{1}{1 - 3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{1 - (-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Fortsetzung Beispiel.

Schritt 4: Aus Schritt 3 folgt

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1+z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(3^n - (-1)^n\right)}_{=a_n} z^n. \end{aligned}$$

Also gilt nach dem Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = 3^n - (-1)^n.$$

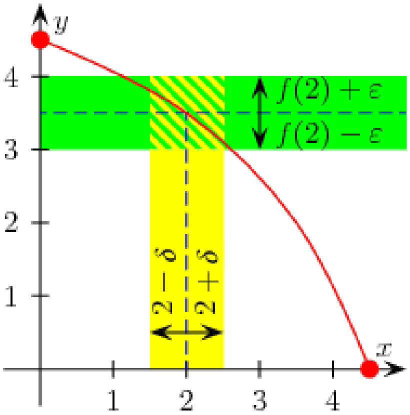
Damit haben wir die gewünschte explizite Folge, die identisch mit der rekursiven Definition ist.

Zusammenfassung

- Reihe als Folge der Partialsumme
- Absolute Konvergenz ist deutlich strenger als Konvergenz.
- Majoranten- und Minorantenkriterium, Quotienten- und Wurzelkriterium
- Cauchy-Produkt
- Potenzreihen, Konvergenzradius
- Elementare Funktionen: $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh$
- Identitätssatz für Potenzreihen, Partialbruchzerlegung
- Anwendung: Herleitung expliziter Folgen

Kapitel 4

Stetigkeit



Inhalt

Kontinuierliche Veränderung

- Anschauliche Vorstellung der Stetigkeit: kontinuierliche Veränderung (also keine sprunghafte Veränderung)
- Wenn sich x “wenig” ändert, dann ändert sich auch $f(x)$ nur “wenig”.
- Aber was heißt wenig? Dies müssen wir präzisieren.
- Für die Präzisierung werden wir wieder Grenzwerte nutzen.

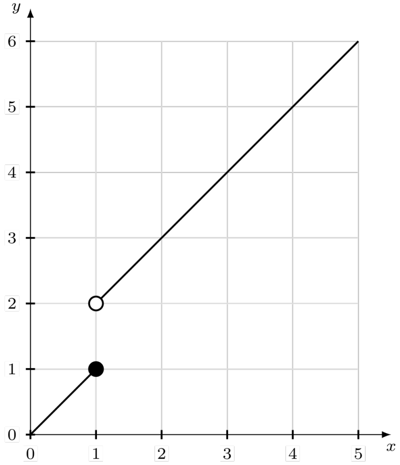
Sichtweisen der Stetigkeit (1)

Eine Funktion soll stetig heißen,

- wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments
- zu beliebig kleinen Änderungen des Funktionswertes führen.

Andere mögliche Sichtweise:

- Egal wie wir uns mit dem Argument einem Wert x_0 nähern,
- die Funktionswerte nähern sich dann stets $f(x_0)$.



nicht stetige Funktion

Sichtweisen der Stetigkeit (2)

Jede dieser beiden Sichtweisen könnte die Basis für die Definition der Stetigkeit sein.

- Wir entscheiden uns zunächst für die zweite Sichtweise.
  - ☞ Stetigkeit wird definiert mit Hilfe von Grenzwerten konvergenter Folgen.
- Im Anschluss präsentieren wir eine Aussage für die erste Sichtweise,
  - ☞ ϵ-δ-Kriterium

  und zeigen natürlich auch die Äquivalenz der beiden Konzepte.

Stetigkeit reellwertiger Funktionen

Definition 4.1

Es seien $d \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^d, x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

Wir sagen f ist stetig in x_0, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D oder einfach nur stetig, wenn f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Diskussion der Stetigkeitsdefinition

- Stetigkeit wird hier definiert mittels einer Allquantifizierung über einer Menge konvergenter Folgen. Dies macht den direkten Beweis der Stetigkeit u. U. sehr kompliziert.
- Dafür können wir leicht zeigen, dass eine Funktion f in x_0 nicht stetig ist. Hierzu müssen wir nur eine Folge (x_n) finden mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

- Ist f stetig in x_0, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

  Wir dürfen also Funktionsanwendung und Grenzwertbildung vertauschen.

- Beachten Sie, dass wir Stetigkeit nicht nur für Funktionen mit einem Argument definiert haben.
- Zur Erinnerung: Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann gegen

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(d)}) \in \mathbb{R}^d,$$

wenn für jede Komponentenfolge $(x_n^{(i)})$ mit $i = 1, \ldots, d$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x_0^{(i)}.$$

Siehe Definition 2.42.

Beispiel einer nicht stetigen Funktion

Beispiel 4.2

Die Funktion von Folie 261 lautet

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x > 1 \\ x & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

Es sei $x_0 := 1$. Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $1 = x_0$, aber

$$\lim_{n \to \infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} + 1 = 2 \neq 1 = f(1).$$

Damit haben wir gezeigt, dass f nicht stetig in $x_0 = 1$ ist.

Beispiele stetiger Funktionen

Beispiel 4.3

(i) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{id}(x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ &= \mathrm{id}(x_0) = \mathrm{id}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).\end{aligned}$$

(ii) Die Betragsfunktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.

Begründung: Satz 2.15 (v).

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto x + y \end{aligned}$$

ist wegen Satz 2.15 stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(iv) Die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}_k \quad : \quad & \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_d) \mapsto x_k \end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, d$ sind stetig. Die Funktion Proj_k heißt Projektion auf die k-te Komponente.

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz 4.4

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

Beweis.

Aus Satz 3.42 folgt (mit $n = 0$) $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$ für $|x| \leq 1$.

Sei nun x_0 eine beliebige reelle Zahl und (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x_0. Dann ist $(x_n - x_0)$ eine Nullfolge.

Mit der oben zitierten Abschätzung folgt

$$0 \leq |\exp(x_n - x_0) - 1| \leq 2\overbrace{|x_n - x_0|}^{\to 0}$$

und daraus

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - x_0) = 1.$$

Fortsetzung Beweis.

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x_0 + x_0) = \underbrace{\exp(x_n - x_0)}_{\to 1} \exp(x_0)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(x_0).$$

Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 4.5

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Weiterhin seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{array}{rcll} f+g & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x)+g(x) \\ \lambda \cdot f & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto \lambda \cdot f(x) \\ f \cdot g & : & D \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

stetig in x_0. Gilt außerdem $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0, mit $D' := \{x \in D | g(x) \neq 0\}$.

Beweis.

Der Satz folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen, siehe Satz 2.15.

Folgerung 4.6

(i) *Jedes Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

(ii) *Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome sind, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$.*

Beweis.

Übungsaufgabe.

Verknüpfung stetiger Funktionen

Satz 4.7

Es seien $d \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $E \subseteq \mathbb{R}$. Weiter seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$.

Wenn f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ ist, dann ist die Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig in x_0.

Zur Erinnerung:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Beweis.

Zu zeigen: Für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)).$$

- Sei also (x_n) eine beliebige konvergente Folge mit Grenzwert x_0.
- Da f stetig ist folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
- Damit ist $(f(x_n))$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $f(x_0)$.
- Weil g in $f(x_0)$ stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$.

Verknüpfungsbeispiele

Beispiel 4.8

- Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist auch

$$\begin{aligned} |f| \quad : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

  stetig.

  Begründung: $|f| = \text{abs} \circ f$ und die Funktion abs ist stetig, siehe Folie 267.
- Die Funktionen $g(x) := \exp(x)$ und $f(x) := -x^2$ sind stetig, also ist auch $g(f(x)) = \exp(-x^2)$ stetig.

ϵ-δ-Kriterium

Satz 4.9

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) *f ist stetig in x_0.*

(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Bemerkung: Bedingung (ii) aus Satz 4.9 lautet in Quantorenschreibweise

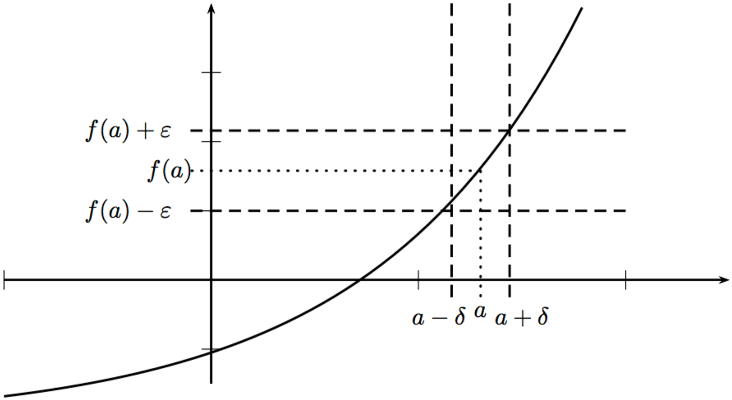
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Diskussion ϵ-δ-Kriterium

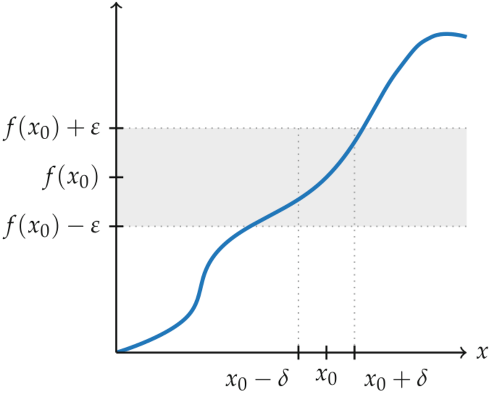
- Das ϵ-δ-Kriterium entspricht der anderen Sichtweise der Stetigkeit:
  Hinreichend kleine Änderungen des Arguments führen zu beliebig kleinen Änderungen in den Funktionswerten.
- Negation der Bedingung:

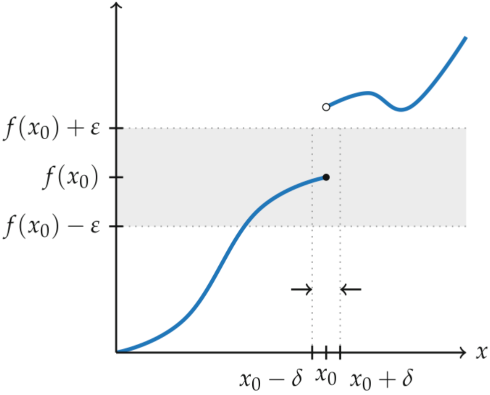
$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Veranschaulichung des ϵ-δ-Kriteriums



Stetig und nicht stetig mit dem ϵ-δ-Kriterium





Beweis für (ii) $\Rightarrow$ (i).

Es gilt (ii), also das ϵ-δ-Kriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt, also:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.

- Wir wählen ein $\delta > 0$ gemäß Voraussetzung.
- Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$.
- Nach Voraussetzung (mit $x = x_n$) folgt dann mit diesem n_0:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Beweis für (i) $\Rightarrow$ (ii)

Es gilt (i), also:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Ann.: (ii) gilt nicht.

- Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.
- Wir wählen ein solches ϵ und wenden es für $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ an.
- Wir erhalten für jedes n ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$.
- Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, eventuell existiert der Grenzwert auch gar nicht.
- Widerspruch!

Beispiele für die Arbeit mit dem ϵ-δ-Kriterium

Beispiel 4.10

- Wir zeigen, dass $f(x) = x$ stetig in einem beliebigen x_0 ist.

  Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $\delta = \epsilon$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

  $$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

- Wir zeigen, dass die Funktion von Folie 261 in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

  Wähle $\epsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = 1 + \frac{\delta}{2}$. Für dieses x gilt $|x - x_0| < \delta$ und weiterhin:

  $$|f(x) - f(1)| = |1 + \frac{\delta}{2} + 1 - 1| = |1 + \frac{\delta}{2}| \geq 1 = \epsilon.$$

Berührungspunkt

Definition 4.11

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^d$ heißt Berührungspunkt von D, wenn es eine Folge (a_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

Beispiel 4.12

Für ein offenes Intervall $(b, c) \subseteq \mathbb{R}$ ist jedes $a \in [b, c]$ ein Berührungspunkt, also auch die Intervallgrenzen.

Beispielfolgen für die linke und rechte Intervallgrenze:

$$a_n = b + \frac{1}{n} \quad \text{bzw.} \quad a_n = c - \frac{1}{n}.$$

Grenzwerte bei Funktionen

Definition 4.13

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^d, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^d$ ein Berührungspunkt von D und $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(i) Gilt für alle Folgen (x_n) in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

so schreiben wir dafür

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

und bezeichnen dies als den Grenzwert von f für x gegen a.

Fortsetzung Definition.

(ii) Nur für $d = 1$: Gilt für alle Folge (x_n) in D mit $x_n > a$ für alle n (bzw. $x_n < a$ für alle n)

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b,$$

dann schreiben wir

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = b, \quad \left(\text{bzw. } \lim_{x \nearrow a} f(x) = b \right).$$

und bezeichnen dies als den rechtsseitigen Grenzwert bzw. linksseitigen Grenzwert von f für x gegen a.

Fortsetzung Definition.

(iii) Nur für $d = 1$: Gilt für jede Folge (x_n) in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b,$$

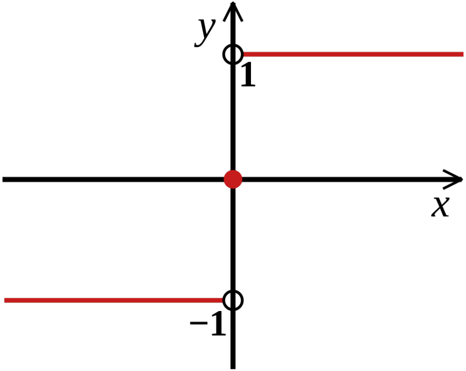
dann schreiben wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \quad \left(\text{bzw. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right).$$

und bezeichnen dies als den Grenzwert von f für x gegen ∞ bzw. $-\infty$.

Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Beispiele für Funktionsgrenzwerte

Beispiel 4.14

Funktion	linksseitiger G.	rechtsseitiger G.	Grenzwert
$\operatorname{sgn}(x)$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$	existiert nicht
$\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$	existiert nicht
$\frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{\lvert x\rvert} = \infty$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{\lvert x\rvert} = \infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\lvert x\rvert} = \infty$

Lemma zu Grenzwerten

Lemma 4.15

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a.$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a.$

Der Grenzwert von f für x gegen x_0 existiert also genau dann, wenn

- links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und
- diese Grenzwerte identisch sind.

Stetige Fortsetzung

Definition 4.16

Es seien $d \in \mathbb{N}, D \subseteq \mathbb{R}^d, x_0 \notin D$ ein Berührungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Wir sagen f ist stetig fortsetzbar in x_0, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Die Funktion $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ b & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

heißt stetige Fortsetzung von f in x_0.

Beispiel einer stetigen Fortsetzung

Beispiel 4.17

Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Beweis: Wegen

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$$

ist

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = h^{-1} \cdot (\exp(h) - 1) = h^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}.$$

Fortsetzung Beweis.

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(h)-1}{h}-1\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^{k-1}}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k+1}}{(k+2)!} = |h|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k}}{(k+2)!}\\
&\leq |h|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^{k}}{k!} = |h|\exp(|h|).
\end{aligned}
$$

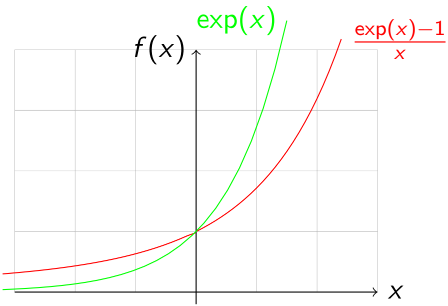
Da Absolutbetrag und Exponentialfunktion stetige Funktionen sind, folgt die Behauptung.

Folgerung 4.18

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

ist in 0 *stetig fortsetzbar.*



Vorbereitung für den Zwischenwertsatz

Lemma 4.19

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dann existiert ein $x \in (a, b)$ *mit* $f(x) = 0$.

Beweis.

Aus $f(a) \cdot f(b) < 0$ folgt, dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben müssen. O. B. d. A. sei $f(a) < 0 < f(b)$.

Wir konstruieren ein geeignetes x mit Hilfe einer Intervallschachtelung (siehe Satz 2.31).
Wir setzen $a_1 := a$, $b_1 := b$ und für $n \geq 2$

$$a_n := \begin{cases} a_{n-1}, & \text{falls } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Fortsetzung Beweis.

$$b_n := \begin{cases} \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \geq 0 \\ b_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

- $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$
- $a_n < b_n$
- $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$
- $b_n - a_n = 2^{-(n-1)}(b_1 - a_1)$ und damit $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

Nach Satz 2.31 existiert also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus dem Beweis von Satz 2.31 wissen wir, dass dieses x der gemeinsame Grenzwert der beiden Folgen (a_n) und (b_n) ist, also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Fortsetzung Beweis.

Jetzt ist f aber stetig. Daher gilt

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

woraus $f(x) = 0$ folgt. Wegen $f(a) \cdot f(b) \neq 0$ folgt auch noch $x \neq a \wedge x \neq b$ und somit $x \in (a, b)$.

Zwischenwertsatz

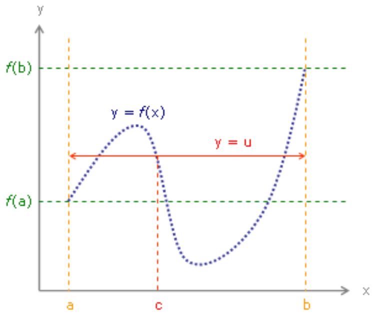
Satz 4.20

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < f(b)$.

Dann existiert für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ *ein* $x \in [a, b]$ *mit* $f(x) = y$.

Beweis.

Wende Lemma 4.19 auf die Funktion $g(x) := f(x) - y$ an.



Anwendung des Zwischenwertsatzes (I): Existenz von Nullstellen

Beispiel 4.21

Die Gleichung

$$x^5 + x + 1 = 0$$

hat eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Beweis:

- Die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ ist stetig.
- $f(-1) = -1, f(0) = 1$
- Also folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $c \in [-1, 0]$ existiert mit $f(c) = 0$.

Wie könnte man dieses c möglichst gut approximieren?

Anwendung des Zwischenwertsatzes (II): Existenz eines Fixpunktes

Satz 4.22

Für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ *gibt es ein* $c \in [0,1]$ *mit* $f(c) = c$.

Beweis.

Wende den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) := f(x) - x$ an. $\square$

Beschränkt, Maximum, Minimum

Definition 4.23

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) f heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

(ii) f heißt nach unten beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) \geq m \text{ für alle } x \in D.$$

(iii) f heißt beschränkt, wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$m \leq f(x) \leq M \text{ für alle } x \in D.$$

Fortsetzung Definition.

(iv) $x_0 \in D$ heißt Maximalstelle von f, wenn für alle $x \in D$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

gilt. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Maximum annimmt.

(v) $x_0 \in D$ heißt Minimalstelle von f, wenn für alle $x \in D$

$$f(x_0) \leq f(x)$$

gilt. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Minimum annimmt.

(vi) $x_0 \in D$ heißt Extremstelle von f, wenn x_0 eine Maximal- oder Minimalstelle ist. Man sagt dann auch, dass f in x_0 ein Extremum annimmt.

Extremwertsatz von Weierstraß

Satz 4.24

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und hat in $[a,b]$ eine Maximal- und eine Minimalstelle.

Bemerkungen:

- Der Satz ist im Allgemeinen für
$$f: \begin{array}{l} (a,b) \to \mathbb{R} \\ [a,b) \to \mathbb{R} \\ (a,b] \to \mathbb{R} \end{array}$$
falsch!
- Wir haben hier nur einen Spezialfall des Extremwertsatzes für Funktionen mit einer Veränderlichung formuliert.

Beweis.

O. B. d. A. zeigen wir nur die Beschränkung nach oben und die Existenz einer Maximalstelle.

Ann.: f ist nicht nach oben beschränkt.

- D. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y_n \in f([a, b])$ mit $y_n > n$.
- Zu jedem y_n existiert ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$. Wir betrachten jetzt die Folge (x_n).
- (x_n) liegt in $[a, b]$ und ist damit beschränkt.
- Nach dem Satz von Bolzano-Weiterstraß (Satz 2.35) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}).
- Sei $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
- Da alle $x_{n_k} \in [a, b]$ sind, folgt $x_0 \in [a, b]$ (siehe Satz 2.22).
- Da f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.
- Nach unserer Annahme ist $f(x_{n_k})$ aber nach oben unbeschränkt und damit nicht konvergent. Widerspruch.

Fortsetzung Beweis.

Es sei $M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$. Wir müssen zeigen, dass $M \in f([a, b])$ ist.

- Aus der Supremumseigenschaft folgt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $y_\epsilon \in f([a, b])$ mit $M - \epsilon \leq y_\epsilon < M$.
- Wir betrachten $\epsilon = \frac{1}{n}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) = y_{\frac{1}{n}} < M.$$

- Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.
- Die Folge (x_n) ist beschränkt und somit gibt es wieder eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}).
- Es sei $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Es gilt wieder $x_0 \in [a, b]$.
- Aus der Stetigkeit von f folgt

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Die Aussage des Extremwertsatzes lässt sich auch wie folgt formulieren.

Folgerung 4.25

Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion ist wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Genauer: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, so existieren* $c, d \in \mathbb{R}, c < d$, *mit* $f([a, b]) = [c, d]$.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 4.26

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen.

(i) Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

gilt, das heißt

$$\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

(ii) Die Folge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Punktweise Konvergenz

- $\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
- Man beachte: Allquantor und Existenzquantor dürfen in der Prädikatenlogik nicht vertauscht werden.

  $$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$$

  In der linken Formel hängt das y von x ab, in der rechten Formel dagegen ist das y unabhängig von x.
- Bei der punktweise Konvergenz hängt das n_0 also von x ab.

Gleichmäßige Konvergenz

- $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
- Das n_0 ist hier unabhängig von x.

Äquivalente Charakterisierung der gleichmäßigen Konvergenz:

Lemma 4.27

Eine Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

gilt.

Beispiel einer Funktionenfolge (I)

Beispiel 4.28

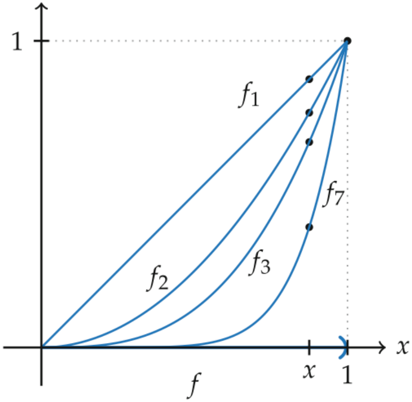
Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Für $x \in [0,1]$ gilt

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Die Folge stetiger Funktionen (f_n) konvergiert also punktweise gegen eine unstetige Funktion f.

Wir werden gleich sehen, dass damit keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen kann.

Graphen von $f_n(x) = x^n$



Beispiel einer Funktionenfolge (II)

Beispiel 4.29

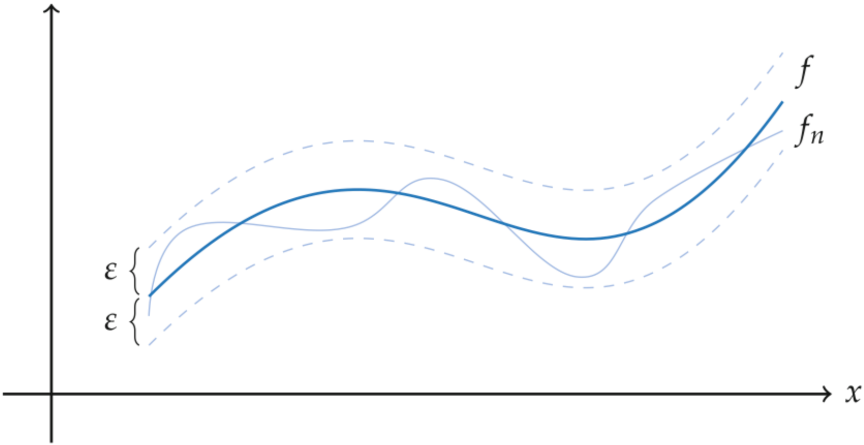
Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{n}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$

Hier konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

Beweis: Für $\epsilon > 0$ wähle $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$.

Veranschaulichung der gleichmäßigen Konvergenz



Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz 4.30

Wenn eine Folge stetiger Funktionen (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig.

Beweis.

Wir zeigen die Stetigkeit der Grenzfunktion mit dem ϵ-δ-Kriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da (f_n) gleichmäßig konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle x, x' gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{und} \quad |f(x') - f_n(x')| < \epsilon.$$

Fortsetzung Beweis.

Da f_n stetig ist, existiert zu ϵ ein $\delta > 0$, so dass für alle x, x' mit $|x - x'| < \delta$ gilt:

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x') + f_n(x') - f(x')| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Stetigkeit von Potenzreihen (I)

Satz 4.31

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} f_n : [x_0 - r, x_0 + r] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \end{aligned}$$

für alle $0 < r < R$ *gleichmäßig gegen*

$$\begin{aligned} f : [x_0 - r, x_0 + r] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \end{aligned}$$

Beweis.

- Für $\rho < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$.
- Also ist die Folge $(a_k \rho^k)$ eine Nullfolge und damit konvergent.
- Also ist sie auch beschränkt, d. h. $|a_k \rho^k| \leq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- Für x mit $|x - x_0| \leq r$ und $r < \rho < R$ gilt also

  $$\left| a_k (x - x_0)^k \right| = \left| a_k \rho^k \frac{(x - x_0)^k}{\rho^k} \right| \leq K \theta^k$$

  mit $0 < \theta := \frac{r}{\rho} < 1$.
- Die (geometrische) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} K \theta^k$ ist konvergent.

Fortsetzung Beweis.

- Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{\infty} K\theta^k < \epsilon$.
- Für alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ und alle $n \geq n_0$ gilt damit:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} K\theta^k \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Stetigkeit von Potenzreihen (II)

Aus Satz 4.30 und Satz 4.31 folgt, dass alle Potenzreihen im Inneren des Konvergenzradius stetig sind.

Folgerung 4.32

Es sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$.

Dann ist die Funktion $P : (-R, R) \to \mathbb{R}, x \mapsto P(x)$ *stetig.*

Bemerkung: Damit sind insbesondere die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Stetige Fortsetzbarkeit zweier Funktionen

Lemma 4.33

Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

und

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 1.$$

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Beweis des ersten Grenzwerts.

Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}.$$

Für die Potenzreihe rechts gilt $R = \infty$. Sie konvergiert im Entwicklungspunkt 0 und nimmt dort den Wert 1 an. Da die Potenzreihe stetig ist, folgt die Behauptung.

Beweis des Identitätssatz für Potenzreihen (I)

Lemma 4.34

Es sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und* (α_k) *eine Nullfolge mit* $\alpha_k \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $k \geq k_0$

$$P(\alpha_k) = 0$$

gilt, dann folgt

$$a_n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis.

Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.

$n = 0$:

$$a_0 = P(0) = \lim_{k\to\infty} P(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

$n \to n+1$: Aus der I.V. folgt $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Es sei

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x^{n+1}} = a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots .$$

Damit folgt nun

$$a_{n+1} = Q(0) = \lim_{k\to\infty} Q(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{P(\alpha_k)}{(\alpha_k)^{n+1}} = 0.$$

Beweis des Identitätssatzes für Potenzreihen (II)

Beweis von Satz 3.56

Es sei

$$h(z) := f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n.$$

N. V. gilt dann $h(z) = 0$ für alle $0 \le |z| < \min\{R_f, R_g\} =: R$, insbesondere also $h(\alpha_k) = 0$ für

$$\alpha_k := \frac{R}{2k}.$$

Mit Lemma 4.34 folgt $(a_n - b_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Identitätssatz für Polynomfunktionen

Folgerung 4.35

Es seien

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n \\ g(z) &= b_0 + b_1 z + \cdots b_m z^m \end{aligned}$$

zwei Polynomfunktionen mit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) *Für alle* $z \in \mathbb{K}$ *gilt* $f(z) = g(z)$.

(ii) $m = n$ *und* $a_k = b_k$ *für alle* $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Monotone Funktionen

Definition 4.36

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

(i) monoton wachsend, wenn für alle $x, x' \in D$ gilt

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

Wenn sogar die strikte Ungleichung $f(x) < f(x')$ folgt, dann nennen wir f streng monoton wachsend.

(ii) monoton fallend, wenn für alle $x, x' \in D$ gilt

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

Wenn sogar die strikte Ungleichung $f(x) > f(x')$ folgt, dann nennen wir f streng monoton fallend.

Existenz einer Umkehrfunktion

Satz 4.37

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit* $A := f(a)$ *und* $B := f(b)$.

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) f *bildet das Intervall* $[a, b]$ *bijektiv auf* $[A, B]$ *ab und besitzt daher eine Umkehrfunktion* f^{-1}.

(ii) *Die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [A, B] \to \mathbb{R}$ *ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis von (i).

- Aus dem Zwischenwertsatz folgt $f([a, b]) \supseteq [A, B]$.
- Für $a < x < b$ folgt wegen der strengen Monotonie $A = f(a) < f(x) < f(b) = B$ und somit $f([a, b]) \subseteq [A, B]$.
- Aus $f([a, b]) \supseteq [A, B]$ und $f([a, b]) \subseteq [A, B]$ folgt $f([a, b]) = [A, B]$. Insbesondere ist damit die Abbildung $f : [a, b] \to [A, B]$ surjektiv.
- Es sei nun $x \neq x'$. Dann gilt entweder $x < x'$ oder $x > x'$. Aus $x < x'$ folgt wegen der stregen Monotonie $f(x) < f(x')$ und damit $f(x) \neq f(x')$. Analog folgt aus $x > x'$ ebenfalls $f(x) \neq f(x')$. Also ist f injektiv.
- Wenn die Funktion $f : [a, b] \to [A, B]$ injektiv und surjektiv ist, ist sie bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$.

Beweis von (ii).

Strenge Monotonie der Umkehrfunktion

- Es seien $y, y' \in [A, B]$ mit $y < y'$. Dann existieren $x, x' \in [a, b]$ mit $f^{-1}(y) = x$ und $f^{-1}(y') = x'$. Aus der Eigenschaft der Umkehrfunktion folgt $f(x) = y$ und $f(x') = y'$.
- Ann.: $x \geq x'$. Dann würde aus der Monotonie $y = f(x) \geq f(x') = y'$ folgen. Widerspruch! Also folgt aus $y < y'$ auch $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

- Wir zeigen mit dem ϵ-δ-Kriterium, dass f^{-1} stetig in y_0 ist.
- Es sei $y_0 \in [A, B]$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren:

$$x_0 := f^{-1}(y_0), x_- := x_0 - \epsilon, x_+ := x_0 + \epsilon.$$

Damit gilt $x_- < x_0 < x_+$ und wegen des streng monotonen Wachstums $y_- := f(x_-) < y_0 < f(x_+) =: y_+$.

Fortsetzung Beweis (ii).

(ii) Wähle $\delta \leq \min\{y_+ - y_0, y_0 - y_-\}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad y_- \leq y_0 - \delta \text{ und } y_+ \geq y_0 + \delta \\ &\Rightarrow \quad y_- \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_+ \text{ für alle } |y - y_0| < \delta \end{aligned}$$

Wegen des streng monotonen Wachstums folgt damit aus $|y - y_0| < \delta$

$$x_- < f^{-1}(y) < x_+,$$

also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$.

Monotonie und Bijektivität der Exponentialfunktion

Lemma 4.38

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, bildet* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}_+$ *ab und besitzt eine Umkehrfunktion* $\exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Beweis.

Für $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x > 1.$$

Damit folgt für $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x < x'$

$$\exp(x') = \exp(x' - x + x) = \overbrace{\exp(x' - x)}^{>1} \exp(x) > \exp(x).$$

Also ist exp streng monoton wachsend.

Fortsetzung Beweis.

Wegen $\exp(x) \geq 1 + x$ gilt $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Weiterhin gilt

$$0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{1+x},$$

woraus $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ folgt. Wegen $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wegen der Stetigkeit von exp folgt

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

Die Existenz der Umkehrfunktion folgt dann aus Satz 4.37 (i).

Logarithmus

Definition 4.39

Die Funktion

$$\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

sei die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Die Funktion heißt der (natürliche) Logarithmus.

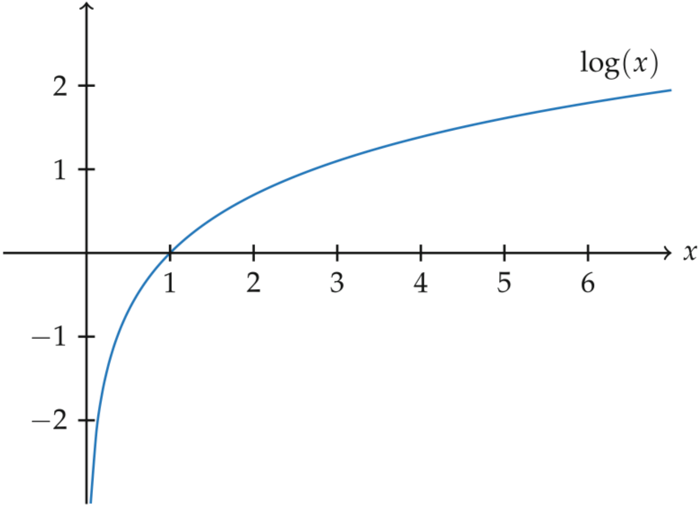
Folgerung 4.40

Die Funktion $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis.

Folgt direkt aus Satz 4.37 und Lemma 4.38.

Veranschaulichung des Logarithmus



Additionstheorem für den Logarithmus

Satz 4.41

Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Beweis.

Es seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \exp(\alpha) \quad \text{und} \quad y = \exp(\beta)$$

und damit gilt $\log(x) = \alpha$ und $\log(y) = \beta$. Es folgt

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log(\exp(\alpha)\exp(\beta)) \\ &= \log(\exp(\alpha + \beta)) \\ &= \alpha + \beta \\ &= \log(x) + \log(y). \end{aligned}$$

Verallgemeinerung der Potenzen (I)

Lemma 4.42

Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ identisch sind (also $f_1(q) = f_2(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$), dann sind sie auch auf $\mathbb{R}$ identisch (also $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Beweis.

Man mache sich folgendes klar: Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 folgt dann mit solch einer Folge (x_n):

$$f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = f_2(x).$$

Verallgemeinerung der Potenzen (II)

Satz 4.43

Es sei $a > 0$. Wir definieren die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

durch

$$f_a(x) := \exp(x \cdot \log(a)).$$

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$f_a(r) = a^r.$$

Beweis.

Mit vollständiger Induktion zeigen wir zunächst, dass $f_a(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$n = 1$: $f_a(1) = \exp(1 \cdot \log(a)) = \exp(\log(a)) = a$.

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f_a(n+1) &= \exp((n+1) \cdot \log(a)) \\ &= \exp(n \cdot \log(a) + \log(a)) \\ &= \exp(n \cdot \log(a)) \cdot \exp(\log(a)) \\ &= f_a(n) \cdot f_a(1) \\ &= a^n \cdot a = a^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung Beweis.

Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
f_a(-n) &= \exp(-n \cdot \log(a)) \\
&= \frac{1}{\exp(n \cdot \log(a))} \\
&= \frac{1}{f_a(n)} \\
&= \frac{1}{a^n} \\
&= a^{-n}.
\end{aligned}
$$

Also gilt $f_a(n) = a^n$ sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Fortsetzung Beweis.

Es sei nun $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f_a(r))^q &= (\exp(r \cdot \log(a)))^q \\
&= \exp(qr \cdot \log(a)) \\
&= \exp(p \cdot \log(a)) \\
&= f_a(p) \\
&= a^p.
\end{aligned}$$

Also ist $f_a(r) = \sqrt[q]{a^p} = a^r$.

Verallgemeinerung der Potenzen (III)

Definition 4.44

Für $a > 0$ und beliebige $x \in \mathbb{R}$ sei

$$a^x := \exp(x \cdot \log(a)).$$

Folgerung 4.45

Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $e^x = \exp(x)$.

Beweis.

$e^x = \exp(x \cdot \log(e)) = \exp(x \cdot \log(\exp(1))) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$.

Potenzgesetze

Satz 4.46

Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ *und alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Rechenregeln für den Logarithmus

Satz 4.47

(i) *Für alle* $a \in \mathbb{R}_+$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a).$$

(ii) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt*

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

Beweis.

Tafel ✎.

Logarithmen zu anderen Basen

Definition 4.48

Für $a \in \mathbb{R}_+$ sei $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$.

Der Wert $\log_a(x)$ heißt Logarithmus von x zur Basis a.

Also ist $\log_a(x)$ die Zahl y, die die Gleichung $a^y = x$ löst.

Einen Logarithmus von x zur Basis a können wir stets mit dem natürlichen Logarithmus ausdrücken.

Lemma 4.49

Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Wichtige Grenzwerte

Satz 4.50

(i) *Für alle $a > 0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(ii) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Polynomfunktion.

(iii)

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$$

Fortsetzung Satz.

(iv) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha \log(x) = 0.$$

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede Polynomfunktion.

(v) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0.$$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log(a)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a)\right) \quad \text{weil exp stetig} \\
&= \exp(0) = 1.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

(ii) Für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Daraus folgt

$$\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty.$$

Die zweite Aussage folgt durch Invertieren.

Fortsetzung Beweis.

(iii)

- Aus der stregen Monotonie der Funktion $\log(x)$ folgt für beliebige $x, S \in \mathbb{R}_+$ mit $x > e^S$ die Ungleichung $\log(x) > S$.
- Also wächst der Logarithmus über jede Schranke hinaus, d. h.

$$\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty.$$

- Betrachten wir weiter

$$\lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\lim_{x \searrow 0} \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

und setzen $y := \frac{1}{x}$.

- Dann ist $x \searrow 0$ äquivalent zu $y \to \infty$. Also gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\lim_{y \to \infty} \log(y) = -\infty.$$

Fortsetzung Beweis.

(iv) Wegen (iii) ist $x \to \infty$ äquivalent zu $y \to \infty$ mit $y = \alpha \log(x)$. Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\exp(\alpha \log(x))} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\alpha} \frac{1}{\exp(y)} \stackrel{\text{(ii)}}{=} 0.$$

Aus

$$x^\alpha \log(x) = \frac{-\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

ergibt sich die zweite Behauptung.

Fortsetzung Beweis.

(v) Folgt aus (iv), da

$$0 \leq x^{-\alpha} \leq \frac{\log(x)}{x^{\alpha}}$$

für alle $x \geq \mathrm{e}$ und

$$0 \leq x^{\alpha} \leq -x^{\alpha} \log(x)$$

für alle $0 \leq x \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt.

Alternative Darstellung der Exponentialfunktion

Satz 4.51

Es gilt

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Bemerkung:

- Mit diesem Satz haben wir eine weitere Möglichkeit, $\exp(x)$ näherungsweise zu bestimmen.
- Allerdings konvergieren die Partialsummen der Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ deutlich schneller als die oben angegebene Folge.

Vektorraum der stetigen Funktionen

Definition 4.52

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$.

Mit $\mathcal{C}(D)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen, also

$$\mathcal{C}(D) = \{f | f : D \to \mathbb{R}\}.$$

Satz 4.53

$\mathcal{C}(D)$ bildet mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

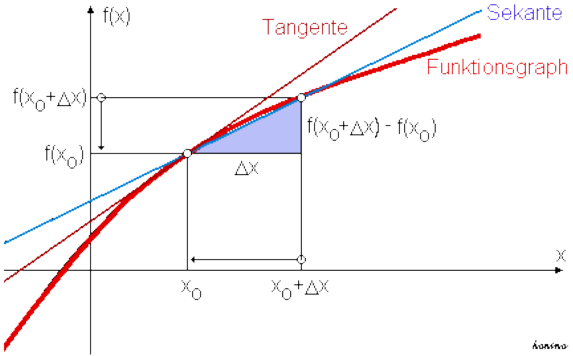
(für alle $f, g \in \mathcal{C}(D)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$) einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Zusammenfassung

- Stetigkeit mittels Konvergenz von Folgen: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für alle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
- Stetigkeit als beliebige kleine Funktionsänderung bei hinreichend kleiner Argumentsänderung: ϵ-δ-Kriterium
- Funktionsgrenzwerte und stetige Fortsetzung
- Zwischenwertsatz
- Extremwertsatz von Weierstraß
- gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen und Stetigkeit von Potenzreihen
- Stetigkeit der Umkehrfunktion und Definition des Logarithmus
- $\exp(x)$ wächst schneller als jedes Polynom, $\log(x)$ wächst langsamer als jedes Polynom.

Kapitel 5

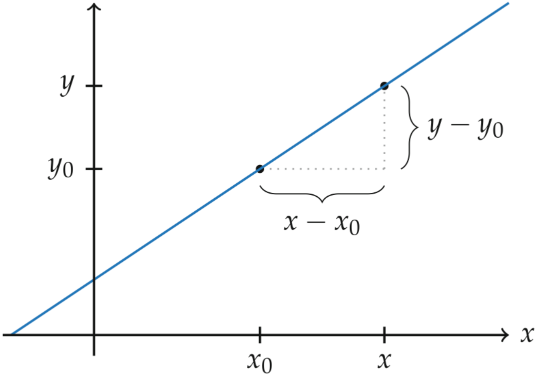
Differenzierbarkeit und Taylorentwicklung



Inhalt

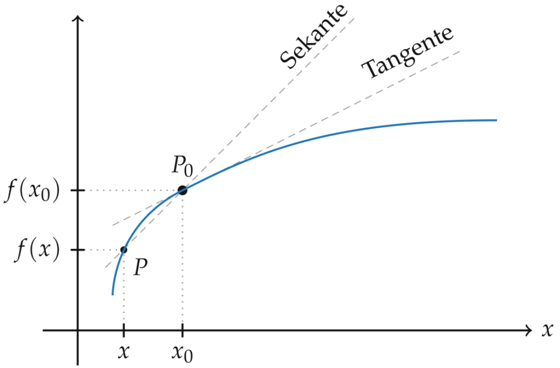
Vorüberlegung: Steigung einer Geraden

- Steigung s einer Geraden ermittelbar mit zwei beliebigen Punkten (x, y) und (x_0, y_0):
$$s = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
- Geradengleichung: $x \mapsto y_0 + s(x - x_0)$



Vorüberlegung: Tangente

- Für eine Funktion f wollen wir eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ legen.
- Um die Steigung der Tangente zu ermitteln, legen wir Sekanten durch P_0 und einen Punkt $P = (x, f(x))$ und lassen x gegen x_0 gehen.
- Die Steigung der Tangente ergibt sich dann als Grenzwert der Sekantensteigungen.



Definition der Ableitung

Definition 5.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Wir nennen dann $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0, und die Gerade durch den Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

f heißt auf I differenzierbar, wenn f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkungen zur Ableitung

- Zum Rechnen ist manchmal die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

besser geeignet.

- Die Tangente entspricht der Funktion

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Für einen Randpunkt des Intervalls I ist der Grenzwert als einseitiger Grenzwert zu verstehen.

Differenzenquotient und Differentialquotient

- Den Quotienten
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
bezeichnet man auch als Differenzenquotienten.
- Der Differenzenquotient ist die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.
- Die Ableitung $f'(x_0)$ ist also der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$.
- Diesen Grenzwert, also die Ableitung $f'(x_0)$, bezeichnet man auch als Differentialquotienten an der Stelle x_0.

Beispiele

Beispiel 5.2

In den folgenden Beispielen gelte stets $I = \mathbb{R}$.

(i) Es sei $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

Also $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $f(x) = c \cdot x$. Dann erhalten wir

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c \cdot (x_0 + h) - c \cdot x_0}{h} = \frac{ch}{h} = c.$$

Also $f'(x_0) = c$.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Es sei $f(x) = x^2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2x_0.\end{aligned}$$

Also $f'(x_0) = 2x_0$.

Fortsetzung Beispiel.

(iv) Es sei $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$. Dann folgt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h \geq 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

Also

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -1$$

Da die beiden Grenzwert unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert für $h \to 0$ nicht.

Der Funktionsgraph hat im Punkt $(0,0)$ keine Tangente, da er dort eine "Ecke" aufweist.

Links- und rechtsseitige Ableitung (1)

Definition 5.3

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

$$f'(x_0+) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt rechtsseitige Ableitung,

$$f'(x_0-) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt linksseitige Ableitung von f in x_0.

Links- und rechtsseitige Ableitung (2)

Lemma 5.4

Es existiere ein $\epsilon > 0$ *mit* $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq I$.

Dann ist f *in* x_0 *genau dann differenzierbar, wenn links- und rechtsseitige Ableitungen existieren und gleich sind.*

Differenzierbarkeit ist stärker als Stetigkeit

Satz 5.5

Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist f auch stetig in x_0.

Beweis.

Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

also $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ableitung als momentane Änderungsrate

Die Ableitung $f'(x_0)$ lässt sich als momentane Änderungsrate von f bei x_0 interpretieren.

Beispiel: x bezeichne die Zeit und $f(x)$ die zurückgelegte Strecke eines Fahrzeugs zum Zeitpunkt x. Dann ist

- $f(x) - f(x_0)$ die Strecke, die im Zeitraum von x_0 bis x zurückgelegt wurde,
- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum und
- $f'(x_0)$ die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0.

Linearität der Ableitung

Satz 5.6

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$.

(i) *Sind f und g differenzierbar in x_0, dann ist auch die Funktion $f + g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *Ist f differenzierbar in x_0 und $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch die Funktion $c \cdot f$ differenzierbar in x_0 und es gilt*
$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Beweis.

Folgt direkt aus den Grenzwertregeln. $\square$

Beispiel 5.7

Es sei $f(x) = 4x^2 - 7x + 5$.

Dann folgt gemäß Beispiel 5.2 und den Linearitätsregeln dass f differenzierbar ist und es gilt

$$f'(x_0) = 4 \cdot 2x_0 - 7 + 0 = 8x_0 - 7.$$

Produkt- und Quotientenregel

Satz 5.8

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

(i) *Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(ii) *Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Beweis der Produktregel.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}$$

- Die Brüche sind die Differenzenquotienten von f und g an der Stelle x_0. N.V. existieren deren Grenzwerte für $x \to x_0$ und sind gleich $f'(x_0)$ bzw. $g'(x_0)$.
- $f(x_0)$ ist ein konstanter Faktor.
- Da g differenzierbar in x_0 ist, ist g dort auch stetig, d. h. es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Fortsetzung Beweis der Produktregel.

Mit den Grenzwertregeln folgt

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Beweis der Quotientenregel ist Übungsaufgabe.

Schreibweisen

- Zur Vereinfachung schreiben wir x statt x_0, wenn es nicht zur Verwirrung führt. Insbesondere also $f'(x)$.
- Beispiel: Für $f(x) = x^2$ gilt also $f'(x) = 2x$.
- In der Literatur findet man noch weitere Schreibweisen:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = D\,f = \dot{x}(t)$$

Beispiel 5.9

- Speziallfall der Quotientenregeln: Dort wo f differenzierbar und ungleich Null ist, gilt

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

- Für $n \in \mathbb{Z}$ und $f(x) = x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.
  - $n = 0$: Siehe Beispiel 5.2.
  - $n > 0$: Nachweis mit vollständiger Induktion und Produktregel.
  - $n < 0$: $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ und dann Spezialfall der Quotientenregeln anwenden.

Kettenregel

Satz 5.10

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $x_0 \in I$ und $g : I \to J$ und $f : J \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Wenn g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist auch $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Zur Erinnerung:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Beweisskizze.

Die folgende Rechnung deutet die Herleitung der Formel an, ist aber kein korrekter Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

für $y_0 := g(x_0)$ und $y := g(x)$. Wenn wir jetzt für beide Faktoren die Grenzwerte bilden, erhalten wir $f'(y_0)\cdot g'(x_0)$ bzw. mit $y_0 = g(x_0)$ die Formel $f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

Beispiel 5.11

Es sei $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Wie lautet $f'(x)$?

Sei

$$g(x) = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y}.$$

Dann ist

$$g'(x) = 2x \quad \text{und} \quad h'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

und damit $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))$. Mit der Kettenregel ergibt sich

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 5.12

Sei

- $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $y_0 \in I$,
- $f : I \to \mathbb{R}$ *eine streng monotone und stetige Funktion, die in* y_0 *differenzierbar ist,*
- $I' = f(I)$ *und* $f^{-1} : I' \to I$ *die Umkehrfunktion von* f.

Dann ist f^{-1} *genau dann differenzierbar in* $x_0 := f(y_0)$, *wenn* $f'(y_0) \neq 0$ *gilt, mit*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Beweisskizze.

Setzt man voraus, dass f^{-1} differenzierbar ist, ergibt sich die Formel für die Ableitung aus der Kettenregel. Aus

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

folgt durch Ableitung beider Seiten (links mit der Kettenregel)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

und damit $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Dies ist aber nur eine Begründung für die Formel und kein Beweis von Satz 5.12, denn die Differenzierbarkeit von f^{-1} müsste vorher gezeigt werden.

Beispiel 5.13

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(y) = y^2$. Dann ist $I = I' = [0, \infty)$.

Auflösen von $x = y^2$ nach y gibt $y = \sqrt{x}$. Wegen $x \in [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist hier die zweite Lösung $-\sqrt{x}$ nicht relevant. Es folgt $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Es gilt $f'(y) = 2y$. Damit haben wir $f'(0) = 0$ und f^{-1} ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Für $y > 0$ ist $f'(y) \neq 0$, also

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Damit kennen wir jetzt die Ableitung der Wurzelfunktion.

Ableitung einer Potenzreihe

Satz 5.14

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *habe den Konvergenzradius* $R > 0$.

- *Dann hat auch die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *den Konvergenzradius* R.
- *Für alle* x *mit* $|x| < R$ *gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Bemerkungen zur Ableitung von Potenzreihen

- Wir dürfen also die Grenzwerte vertauschen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' .$$

- Die rechte Summe beginnt wegen $(a_0 x^0)' = 0$ erst bei $n = 1$.
- Satz 5.14 ist eine Folgerung aus dem allgemeineren Satz 5.16. deshalb hier kein Beweis.
- Satz 5.14 erlaubt es uns, für viele wichtige Funktionen die Ableitung zu bestimmen (siehe folgende Beispiele).

Beispiel 5.15

- Ableitung der Exponentialfunktion: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$(\exp(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

- Ableitung des Logarithmus: Mit $f(x) = \exp(x)$ folgt $\log(x) = f^{-1}(x)$ und damit nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(\log(x))' = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

Fortsetzung Beispiel.

- Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion: Sei $a > 0$. Für $f(x) = a^x$ liefert uns die Kettenregel

$$(a^x)' = (\exp(\log(a) \cdot x))' = \exp(\log(a) \cdot x) \cdot \log(a) = a^x \cdot \log(a).$$

- Ableitung der allgemeinen Potenz: Sei $b \in \mathbb{R}$. Für $f(x) = x^b$ liefert uns die Kettenregel

$$\left(x^b\right)' = (\exp(\log(x) \cdot b))' = \exp(\log(x) \cdot b) \cdot \frac{b}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}.$$

Fortsetzung Beispiel.

- Ableitung des Cosinus:

$$
\begin{aligned}
(\cos(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= (-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

Ableitung und Funktionenfolgen

Satz 5.16

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn

- *die Folge $(f_n(x_0))$ für ein $x_0 \in I$ konvergiert und*
- *die Funktionenfolge (f_n') gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert,*

dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f und es gilt $f' = g = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Wir können also wieder die Grenzwerte vertauschen:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweisskizze zu Satz 5.14

- Wegen
$$\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^{n+1}}{na_nx^n}\right| = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$$
haben beide Potenzreihen den gleichen Konvergenzradius.
- Die abgeleitete Reihe konvergiert für $x = 0$ (gegen a_1).
- Potenzreihen konvergieren innerhalb des Konvergenzradius gleichmäßig gegen die Grenzfunktion, also auch die abgeleitete Reihe.

Beispiel 5.17

In Beispiel 3.30 haben wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes der geometrischen Reihe mit sich selbst gezeigt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Mit Hilfe von Satz 5.16 gelingt dieser Nachweis deutlich einfacher.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n
\end{aligned}$$

Beispiel 5.18

Aus dem Beispiel 3.34 wissen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Mit Satz 5.16 folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{6}{(1-x)^4} = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)x^n)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n.\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Definition 5.19

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

Wenn die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls auf I differenzierbar ist, dann heißt f zweimal differenzierbar auf I und wir schreiben

$$f''(x) := (f')'(x).$$

Die Funktion f'' ist die zweite Ableitung von f.

Allgemein definieren wir die n-te Ableitung $f^{(n)}$ (falls existent) für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f, \\ f^{(n)} &:= (f^{(n-1)})' \text{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Beispiel 5.20

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht zweimal differenzierbar.

- f ist für $x \neq 0$ differenzierbar, weil die Funktionen x^2 und $-x^2$ differenzierbar sind.
- f ist in $x = 0$ differenzierbar, weil linke und rechte Ableitung existieren und identisch sind: $f'(0-) = 0 = f'(0+)$.
- $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

  Damit ist f' in 0 nicht differenzierbar, da linke und rechte Ableitung von f' in 0 ungleich sind: $f''(0-) = -2 \neq 2 = f''(0+)$.

Unendlich oft differenzierbar

Definition 5.21

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt unendlich oft differenzierbar, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert.

Beispiel 5.22

- Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius R ist unendlich oft differenzierbar für $|x| < R$. Dies folgt durch n-fache Anwendung von Satz 5.14.
- Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus, Cosinus und die Potenzfunktion x^b sind alle unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ bzw. $(0, \infty)$. Dies folgt aus den in Beispiel 5.15 hergeleiteten Formeln.
- Polynome sind unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel folgt für $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n\,x^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)\,x^{n-2} \\
&\vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,x = n!\,x \\
f^{(n)} &= n! \\
f^{(n+1)} &= f^{(n+2)} = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Extrema

Definition 5.23

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

(i) x_0 heißt globales Maximum bzw. globales Minimum, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x).$$

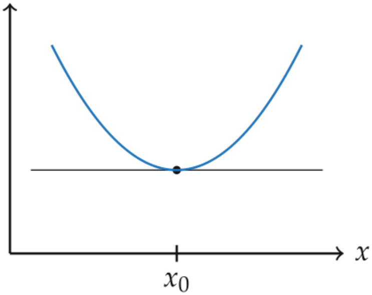
(ii) x_0 heißt lokales Maximum bzw. lokales Minimum von f, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

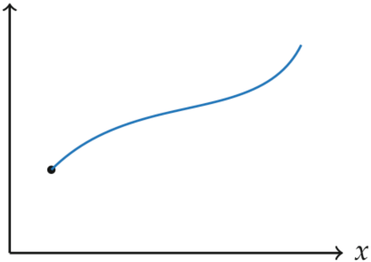
(iii) x_0 ist globales Extremum, wenn x_0 globales Minimum oder Maximum ist.

(iv) x_0 ist lokales Extremum, wenn x_0 lokales Minimum oder Maximum ist.

Extrema und Ableitung (1)



Minimum im Inneren des Definitionsbereiches



Minimum am Rand des Definitionsbereiches

Bemerkung: x_0 heißt innerer Punkt von D gdw. ein $\epsilon > 0$ existiert mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$.

Extrema und Ableitung (2)

Satz 5.24

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D differenzierbare Funktion und x_0 sei ein innerer Punkt von D. Dann gilt:

$$x_0 \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Beweis.

- O.B.d.A. betrachten wir ein lokales Minimum: Es existiert also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$.
- Für ein $x \in D$ mit $x_0 - \epsilon < x < x_0$ folgt daher

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Fortsetzung Beweis.

- Für ein $x \in D$ mit $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

- Wenn f differenzierbar und x_0 ein innerer Punkt ist, müssen die rechts- und linksseitige Ableitung in x_0 existieren. Aus obigen Ungleichungen folgt:

$$f'(x_0+) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \geq \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0-).$$

- Wenn f differenzierbar ist, müssen rechts- und linksseitige Ableitung aber identisch ein. Somit folgt

$$f'(x_0) = f'(x_0+) = 0 = f'(x_0-).$$

Beispiel 5.25

Welches Rechteck mit einem Umfang 2 hat maximale, welches minimale Fläche?

- Seien x und y die Seitenlängen. Der Umfang ist dann $2x + 2y = 2$. Daraus folgt $y = 1 - x$.
- Der Flächeninhalt beträgt $xy = x(1 - x)$. Wir müssen also die Extrema der Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(1 - x)$ bestimmen.
- Es gilt $f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für $0 < x < 1$. Also sind 0 und 1 globale Minima.
- Da f stetig ist, muss f in einem Punkt $0 < x < 1$ ein globales Maximum haben.
- Das globale Maximum muss auch lokales Maximum sein. Da f auf $[0, 1]$ differenzierbar ist, muss im Maximum $f'(x) = 1 - 2x = 0$ gelten. Hieraus folgt $x = \frac{1}{2}$ als eindeutige Lösung.
- Also ist $x = \frac{1}{2}$ das Maximum von f.

Stationäre Punkte

Bemerkung: $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum (bei einer differenzierbaren Funktion).

Definition 5.26

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$.

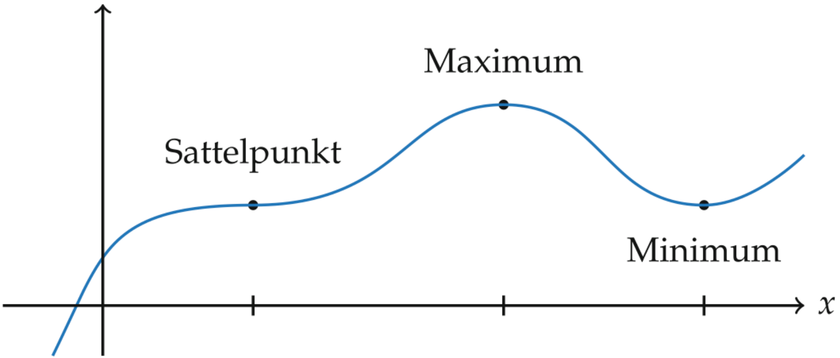
x_0 heißt stationärer Punkt von f, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt.

Ein stationärer Punkt x_0 heißt Sattelpunkt, wenn x_0 ein innerer Punkt ist und ein $\epsilon > 0$ existiert (mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$), so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- Für alle $x_0 - \epsilon < x < x_0$ gilt $f(x) < f(x_0)$ und
- für alle $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ gilt $f(x) > f(x_0)$

oder umgekehrt.

Sattelpunkt, Maximum, Minimum



Satz von Rolle

Lemma 5.27

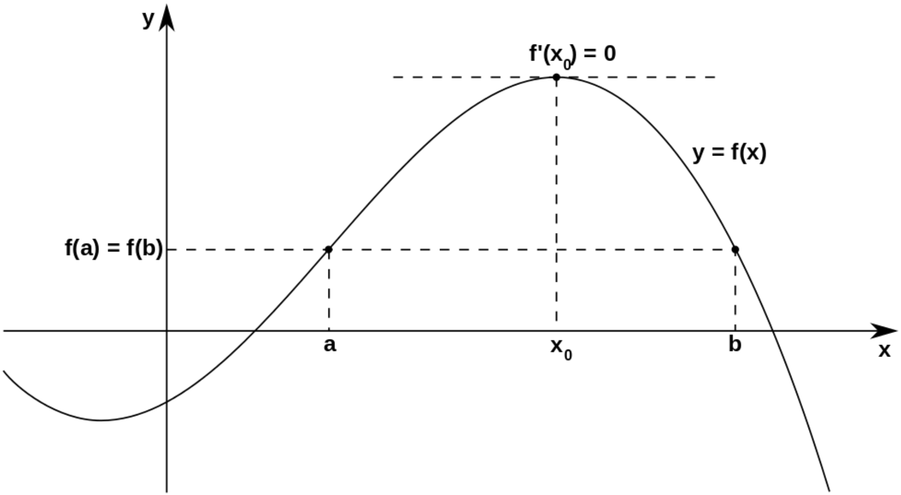
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$.

Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis.

- Wenn $f(x)$ konstant ist, dann folgt $f'(x) = 0$ und der Satz ist für diesen Fall beweisen. Wir können daher f als nicht konstant voraussetzen.
- Wenn f nicht konstant ist, existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. O.B.d.A. gelte $f(x_0) > f(a)$.
- Da f stetig auf $[a,b]$ ist, hat f ein Maximum ξ mit $\xi \in (a,b)$, denn $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$.
- Da f auf (a,b) differenzierbar, folgt mit Satz 5.24 $f'(\xi) = 0$.

Veranschaulichung des Satzes von Rolle



Mittelwertsatz

Satz 5.28

Sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine auf* $[a, b]$ *stetige und auf* (a, b) *differenzierbare Funktion.*

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

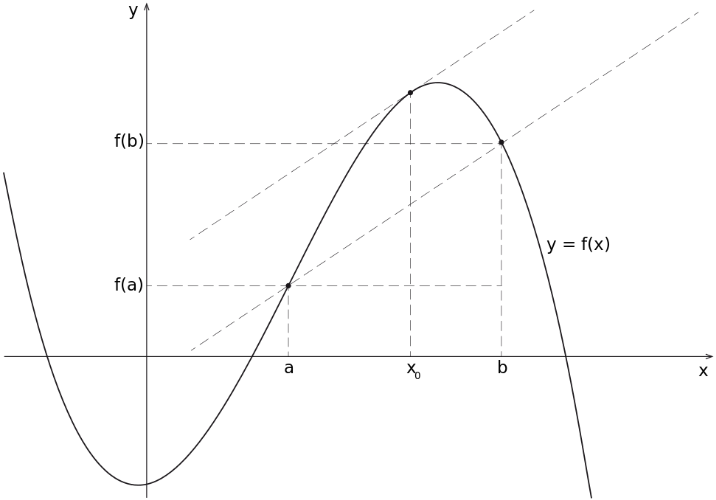
Beweis.

Wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

an.

Veranschaulichung des Mittelwertsatzes



Ableitung und Monotonie

Satz 5.29

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion.

Dann gilt:

(i) $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist konstant.*

(ii) $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist monoton wachsend.*

(iii) $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Rightarrow f$ *ist streng monoton wachsend.*

(iv) $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *ist monoton fallend.*

(v) $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a, b) \Rightarrow f$ *ist streng monoton fallend.*

Bemerkung: Für (iii) und (v) gelten die Umkehrschlüsse nicht. Bspw. ist $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Für eine konstante Funktion f gilt $f'(x) = 0$, siehe Beispiel 5.2 (ii).

"$\Rightarrow$": Mit dem Mittelwertsatz folgt für alle $x \in (a, b)$:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0.$$

Also $f(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$.

Fortsetzung Beweis.

(ii) "$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} f \text{ monoton wachsend } &\Longrightarrow x < x' \Rightarrow f(x) \le f(x') \\ &\Longrightarrow x < x' \Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \ge 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{x' \searrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \ge 0 \\ &\Longrightarrow f'(x) \ge 0. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Sei $x' > x$. Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$f(x') - f(x) = f'(\xi)(x' - x) \ge 0.$$

Also $f(x') \ge f(x)$.

- (iii) bis (v): analog.

Beispiel 5.30

- $f(x) = \log(x)$ ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend, da $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ für $x > 0$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend, denn $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ für $x \neq 0$.

  Beachten Sie aber, dass $f(x)$ nicht auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ monoton fallend ist.
- $f(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 14$ ist streng monoton wachsend, da

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 33 = 3(x^2 - 6x + 11) = 3\left((x-3)^2 + 2\right) > 0.$$

Monotonie und Extrema/Sattelpunkte

Monotonieüberlegungen erlauben es uns manchmal zu entscheiden, welche spezielle Form (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) ein stationärer Punkt hat.

Beispiel 5.31

Sei $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$. Dann folgt

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}(1-x)^2.$$

Einziger stationärer Punkt ist $x_0 = 1$. Dies muss ein Sattelpunkt sein, da $f'(x) > 0$ für alle $x \neq 1$, also f sowohl links als auch rechts von x_0 streng monoton wachsend ist.

Ableitung und Grenzwertberechnungen

- Mit elementaren Methoden lässt sich der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$$

  für $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht so ohne weiteres bestimmen.
- Sehr hilfreich ist in solchen Situationen die Regel von L'Hospital.
- Diese erlaubt es uns, bei Zähler und Nenner zu den Ableitungen überzugehen und
- den gesuchten Grenzwert als Grenzwert des Quotienten der Ableitungen zu bestimmen.

Regel von L'Hospital

Satz 5.32

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$ *und* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Wenn einer der beiden folgenden Bedingungen

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

erfüllt ist, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die analoge Aussage gilt für $x \to b$.

Beweisidee.

Wir betrachten die erste der beiden Bedingungen.

Wenn f und g differenzierbar sind, sind sie auch stetig und es gilt $f(a) = g(a) = 0$. Also

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Für $x \to a$ konvergieren Zähler und Nenner gegen $f'(a)$ bzw. $g'(a)$. Für $g'(a) \neq 0$ folgt somit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Beispiel 5.33

(i)

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

(ii) Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x\log(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} x\log(x)) = \exp(0) = 1.$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

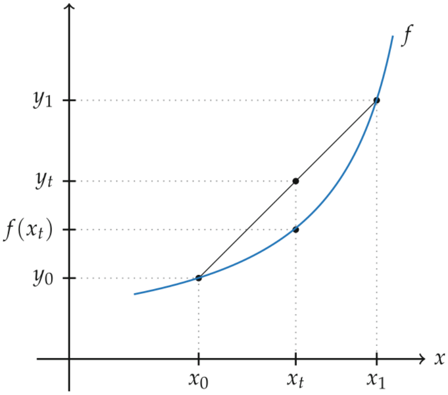
Hier haben wir die Regel von L'Hospital zweimal angewendet.

Konvexität

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist konvex, wenn die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten $x, y \in M$ vollständig in M liegt.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist konvex, wenn die Menge der Punkte, die oberhalb des Funktionsgraphen liegen, eine konvexe Menge ist.
- Menge oberhalb des Funktionsgraphen:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D \wedge y \geq f(x)\}.$$

- Andere anschauliche Charakterisierung: Jede Sehne des Funktionsgraphen verläuft oberhalb des Graphen.



Konvexe Funktion

Definition 5.34

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

f heißt konvex auf I, falls für alle $x_0, x_1 \in I$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1).$$

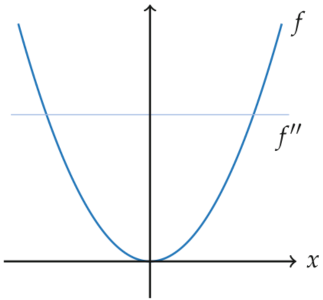
f heißt streng konvex, falls die Ungleichung für alle $\lambda \in (0, 1)$ strikt ist (also $<$ gilt).

f heißt (streng) konkav, falls das umgekehrte Ungleichheitszeichen gilt.

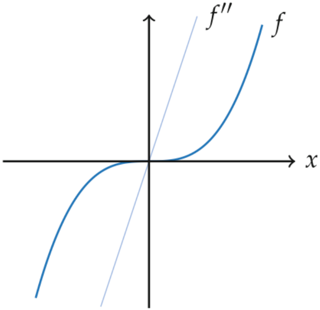
Beispiel 5.35

- Die Funktion $f(x) = x^2$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf $(-\infty, 0)$ streng konkav und auf $(0, \infty)$ streng konvex.
- Die Funktion $f(x) = \log(x)$ ist streng konkav auf $(0, \infty)$.

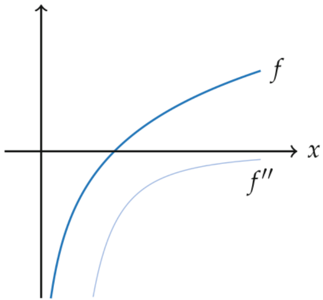
Anschauliche Begründung: siehe nächste Folie.



$f(x) = x^2$, $f''(x) = 2$



$f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$



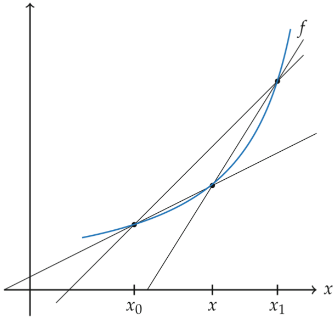
$f(x) = \log(x)$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

Konvexitätskriterien (1)

Lemma 5.36

Eine Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_0, x, x_1 \in I$ mit $x_0 < x < x_1$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$



Beweis.

Für $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ mit $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \\ \Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) &\leq \lambda(f(x_1) - f(x_0)). \end{aligned}$$

Es gilt außerdem $x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$. Teile nun beide Seiten der Ungleichung.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Die Konvexitätsbedingung ist also äquivalent zur linken Ungleichung im Lemma. Analog zeigt man auch die Äquivalenz mit der rechten Ungleichung. □

Konvexitätskriterien (2)

Lemma 5.37

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion.

Dann ist f genau dann konvex auf $[a, b]$, wenn f' auf (a, b) monoton wachsend ist.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei f konvex und seien $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 < x_1$.

- Mit Lemma 5.36 folgt für ein beliebiges $x \in (x_0, x_1)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

- Für $x \searrow x_0$ einerseits und $x \nearrow x_1$ andererseits folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \lim_{x \nearrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x_1).$$

Fortsetzung Beweis.

- Also gilt $x_0 < x_1 \Rightarrow f'(x_0) \leq f'(x_1)$.
- Damit ist f' monoton wachsend.

$\Leftarrow$: Sei f' monoton wachsend. Wir zeigen, dass f das Konvexitätskriterium aus Lemma 5.36 erfüllt.

- Seien $x_0, x, x_1 \in [a, b]$ mit $x_0 < x < x_1$.
- Nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x_0, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_1)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_1) \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi_2).$$

- Wegen $\xi_1 < \xi_2$ und dem monoton Wachstum von f' ist damit das Kriterium aus Lemma 5.36 erfüllt.

Konvexitätskriterien (3)

Bei zweimal differenzierbaren Funktion ist das folgende Kriterium sehr hilfreich.

Folgerung 5.38

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} &\quad\Leftrightarrow\quad f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in D \\ f \text{ ist konkav} &\quad\Leftrightarrow\quad f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in D \\ f \text{ ist streng konvex} &\quad\Leftarrow\quad f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in D \\ f \text{ ist streng konkav} &\quad\Leftarrow\quad f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in D \end{aligned}$$

Beweis.

$f'' \geq 0$ ist äquivalent mit f' ist monoton wachsend. □

Beispiel 5.39

Mit Satz 5.38 können wir die Aussagen aus Beispiel 5.35 formal nachweisen.

- Für $f(x) = x^2$ gilt $f''(x) = 2 > 0$. Also ist f streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- Für $f(x) = x^3$ gilt $f''(x) = 6x$, also $f''(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0)$ und $f''(x) > 0$ für $x \in (0, \infty)$.
- Für $f(x) = \log(x)$ gilt $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Also ist f streng konkav auf $(0, \infty)$.

Konvexität und Ungleichungen

Mit Hilfe konvexer oder konkaver Funktionen lassen sich viele hilfreiche Ungleichungen beweisen.

Beispiel 5.40

Die Ungleichung vom artihmetischen und quadratischen Mittel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Beweis: $f(x) = x^2$ ist konvex. Wähle $\lambda = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.41

Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel: Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Beweis: $f(x) = \log(x)$ ist konkav. Wähle $\lambda = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\frac{\log(a) + \log(b)}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Mit der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\log(a) + \log(b)}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2} \quad &\Rightarrow \quad \exp(\frac{1}{2}\log(a))\exp(\frac{1}{2}\log(b)) \leq \frac{a+b}{2} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Motivation: Approximation (1)

Können wir auf einfache Weise eine gute Näherung für $\sqrt{1.1}$ berechnen? Es gilt offensichtlich $1 < \sqrt{1.1} < 1.1$. Geht es genauer?

Idee: Die Tangente $T(x)$ an den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $x_0 = 1$ ist nahe $x_0 = 1$ eine gute Approximation.

- Approximiere $f(1.1)$ durch $T(1.1)$.
- $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Mit $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ folgt für $x = 1.1$: $T(1.1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 1.05$.
- Diese Näherung ist ziemlich gut. Laut Taschenrechner gilt $\sqrt{1.1} = 1.0488088\ldots$.

Motivation: Approximation (2)

Folgende Fragen drängen sich auf:

- Wie können wir die Approximation verbessern?
- Wie können wir sicher sein, dass der Approximationsfehler klein ist, ohne den genauen Wert für $f(x)$ zu kennen?

Idee zur ersten Frage: Potenzreihen.

- Wenn sich die zu approximierende Funktion $f(x)$ als Potenzreihe schreiben lässt, dann wird $f(x)$ durch die Partialsummen approximiert.

Motivation: Approximation (3)

Aber woher bekommen wir die Koeffizienten a_n für die Potenzreihe?

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + \cdots \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1} = 1 \cdot a_1 + \cdots \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n(x-x_0)^{n-2} = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n(x-x_0)^{n-k} = k! \cdot a_k + \cdots
\end{aligned}$$

Also $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ und demnach $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Taylor-Polynom

Definition 5.42

Sei D ein Intervall, $x_0 \in D$, $n \in \mathbb{N}_0$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar auf D.

Dann ist

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

das n-te Taylerpolynom von f bei x_0.

Beispiel 5.43

Sei $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und $x_0 = 1$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

also

$$f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

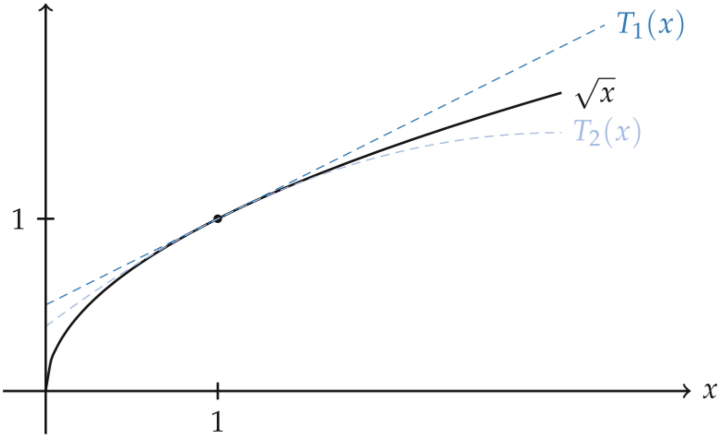
und damit

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

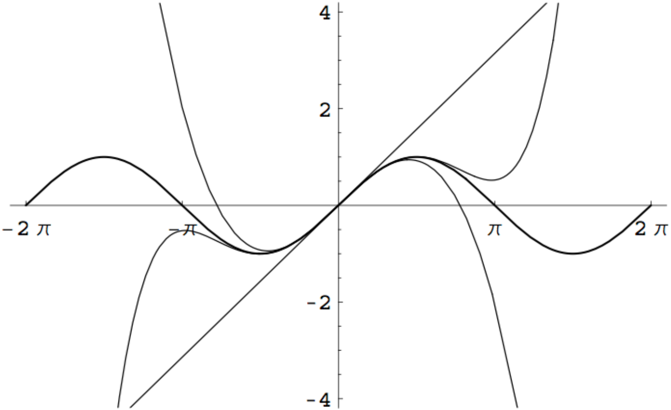
Für $x = 1.1$ ergibt sich

$$T_2(1.1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 - \frac{1}{8}0.01 = 1.04875.$$

Taylor-Approximation für $\sqrt{x}$ bei $x_0 = 1$



Taylor-Approximation für $\sin(x)$ bei $x_0 = 0$



Approximation von $\sin(x)$ durch x, $x - \frac{x^3}{6}$ und $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Restterm

Definition 5.44

Den Fehler der Approximation von $f(x)$ durch $T_n(x)$ nennen wir Restterm und bezeichnen ihn mit

$$R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x).$$

Damit gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Satz von Taylor

Satz 5.45

Sei D ein Intervall, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal auf D differenzierbare Funktion und T_n das n-te Taylorpolynom von f bei x_0.

Dann gibt es für jedes $x \in D$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bedeutung von “zwischen”: Für $x > x_0$ ist $\xi \in (x_0, x)$, für $x < x_0$ ist $\xi \in (x, x_0)$.

Abschätzung für den Restterm

Folgerung 5.46

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.45 gelte, dass ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$$

für alle ξ zwischen x_0 und x.

Dann folgt für den Restterm

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}.$$

Schätzung des Approximationsfehlers

Beispiel 5.47

Wir betrachten nochmals $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$ und $x = 1.1$.
Wir nehmen $n = 1$. Es gilt dann

$$|f''(\xi)| = |-\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}| < \frac{1}{4},$$

wegen $\xi > 1$. Damit folgt:

$$|R_2(1.1)| \leq \frac{1}{8} \cdot 0.1^2 = 0.00125.$$

Dies beantwortet insbesondere die zweite Frage von Folie 427.

Beispiel 5.48

Wir wollen mit der gleichen Technik $\sqrt{5}$ abschätzen. Wir suchen zunächst einen Wert nahe 5, dessen Wurzel wir kennen, z.B. $\sqrt{4} = 2$. Dann schätzen wir ab, diesmal mit T_2:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+\frac{1}{4})} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}\\ &\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2.234375.\end{aligned}$$

Wir schätzen den Fehler für $\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ wie im vorangegangenen Beispiel ab.

$$|R_3(1.25)| \leq \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{2^{10}}.$$

Damit ist für $\sqrt{5}$ der Fehler $\leq 2\cdot|R_3(1.25)| \leq \frac{1}{2^9} < 0.002$.

Typ eines stationären Punktes

Satz 5.49

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar auf dem Intervall D, mit $n \geq 2$. Sei x_0 ein innerer Punkt von D, und $f^{(n)}$ sei in x_0 stetig. Weiterhin gelte

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n gerade, dann gilt

- *Falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.*
- *Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

Ist n ungerade, dann hat f in x_0 einen Sattelpunkt.

Beweis.

Mit dem Satz von Taylor (mit n durch $n-1$ ersetzt) erhalten wir wegen $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist.

- Da $f^{(n)}$ auch stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f^{(n)}(x) > 0.$$

- Für solche x folgt auch $|\xi - x_0| < \delta$, also $f^{(n)}(\xi) > 0$.
- Wegen n gerade gilt $(x - x_0)^n \geq 0$.
- Mit obiger Formel folgt $f(x) \geq f(x_0)$ für $|x - x_0| < \delta$. Also ist x_0 ein lokales Minimum.

Fortsetzung Beweis.

- Analog beweist man die Aussage für das lokale Maximum.

Sei nun n ungerade.

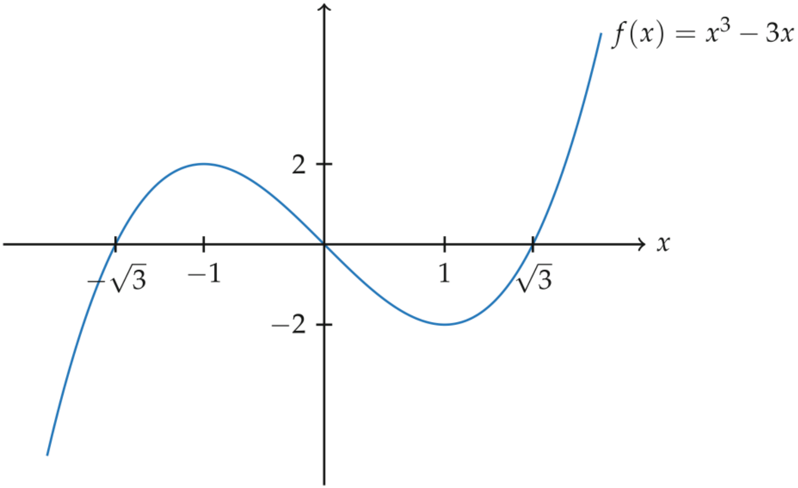
- Für $x > x_0$ gilt $(x - x_0)^n > 0$.
- Für $x < x_0$ gilt $(x - x_0)^n < 0$.
- Wie im ersten Fall hat $f^{(n)}(\xi)$ nahe x_0 ein konstantes Vorzeichen.
- Daher wechselt
$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$
in x_0 sein Vorzeichen.
- Somit ist x_0 ein Sattelpunkt.

Kurvendiskussion

Beispiel 5.50

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$.

- $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.
- $f'(x) = 0$ hat als Lösung $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.
- Aus $f''(x_1) = 6 > 0$ folgt: x_1 ist ein lokales Minimum.
- Aus $f''(x_2) = -6 < 0$ folgt: x_2 ist ein lokales Maximum.
- Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$, also ist f konkav auf $(-\infty, 0)$.
- Für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$, also ist f konvex auf $(0, \infty)$.
- Es gilt $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$. Somit hat f die Nullstellen $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
- Funktionsgraph auf der folgenden Folie.


$f(x) = x^3 - 3x$
x
2
-2
$-\sqrt{3}$
-1
1
$\sqrt{3}$

Taylorreihe

Definition 5.51

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in D$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt Taylorreihe von f um x_0.

Bemerkungen zu Taylorreihen

- Die Taylorpolynome T_n sind die Partialsummen der Taylorreihe.
- Obwohl die Taylorpolynome T_n eine Funktion $f(x)$ approximieren, ist nicht garantiert, dass der Wert der Taylorreihe immer gleich $f(x)$ ist.
- Die Taylorreihe muss für $x \neq x_0$ nicht konvergieren, d. h. der Konvergenzradius kann 0 sein.
- Selbst wenn die Taylorreihe konvergiert, muss sie nicht gegen f konvergieren.
- Um zu zeigen, dass die Taylorreihe einer Funktion f tatsächlich gegen f konvergiert, müssen wir zeigen, dass der Restterm $R_{n+1}(x)$ (punktweise) gegen 0 konvergiert (für $n \to \infty$).

Potenzreihen sind ihre eigenen Taylorreihen

Falls eine Funktion durch eine Potenzreihe definiert ist, ist dies auch die Taylorreihe.

Satz 5.52

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Falls der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

größer als 0 ist, so ist f in x_0 unendlich oft differenzierbar, und für alle n gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Beweis.

Siehe Folie 428. □

Allgemeiner Binomialkoeffizient

Definition 5.53

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir die allgemeinen Binomialkoeffizienten durch

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{0} &:= 1 \\ \binom{\alpha}{k} &:= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Beispiel 5.54

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

Wichtige Taylorreihen

Satz 5.55

Für $|x| < 1$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Diese Reihe heißt Binomialreihe.

Für $|x| < 1$ *gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Für die Funktionen $(\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh)$ *sind die Taylorreihen identisch mit der Potenzreihendarstellung dieser Funktionen.*

Beweis.

Binomialreihe: Sei $f(x) = (1+x)^\alpha$. Dann folgt

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

und somit für $x_0 = 0$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Damit ist die genannte Reihe die Taylorreihe von $f(x)$.
Abschätzung des Restterms: Für einen Spezialfall im nächsten Beispiel.

Logarithmus: Für $f(x) = \log(1+x)$ ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Die Identität von Taylorreihe und Funktion zeigen wir in den Übungen. $\square$

Beispiel 5.56

Wir betrachten nochmals die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

- Wie lautet die Taylorreihe $T(x)$ um $x_0 = 1$?

  Wegen $\sqrt{x} = (1 + (x-1))^{\frac{1}{2}}$ ist dies die Binomialreihe für $\alpha = \frac{1}{2}$ um $x_0 = 1$, also

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-1)^n.$$

- Konvergiert die Taylorreihe? Wenn ja, für welche x?

  Mit dem Quotientenkriterium ermitteln wir den Konvergenzradius.

$$\left| \frac{\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - n}{n+1} \right| \cdot |x-1| \longrightarrow |x-1|.$$

  Also konvergiert die Reihe für $|x-1| < 1$, d. h. für $x \in (0,2)$.

Fortsetzung Beispiel.

- Konvergiert die Taylorreihe gegen $\sqrt{x}$?

  Wir zeigen die Konvergenz des Restterms nur für $x \in (1, 2)$. Es gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \binom{\frac{1}{2}}{n+1}\xi^{\frac{1}{2}-n-1}(x-1)^{n+1}.$$

  mit $\xi \in (1, x)$ für $x \in (1, 2)$.
  Weiterhin gilt $\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen $\binom{\frac{1}{2}}{0} = \frac{1}{2} < 1$ und

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n+1}\right| = \frac{n-\frac{1}{2}}{n} \cdot \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|.$$

  Wegen $\xi \geq 1$ folgt $\xi^{\frac{1}{2}-n-1}(x-1)^{n+1} \leq 1$ und damit insgesamt

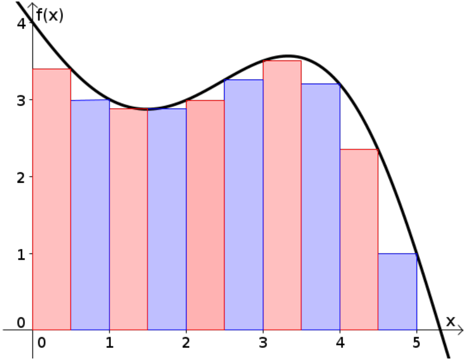
$$|R_{n+1}(x)| \leq (x-1)^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Zusammenfassung

- Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, Steigung der Tangente am Funktionsgraph
- Ableitungsregeln: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Ableitung von Potenzreihen
- Höhere Ableitungen
- Funktionseigenschaften: Extrema, Monotonie, Konvexität
- Mittelwertsatz
- Regel von L'Hospital
- Approximation durch Taylorpolynome, Taylorreihen

Kapitel 6

Integrale



Inhalt

6 Integrale

- Definition des Integrals
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Berechnung von Integralen
- Uneigentliche Integrale

Flächenberechnungen

Ursprung der Integralrechnung: Flächenberechnung.

Aber wie ermittelt man den Inhalt einer Fläche, die durch krummlinige Kurven begrenzt ist?

Grundprinzip der Flächenberechnung:

- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b ist $a \cdot b$.
- Der Flächeninhalt einer disjunkten Vereinigung von Rechtecken ist gleich der Summe der Einzelflächen.
- Allgemeinere Flächen werden durch endliche disjunkte Vereinigungen von Rechtecken approximiert.

  Den Flächeninhalt erhält man dann als Grenzwert.

Integralbegriff (1)

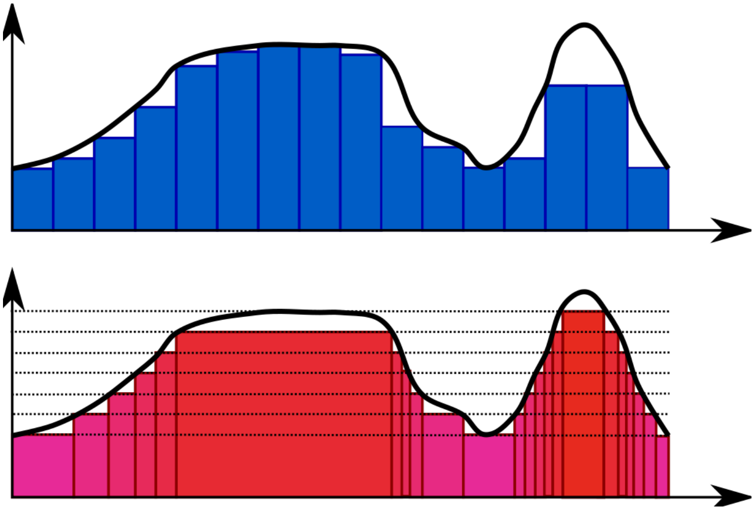
Wie soll diese Approximation mit Hilfe von Rechtecken aussehen?

- Der klassische Integralbegriff: Riemann-Integral
  - Approximation mittels Rechtecken einer Breite h, mit $h \to 0$
  - Der am häufigsten gelehrte und in der Literatur vorhandene Zugang (siehe z.B. Forster, Heuser, u. a.).
  - Nachteil: Der Integralbegriff ist komplexer und schwieriger einzuführen als das Integral über Regelfunktionen.
- Der pragmatische Integralbegriff: Integral für Regelfunktionen
  - Vorteil: einfacher Zugang, enthält trotzdem die für die Praxis wichtigen Funktionen
  - Idee: Statt die Fläche zu approximieren wird die Funktion durch Rechteck- bzw. Treppenfunktionen approximiert.
  - Literatur: Grieser, Königsberger
  - Nachteil: Der so definierte Integralbegriff ist weniger allgemein.

Integralbegriff (2)

- Der Integralbegriff der modernen Mathematik: Lebesgue-Integral
  - Integration von Funktionen, die auf beliebigen Maßräumen definiert sind
  - Interessant bspw. für stochastische Anwendungen (Integration auf der Basis von Wahrscheinlichkeitsmaßen)
  - Für $\mathbb{R}$ Verallgemeinerung des Riemann-Integrals: jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar, aber nicht umgekehrt.
  - Unterteilung der y-Achse (Ordinate), statt der x-Achse (Abszisse).
  - Wird in der Lehre immer populärer, entweder
    - ⋆ zusätzliche Einführung des Lebesgue-Integrals in weiterführenden Vorlesungen (Analysis X mit $X > 1$ oder Stochastik) oder
    - ⋆ im Mathematikstudium direkt im ersten Semester statt des Riemann-Integrals.

Riemann- vs. Lebesgue-Integral



Treppenfunktion

Definition 6.1

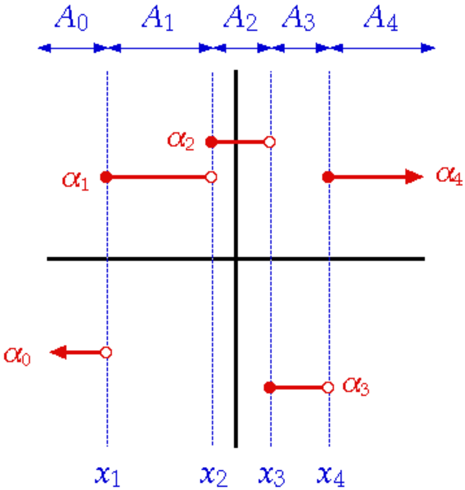
Eine Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls $m \in \mathbb{N}$ und es Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_m \in [a, b]$ gibt, mit

(i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ und

(ii) T ist konstant auf jedem der Intervalle $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, m$.

Bemerkung: Die Werte an der Stellen $x_0, \ldots, x_m$ können beliebig sein.

Beispiel einer Treppenfunktion



Integral einer Treppenfunktion

Definition 6.2

Sei T eine Treppenfunktion, und sei $T(x) = a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, m$.

Dann sei

$$\int_a^b T(x)\,dx := \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

das (bestimmte) Integral von T über dem Intervall $[a, b]$.

Diskussion: Integral von Treppenfunktionen

- Wie bei Reihen spielt der Variablenname unter dem Integral keine Rolle.

$$\int_a^b T(x)\,dx = \int_a^b T(t)\,dt = \int_a^b T(\lambda)\,d\lambda$$

- Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt! Dies ist praktisch für Rechnungen und Eigenschaften des Integrals (z.B. Linearität).
- Den "echten" Flächeninhalt erhält man durch $\int_a^b |T(x)|\,dx$. Insbesondere gilt: Wenn T eine Treppenfunktion ist, ist auch $|T|$ eine Treppenfunktion.

Beispiel 6.3

Sei

$$T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{für } 2 \leq x < 5 \\ -2 & \text{für } 5 \leq x < 9 \\ 1 & \text{für } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{10} T(x)\,dx &= 5 \cdot (2-0) + 3 \cdot (5-2) + (-2) \cdot (9-5) + 1 \cdot (10-9) \\ &= 10 + 9 - 8 + 1 = 12. \end{aligned}$$

Verfeinerung

Die Funktion T legt die möglichen Sprungstellen x_i nicht eindeutig fest. Was passiert mit dem Integral, wenn wir neue Zwischenpunkte einführen, ohne die Funktion zu ändern?

Beispiel 6.4

$$T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -3 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{ist auch} \quad T(x) = \begin{cases} 5 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 5 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -3 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Aber beide Varianten liefern für das Integral den gleichen Wert:

$$\begin{aligned} \int_0^2 T(x)\,dx &= 5 \cdot (1-0) + (-3) \cdot (2-1) \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (-3) \cdot (2-1) = 2. \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von der Wahl der Zwischenpunkte

Die Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte wie in Beispiel 6.4 nennen wir Verfeinerung.

Lemma 6.5

Es sei $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion.

Dann ist das Integral

$$\int_a^b T(x)\,dx$$

wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte x_i.

Bemerkung: Nur aufgrund dieses Lemmas ist die Notation $\displaystyle\int_a^b T(x)\,dx$ überhaupt gerechtfertigt, da sie keinen Bezug auf die x_i enthält.

Beweis.

- Wenn wir die Darstellung von T um einen Zwischenpunkt x' zwischen x_{j-1} und x_j verfeinern, wird in $\sum_{i=1}^{m} a_i(x_i - x_{i-1})$ der Summand

$$a_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{durch} \quad a_j(x_j - x') + a_j(x' - x_{j-1})$$

  ersetzt.
- Wegen $x_j - x_{j-1} = (x_j - x') + (x' - x_{j-1})$ bleibt die Summe gleich.
- Da wir diesen Prozess wiederholen können, ändert sich die Summe auch dann nicht, wenn wir mit mehreren Zwischenpunkten verfeinern.
- Ist die Funktion T einmal mittels der Zwischenpunkte $x_0, \ldots, x_m$ und ein weiteres mal mittels der Zwischenpunkte $y_0, \ldots, y_k$ gegeben, so bilden wir die gemeinsame Verfeinerung

$$\{x_0, \ldots, x_m\} \cup \{y_0, \ldots, y_k\}.$$

Fortsetzung Beweis.

- Nach der obigen Argumentation ist das Integral für die gemeinsame Verfeinerung sowohl gleich mit der Summe für die x-Zwischenpunkte als auch mit der für die y-Zwischenpunkte.

Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen (1)

Lemma 6.6

Wenn T, S Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch αT und $T + S$ Treppenfunktionen.

Beweis.

- Ist $T(x) = a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, dann ist $\alpha T(x) = \alpha a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, also ist αT eine Treppenfunktion.
- Es seien $x_0, \ldots, x_m$ die Sprungstellen von T und $y_0, \ldots, y_k$ die Sprungstellen von S. Dann bilden wir für beide Funktionen eine Verfeinerung mit den Zwischenpunkten $\{x_0, \ldots, x_m\} \cup \{y_0, \ldots, y_k\}$.

  Ist jetzt $T(x) = a_i$ und $S(x) = b_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, dann ist $T(x) + S(x) = a_i + b_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Also ist $T + S$ eine Treppenfunktion.

Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen (2)

Lemma 6.7

Sei $\mathcal{T}[a,b]$ die Menge der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Dann ist die Abbildung

$$\int_a^b \ : \ \mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R}$$
$$T \mapsto \int_a^b T(x)\,dx$$

(i) *linear, d. h. für alle $T, S \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt*

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha T(x)\,dx &= \alpha \int_a^b T(x)\,dx \quad \text{und} \\ \int_a^b T(x) + S(x)\,dx &= \int_a^b T(x)\,dx + \int_a^b S(x)\,dx, \end{aligned}$$

Fortsetzung Lemma.

(ii) *beschränkt, d. h. für alle $T \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt*

$$\left| \int_a^b T(x)\, dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |T(x)| \cdot (b - a)$$

(iii) *monoton, d. h. für alle $T, S \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt*

$$T(x) \leq S(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b T(x)\, dx \leq \int_a^b S(x)\, dx.$$

Beweis.

(i)

$$\int_a^b \alpha T(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \alpha a_i(x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^m a_i(x_i - x_{i-1}) = \alpha \int_a^b T(x)\,dx$$

Es sei $x_0, \ldots, x_m$ die gemeinsame Verfeinerung aus dem Beweis von Lemma 6.6.

$$\begin{aligned}
\int_a^b T(x) + S(x)\,dx &= \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^m b_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_a^b T(x)\,dx + \int_a^b S(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

(iii) Seien die x_i, a_i, b_i wie im Beweis für $+$ in (i). Aus $T \leq S$ folgt $a_i \leq b_i$ für jedes i. Wegen $x_i - x_{i-1} \geq 0$ gilt dann:

$$\int_a^b T(x)\,dx = \sum_{i=1}^m a_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m b_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

(ii)
- Sei $M = \sup_{x\in[a,b]} |T(x)|$ und $S_-(x) = -M$, $S_+(x) = M$ konstante Funktionen auf $[a,b]$.
- Dann gilt $S_-(x) \leq T(x) \leq S_+(x)$ für alle $x \in [a,b]$.
- Mit (iii) folgt $\int_a^b S_-(x)\,dx \leq \int_a^b T(x)\,dx \leq \int_a^b S_+(x)\,dx$.
- Weiterhin gilt: $\int_a^b S_-(x)\,dx = -M(b-a)$ und $\int_a^b S_+(x)\,dx = M(b-a)$.
- Also $-M(b-a) \leq \int_a^b T(x)\,dx \leq M(b-a)$ und somit $\left|\int_a^b T(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

Regelfunktion

Definition 6.8

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, so dass T_n (für $n \to \infty$) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beispiel für eine Regelfunktion

Beispiel 6.9

Sei $f(x) = x$ auf $[0, 1]$. Wir definieren die Folge (T_n) der Treppenfunktion durch

$$T_n(1) = 1 \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{i}{n} \text{ für } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), i = 1, \ldots, n.$$

Für T_n ist demnach $x_i = \frac{i}{n}$ und $a_i = \frac{i}{n}$.
Für $x \in [x_{i-1}, x_i)$ gilt $0 < a_i - x \leq \frac{1}{n}$.
Damit folgt

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n(x)| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Also konvergiert T_n gleichmäßig gegen f.

Integral für eine Regelfunktionen

Satz 6.10

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und (T_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann konvergiert die Folge

$$\left(\int_a^b T_n(x)\, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

der Integrale und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der T_n. Wir definieren damit

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{n \to \infty} \int_a^b T_n(x)\, dx.$$

Beispiel 6.11

Wir setzen Beispiel 6.9 fort und berechnen $\int_0^1 x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 T_n(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2},\end{aligned}$$

also gilt $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Beweis von Satz 6.10.

Wir zeigen zunächst, dass $\left(\int_a^b T_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

- Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $\epsilon' := \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.
- N.V. existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\sup_{x\in[a,b]} |T_n(x) - f(x)| < \epsilon'$.
- Seien $n, m \geq n_0$ beliebig. Dann gilt

$$|T_m(x) - T_n(x)| \leq |T_m(x) - f(x)| + |f(x) - T_n(x)| < 2\epsilon'.$$

- Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b T_m(x)\,dx - \int_a^b T_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (T_m(x) - T_n(x))\,dx\right| \\ &< 2\epsilon'(b-a) = \epsilon.\end{aligned}$$

Fortsetzung Beweis.

Wir zeigen nun, dass für jede gleichmäßig konvergente Folge (T_n) der selbe Grenzwert entsteht.

- Seien (T_n) und (S_n) Folgen von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren.
- Sei (U_n) die Folge $T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3, \ldots$.
- Dann konvergiert auch (U_n) gleichmäßig gegen f (machen sie sich klar, warum).
- Damit konvergiert nach dem ersten Teil $\int_a^b U_n(x)\,dx$. Sei

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$$

- Da $\left(\int_a^b T_n(x)\,dx\right)$ und $\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)$ Teilfogen von $\left(\int_a^b U_n(x)\,dx\right)$ sind, konvergieren beide ebenfalls gegen a.

Eigenschaften des Integrals

Satz 6.12

(i) *Sind f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch αf und $f + g$ Regelfunktionen.*

(ii) *Sei $\mathcal{R}[a, b]$ die Menge der Regelfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \int_a^b \quad : \quad & \mathcal{R}[a, b] \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

ist linear, beschränkt und monoton (vgl. Lemma 6.6).

Beweis.

Folgt aus Grenzwertregeln und Eigenschaften konvergenter Folgen. □

Stückweise Stetigkeit

Definition 6.13

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_m$ gibt mit

(i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$,

(ii) f ist stetig auf jedem der Intervalle (x_{i-1}, x_i) und

(iii) die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow x_i} f(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow x_i} f(x)$ existieren für $i = 0, \ldots, m-1$ bzw. $i = 1, \ldots, m$.

Bemerkungen:

- Eine stückweise stetige Funktion darf also endlich viele Sprungstellen haben.
- Zum Beispiel sind Treppenfunktionen stückweise stetig.

Approximation durch Treppenfunktionen (1)

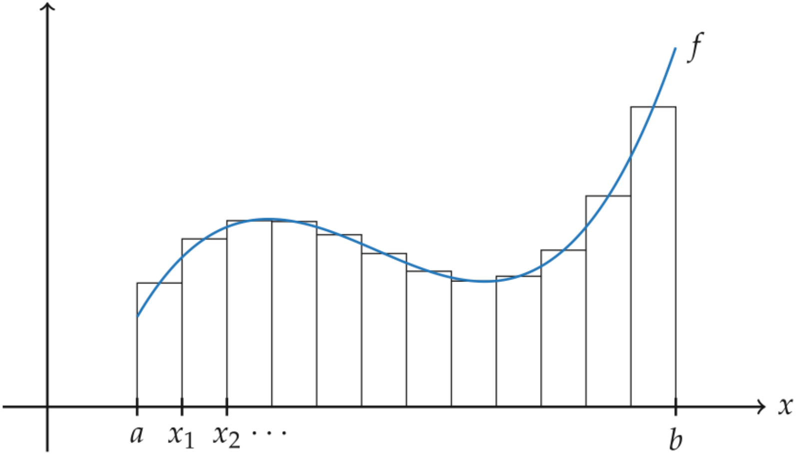
Satz 6.14

Stückweise stetige Funktionen sind Regelfunktionen.

Beweisidee.

- Wir approximieren die stetige Funktion durch eine Folge von Treppenfunktion.
- Hierzu unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle mit der Länge $\frac{b-a}{n}$.
- Wir setzen $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ für $i = 1, \dots, n$.
- Wir definieren $T_n(x) = f(x_i)$ für $x \in [x_{i-1}, x_i)$, sowie $T_n(b) = f(b)$.
- Jetzt müssen wir noch zeigen, dass T_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

Approximation durch Treppenfunktionen (2)



Hier $T_n(x) = f(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})$ für $x \in [x_{i-1}, x_i)$.

Elementare Funktionen sind Regelfunktionen

Wichtige Konsequenzen aus Satz 6.14:

- Stetige Funktionen sind auch stückweise stetige Funktionen.
- Damit sind nach Satz 6.14 stetige Funktionen auch Regelfunktionen.
- Insbesondere sind also die elementaren Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion, etc.) Regelfunktionen und damit integrierbar.
- Dies gilt natürlich auch für die Verknüpfung von stetigen Funktionen gemäß Stetigkeitsregeln (Linearkombination, Quotient, Verkettung).

Beispiel 6.15

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)e^{-x^2}}{1 + \cos^2(x)}$$

ist eine Regelfunktion und damit existiert $\int_a^b f(x)\,dx$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

Approximation durch Treppenfunktionen (3)

Folgerung 6.16

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Interpretation:

- Der Term hinter dem Limes ist der Mittelwert der Funktionswerte an den Stellen x_i.
- Die rechte Seite können wir als den kontinuierlichen Mittelwert von f über dem Intervall $[a, b]$ ansehen.

Beweis.

Für die Treppenfunktion aus der Beweisidee von Satz 6.14 gilt

$$\int_a^b T_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Nach Definition des Integrals für Regelfunktionen ist

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b T_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Formel folgt dann mittels Teilen durch $b-a$. □

Gleichmäßige Konvergenz und Integration

Satz 6.17

Sei (f_n) eine Folge von Regelfunktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bemerkungen:

- Ähnliche Resultate kennen wir schon: bei gleichmäßiger Konvergenz dürfen wir Grenzwerte vertauschen.
- Hier: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.
- Beachten Sie: Links konvergiert eine Zahlenfolge, rechts eine Funktionenfolge.

Allgemeine Integrationsgrenzen (1)

Definition 6.18

Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

- Falls $a < b$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ schon definiert.
- Falls $a = b$, so gelte

$$\int_a^b f(x)\,dx := 0.$$

Falls $a > b$, so gelte

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Allgemeine Integrationsgrenzen (2)

Satz 6.19

Ist f Regelfunktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und sind $a, b, c, \in I$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Stammfunktion

- Die Definition des Integrals ist für die Berechnung zu unhandlich.
- Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird uns ein mächtiges Werkzeug zur Integralberechnung liefern.
- Hierfür benötigen wir Stammfunktionen.

Definition 6.20

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls

- F differenzierbar auf I ist und
- $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Beispiele für Stammfunktionen

Beispiel 6.21

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ für $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$ für $x > 0$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig

Lemma 6.22

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt:

(i) *$F + c$ ist eine Stammfunktion von f für alle $c \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Ist auch G eine Stammfunktion von f, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$.*

Beweis.

(i) $(F + c)' = F' + \underbrace{c'}_{=0} = F' = f$.

(ii) Es gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, also ist $F - G$ eine konstante Funktion, also $F - G = c$.

Mittelwertabschätzung für Integrale

Für den Beweis des nachfolgenden Hauptsatzes benötigen wir eine Abschätzung des Integrals.

Lemma 6.23

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

Dann gilt

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Beweis.

- Wir beschränken uns darauf, den Nachweis für eine stetige Funktion f zu führen.
- Insbesondere existieren für stetige Funktion Minimum und Maximum auf einem abgeschlossenem Intervall (Extremwertsatz von Weierstraß, Satz 4.24).
- Sei $m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ und $g(x) := m$ für $x \in [a,b]$.
- Sei $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ und $h(x) := M$ für $x \in [a,b]$.
- g und h sind als konstante Funktionen auch Regel- und Treppenfunktionen.
- Es gilt:

$$\int_a^b g(x)\,dx = m(b-a) \quad \text{und} \quad \int_a^b h(x)\,dx = M(b-a).$$

Fortsetzung Beweis.

- Mit der Monotonie des Integrals (Satz 6.12) folgt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx \\ \Rightarrow\quad & m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \\ \Rightarrow\quad & m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \end{aligned}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 6.24

Sei f eine Regelfunktion auf dem Intervall I und sei $a \in I$.

(i) *Wenn f stetig ist, dann ist*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f.

(ii) *Für eine beliebige Stammfunktion G von f und $a, b \in I$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: G(x)\big|_a^b\,.$$

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in I$ und f stetig. Wir müssen zeigen, dass $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar in x_0 ist und dass $F'(x_0) = f(x_0)$ gilt.

Hierzu untersuchen wir den Differenzenquotienten von F bei x_0 (in der h-Formulierung). Es gilt

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt,$$

also ergibt sich für den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Jetzt nutzen wir das Lemma 6.23 und erhalten damit

$$\inf_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t) \le \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \le \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t).$$

Fortsetzung Beweis.

(i) Da f stetig ist, folgt mit dem ϵ-δ-Kriterium

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} \inf_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t) \quad \text{und} \quad f(x_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t)$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

(ii) Wir beschränken uns wieder auf den Fall, dass f stetig ist.

- Nach (i) ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion.
- Nach Lemma 6.22 gilt dann $G(x) = F(x) + c$.
- Also:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt = F(b) &= F(b) - \underbrace{F(a)}_{=\int_a^a f(t)\,dt=0} \\
&= (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a).
\end{aligned}$$

Anwendung des Hauptsatzes

Der zweite Teil des Hauptsatzes erlaubt für Funktionen mit bekannter Stammfunktion eine einfache Berechnung von Integralen.

Beispiel 6.25

(i) Wir wollen $\int_1^5 2x^2 - 4x + 1\,dx$ berechnen. Es sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Dann ist $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x$ eine Stammfunktion von f. Also folgt mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes

$$\begin{aligned}
\int_1^5 2x^2 - 4x + 1\,dx &= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x\Big|_1^5 \\
&= \left(\frac{250}{3} - 50 + 5\right) - \left(\frac{2}{3} - 2 + 1\right) \\
&= 38\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii)

$$\int_0^1 e^x \, dx = e^x \big|_0^1 = e - 1$$

(iii) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sin(x) \, dx &= -\cos(x)\big|_{-a}^{a} \\
&= -\cos(a) + \underbrace{\cos(-a)}_{=\cos(a)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Berechnung von Integralen

- Die größte Schwierigkeit bei der Anwendung des Hauptsatzes besteht im Finden einer Stammfunktion.
- Während es für die Ableitung klare Regeln gibt, die einfach nur angewendet werden müssen, um die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion zu ermitteln, ist dies bei der Integration nicht der Fall.
- Eine Stammfunktion muss stattdessen "konstruiert" werden.
- Für diese Konstruktion werden wir zwar Regeln kennenlernen, wir können aber nicht allgemein sagen, mit welchen Regeln die Stammfunktion gefunden werden kann.
- Insbesondere gibt es Funktionen, zu denen es keine elementaren Stammfunktionen gibt.

Das unbestimmte Integral

Definition 6.26

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann heißt die Menge

$$\int f(x)\,dx := \{F | F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$$

das unbestimmte Integral von f.

Bemerkungen:

- Im Folgenden schreiben wir auch kürzer, aber eigentlich ungenau, $\int f(x)\,dx = F(x)$.
- Genau müsste es eigentlich $F(x) \in \int f(x)\,dx$ heißen.

Partielle Integration

Satz 6.27

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis.

Aus der Produktregel für die Ableitung (Satz 5.8) und der Linearität des Integrals folgt:

$$\begin{aligned}
& (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\Rightarrow\quad & f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \\
\Rightarrow\quad & \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx
\end{aligned}$$

Beispiele für die partielle Integration

Beispiel 6.28

(i) Berechne $\int x e^x \, dx$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & \Rightarrow \quad & f(x) = e^x \\ g(x) &= x & \Rightarrow \quad & g'(x) = 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x e^x - e^x = (x-1)e^x.$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Berechne: $\int \log(x)\,dx$.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = 1 & \Rightarrow & f(x) = x \\ g(x) = \log(x) & \Rightarrow & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$\int 1 \cdot \log(x)\,dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log(x) - x.$$

(iii) Berechne $\int x\sin(x)\,dx$.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int 1 \cdot \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

Substitution

Satz 6.29

Seien $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $g : I \to I'$ stetig differenzierbar, $f : I' \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)).$$

Für das bestimmte Integral gilt außerdem:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

Bemerkung: Die Substitutionsregel kann sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links angewendet werden.

Beweis.

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Also ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$.

Für das bestimmte Integral erhalten wir damit

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\big|_a^b = F(y)\big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Einfache Anwendungen der Substitutionsregel

Die Substitutionsregel lässt sich dann recht einfach anwenden, wenn in der Gesamtfunktion unter dem Integral die Ableitung einer inneren Funktion wieder als Faktor auftritt.

Beispiel 6.30

(i) Wir betrachten $\int x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$.

Mit $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ und $g'(x) = -x$ erhalten wir

$$\int x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = -\int (-x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = -e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii)

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\log(\cos(x))$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$.

(iii)

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin(x))^2$$

mit $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = \cos(x)$.

(iv)

$$\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3)$$

mit $f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$, $g(x) = x^3$ und $g'(x) = 3x^2$.

Verfahren für die Integration mittels Substitution (1)

Aufgabe: Bestimme $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ mittels Substitution $y = g(x)$.

1. $g(x)$ wird durch y ersetzt (Substitution).
2. Wegen $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ bzw. $dy = g'(x)\,dx$ wird $g'(x)\,dx$ durch dy ersetzt.
   Hier müssen wir $f(g(x))g'(x)\,dx$ komplett in y ausdrücken.
3. Das Integral $\int f(y)\,dy$ wird berechnet. Dies sollte einfacher als die Berechnung von $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ sein.
4. y wird durch $g(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Anwendung des Substitutionsverfahrens (1)

Beispiel 6.31

Bestimme $\int x^3 \sin(x^2 - 1)\, dx$, also $f(g(x))g'(x) = x^3 \sin(x^2 - 1)$.

1. Substituiere $y = x^2 - 1 =: g(x)$.
2. $\frac{dy}{dx} = g'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$, also

$$\begin{aligned} x^3 \sin(x^2 - 1)\, dx = x^3 \sin(x^2 - 1) \frac{dy}{2x} &= \frac{1}{2} x^2 \sin(x^2 - 1)\, dy \\ &= \frac{1}{2}(y + 1) \sin(y)\, dy \end{aligned}$$

Bemerkung: $x^2 = y + 1$.

Fortsetzung Beispiel.

3. Mit partieller Integration erhalten wir

$$= \frac{1}{2} \int (y+1) \sin(y) \, dy = \frac{1}{2}(-(y+1)\cos(y) + \sin(y))$$

4. Rücksubstitution mit $y = x^2 - 1$ bzw. $y + 1 = x^2$ ergibt

$$= \frac{1}{2}(-x^2 \cos(x^2 - 1) + \sin(x^2 - 1)).$$

Verfahren für die Integration mittels Substitution (2)

Aufgabe: Bestimme $\int f(x)\,dx$ mittels Substitution $x = g(y)$.

1. x wird durch $g(y)$ ersetzt (Substitution).
2. Wegen $\frac{dx}{dy} = g'(y)$ bzw. $dx = g'(y)\,dy$ wird dx durch $g'(y)\,dy$ ersetzt.
3. Das Integral $\int f(g(y))g'(y)\,dy$ wird berechnet. Dies sollte einfacher als die Berechnung von $\int f(x)\,dx$ sein.
4. y wird durch $g^{-1}(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Anwendung des Substitutionsverfahrens (2)

Beispiel 6.32

Bestimme $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1. Substituiere $x = \sin(y)$.
2. $dx = \cos(y)\,dy$, also entsteht $\int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\,dy$.
3. Aus $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ folgt $1 - \sin^2(y) = \cos^2(y)$ und somit

$$\int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\,dy = \int \frac{\cos(y)}{\sqrt{\cos^2(y)}}\,dy = \int 1\,dy = y$$

4. Aus $x = \sin(y)$ folgt $y = \arcsin(x)$ und somit:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

Integration von Potenzreihen

Satz 6.33

Wenn die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Konvergenzradius $R > 0$ hat, dann hat die Potenzreihe

$$F(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) + c$$

ebenfalls den Konvergenzradius R und ist eine Stammfunktion für f.

Bemerkung: Mit Indexverschiebung und einer geeigneten Wahl für c kann $F(x)$ wieder als Reihe über x^n und ab $n = 0$ geschrieben werden.

Beispiele für die Integration von Potenzreihen

Beispiel 6.34

Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n.$$

Dann ist

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n^2 + 3n + 2)x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + c.$$

Mit Indexverschiebung und $c = 1$ erhalten wir

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Beispiel 6.35

Zur Bestimmung von $\int \sin(x^2)\,dx$ verwenden wir die Potenzreihendarstellung von $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$. Dies ergibt

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

Also

$$\int \sin(x^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}.$$

Integration rationaler Funktionen

Beispiel 6.36

Wie bestimmen wir

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx?$$

Polynomdivision liefert

$$(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 - x - 3 + \frac{-2x + 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Also

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx &= \int x^2 - x - 3\, dx + \int \frac{-2x + 5}{x^2 - 3x + 2}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - \int \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 2}\, dx.\end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Bleibt die Berechnung von $\int \frac{2x-5}{x^2-3x+2}\,dx$. Hier hilft eine Partialbruchzerlegung.
Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$ sind 1 und 2, also

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Koeffizientenvergleich liefert das LGS $a + b = 2$ und $-2a - b = -5$ mit der Lösung $a = 3$ und $b = -1$. Also gilt

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Für die Brüche auf der linken Seite sind $3\log(x-1)$ bzw. $\log(x-2)$ Stammfunktionen.

Fortsetzung Beispiel.

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3\log(x-1) + \log(x-2).$$

Leider ist dies nur die halbe Wahrheit, denn das Beispiel zeigt nicht, wie wir

- mit mehrfachen Nullstellen
- und komplexen Nullstellen

bei der Partialbruchzerlegung umgehen müssen.

Im Folgenden zeigen wir eine Lösung für den ersten Fall.

Bei einer mehrfachen Nullstelle a entstehen (bis auf einen Faktor) Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx.$$

mit $k = 1, \ldots, r$, wobei r die Vielfachheit der Nullstelle ist.

Für $k > 1$ gilt

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \int (x-a)^{-k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}.$$

Beispiel 6.37

Wir wollen

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$$

ermitteln. Das Nennerpolynom hat die einfache Nullstelle 2 und die zweifache Nullstelle 1, d. h. $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$.
Also existieren (Partialbruchzerlegung) $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}.$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 0 \\ -2a & - & 3b & + & c & = & 1 \\ a & + & 2b & - & 2c & = & 2 \end{array}$$

mit der Lösung $a=4$, $b=-4$, $c=-3$.

Fortsetzung Beispiel.

Also

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}.$$

und damit

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx = 4\log(x-2) - 4\log(x-1) + \frac{3}{x-1}.$$

Uneigentliche Integrale

- Bisher: Integral auf abgeschlossenem Intervall $[a, b]$
- In vielen Fällen sind aber auch Integrale wie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

  nützlich.
- Diese Integrale beschreiben unbeschränkte Flächen. Kann der Flächeninhalt trotzdem endlich sein?
- Ja, siehe Reihen. Wert einer Reihe ist Grenzwert der Folge der Partialsummen.
- Bei Integralen: Grenzwert von Integralen über kleinere abgeschlossene Intervalle, wobei eine Intervallgrenze "wandert".
- Wie bei Reihen kann der Grenzwert existieren oder nicht.

Definition des uneigentlichen Integrals

Definition 6.38

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

Wir nennen $\int_a^b f(x)\,dx$ ein uneigentliches Integral und definieren:

(i) Falls f bei a definiert und auf $[a, b)$ Regelfunktion ist, sei

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

(ii) Falls f bei b definiert und auf $(a, b]$ Regelfunktion ist, sei

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Fortsetzung Definition.

(iii) Im Allgemeinen: Wähle $c \in (a, b)$ und definiere:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Falls der Grenzwert jeweils existiert und endlich ist, sagen wir, das uneigentliche Integral konvergiert.

Bemerkungen:

- Diese Definition ist konsistent mit der Definition "eigentlicher Integrale".
- In (iii) ist der Wert des Integrals unabhängig von dem gewählten Zwischenpunkt c.

Beispiele uneigentlicher Integrale

Beispiel 6.39

(i)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty} 1 - \frac{1}{\beta} = 1.$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \log(x)|_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty} \log(\beta) = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral konvergiert also nicht.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung: Für $\lambda > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} -e^{-\lambda x}\Big|_0^\beta$$
$$= \lim_{\beta\to\infty} 1 - e^{-\lambda\beta} = 1$$

Mit der Exponentialverteilung modelliert man z. B. die Dauer von zufälligen Zeitintervallen.

(iv)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\searrow 0}\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\alpha\searrow 0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\searrow 0} 2 - 2\sqrt{\alpha} = 2$$

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Satz 6.40

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *und* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *Regelfunktionen.*

Gilt

- $|f(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$, *und*
- $\int_a^b g(x)\,dx$ *konvergiert,*

dann konvergiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

Insbesondere: Wenn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *konvergiert, dann auch* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Analog zu Reihen nennt man $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergiert.

Anwendung des Majorantenkriteriums

Beispiel 6.41

(i) Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergiert, wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &\le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

In der unteren Reihe ist das linke Integral ein "eigentliches Integral" und das rechte konvergiert, siehe Beispiel 6.39.

(ii) Konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$?

Wegen $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist die Funktion in $x = 0$ stetig fortsetzbar.

1. Versuch: Es gilt $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \le \frac{1}{x}$. Aber das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist divergent.

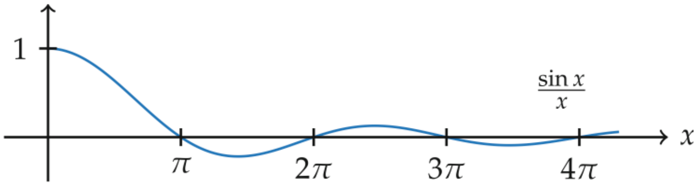
Fortsetzung Beispiel.

(ii) **2. Versuch:** Wir betrachten das Integral ab 1, verwenden zunächst die Definition der Konvergenz und integrieren partiell.

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{\sin(x)}{x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x}\sin(x)\,dx \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot(-\cos(x))\Big|_1^\beta - \int_1^\beta\left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos(x))\,dx\right) \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}(-\cos(\beta)) + \cos(1) - \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx \\
&= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx
\end{aligned}$$

Das rechte Integral in der letzten Zeile konvergiert nach dem Majorantenkriterium. Also konvergiert auch $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

Die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$



Bemerkungen:

- $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Ähnliches kennen wir von Reihen. So ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ auch konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- Die partielle Integration half uns, die Konvergenz nachzuweisen.

Uneigentliche Integrale und Reihen

In mancher Hinsicht sind uneigentliche Integrale und Reihen ähnlich:

- Ähnlichkeit der Definition mittels Grenzwerten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} f(t)\,dt$$

- Für $f(x) \geq 0$ existieren $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ und $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ genau dann, wenn sie (Reihe und Integral) nach oben beschränkt sind.
- Majorantenkriterium
- absolute Konvergenz impliziert Konvergenz
- Es ist häufiger einfacher die Konvergenz zu zeigen, als den Wert der Reihe bzw. des Integrals auszurechnen.

Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

Satz 6.42

Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine monoton fallende und nicht negative Regelfunktion.*

Dann gilt:

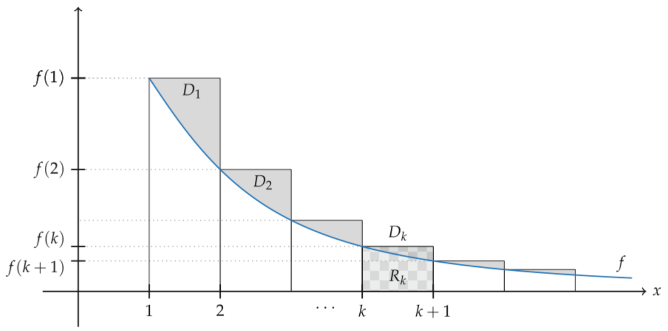
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergiert genau dann, wenn* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *konvergiert.*

(ii) *Die Folge* (a_n) *mit*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$$

konvergiert.

Beweis.



(i) folgt aus (ii), also zeigen wir (ii).

- $R_k :=$ Fläche der k-ten Säule $= f(k)$.
- $D_k := R_k - \int_k^{k+1} f(x)\,dx = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx$
- $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) = \sum_{k=1}^{n-1} D_k$

Fortsetzung Beweis.

- Weil f monoton fallend ist, folgt $f(x) \leq f(k)$ für $x \in [k, k+1]$.
- Mit der Monotonie des Integrals folgt $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq ((k+1)-k) \cdot f(k) = f(k)$.
- Damit folgt $D_k \geq 0$.
- Also ist $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k$ monoton wachsend.
- Die Gesamtfläche der D_k ist beschränkt.

  Anschauliche Begründung: Verschiebt man die Flächen für D_k alle in die linke Säule, bilden Sie dort eine disjunkte Fläche. Also $\sum_{k=1}^{\infty} D_k \leq f(1)$.

Fortsetzung Beweis.

- Formale Begründung:

$$0 \leq D_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) - f(k+1)$$

Damit folgt

$$0 \leq a_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} f(1) - f(n)$$

- Also ist a_n auch beschränkt und damit konvergent.

Anwendungen des Integralkriteriums für Reihen

Beispiel 6.43

(i) Für $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Begründung: Für $\alpha > 1$ konvergiert das Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$.
Folgerung: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

ist konvergent.

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$$

ist divergent. Beweis: $\frac{1}{x \log(x)}$ ist monoton fallend für $x \geq 2$.

$$\int \frac{1}{x \log(x)}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log(x)}\, dx = \log(\log(x))$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \log(x), g(x) = \log(x), g'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log(x)}\, dx &= \lim_{\beta \to \infty} \int_2^{\beta} \frac{1}{x \log(x)}\, dx \\
&= \log(\log(x))\Big|_2^{\beta} \\
&= \log(\log(\beta)) - \log(\log(2)) \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Treppenfunktion: Eine Funktion, die stückweise konstant ist.
- Regelfunktion: Eine Funktion, die gleichmäßig durch eine Folge von Treppenfunktionen approximiert werden kann.
- Integral für Regelfunktionen als Grenzwert der Integrale der approximierenden Treppenfunktionen.
- Hauptsatz: Berechnung von Integralen mit Hilfe einer Stammfunktion
- Regeln zur Konstruktion einer Stammfunktion: partielle Integration, Substitution, Integration von Potenzreihen, Partialbruchzerlegung
- uneigentliche Integrale: ∞, $-\infty$ oder Polstellen als Integrationsgrenzen
- Verbindung von Reihen und uneigentlichen Integralen: Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

Kapitel 7

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
H_f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Inhalt

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

  z. B.

$$f(x, y) = x^2 + 2y$$

  oder

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2 - 5x_3 + x_2 x_3.$$

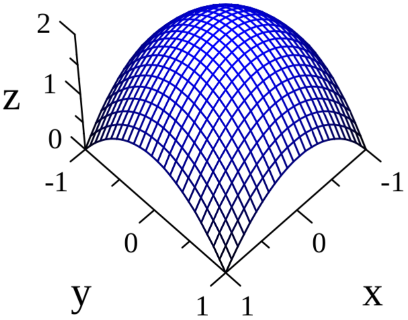
- Solche Funktionen heißen skalarwertige Funktionen, da der Funktionswert ein Skalar ist.
- In erster Linie interessiert uns dabei die Differenzierbarkeit solcher Funktionen.
- Beachten Sie: Der Begriff der Stetigkeit für solche Funktionen ist durch Definition 4.1 bereits abgedeckt.

Graphische Darstellung

Wie können wir den Funktionsgraphen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellen?

1. Als Fläche im Raum
   Der Funktionswert $z = f(x, y)$ wird als Höhe über dem durch (x, y) gegebenen Punkt der Ebene abgetragen.

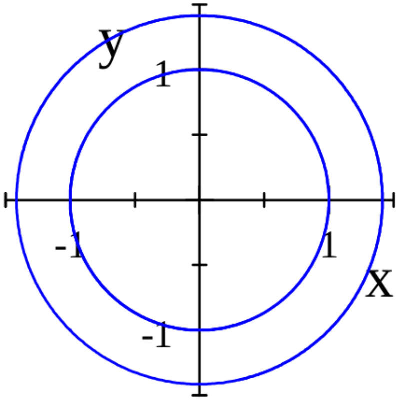
Beispiel: $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$



2. Als Höhenliniendiagramm
Bereiche mit gleichen Funktionswerten $z = f(x, y)$ werden durch eine Isolinie gekennzeichnet.

Beispiel: $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$
Schnitte parallel zur x, y-Ebene:

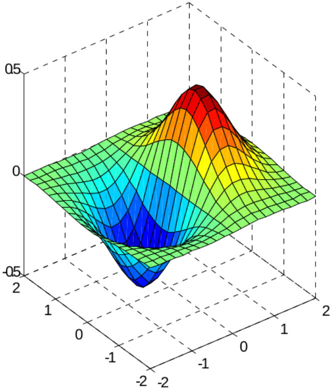
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$$
$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

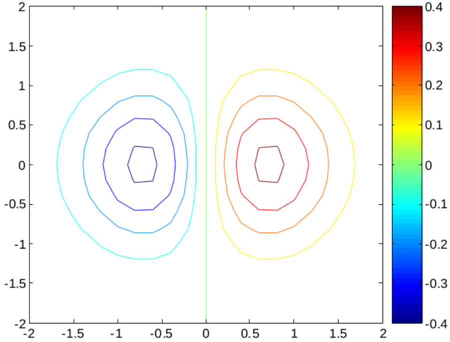


Häufig werden zusätzlich Farben eingesetzt, um die verschiedenen Höhen zu unterscheiden.

Beispiel:

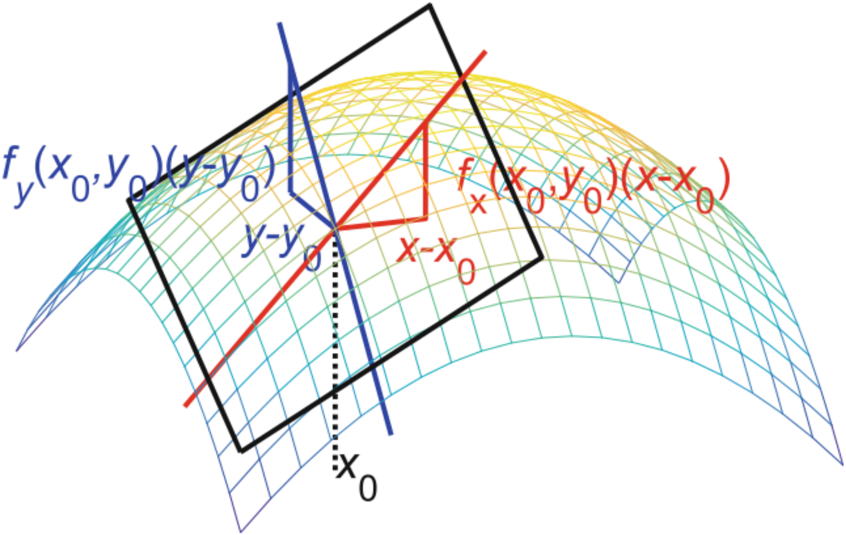
$$f(x, y) = x \cdot e^{-x^2-y^2}$$





Tangentialebene

- Wir wollen den Begriff der Differenzierbarkeit auf Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erweitern.
- Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $\hat{x} \in D$, wenn dort eine eindeutige Tangente gebildet werden kann.
- Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Wir müssen in $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ eine Tangentialebene bilden können.
- Dies entspricht einer Linearisierung der Funktion in $\hat{\mathbf{x}}$.
- Die Tangentialebene wird dann aufgespannt durch die Tangente in x- und die Tangente in y-Richtung im Punkte $\hat{\mathbf{x}}$.


$f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$
$y-y_0$
$x-x_0$
x_0

Fragen

1. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich in einem Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung der x-Achse bewegt?
2. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich in einem Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung der y-Achse bewegt?
3. Wie stark steigt die Tangentialebene an, wenn man sich diagonal bewegt, z. B. nach „Nordost“ oder „Süd-Südwest“?
4. In welche Richtung muss man gehen, um den steilsten Anstieg zu haben?

Partielle Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. partielle Ableitung nach x (y wird als konstant aufgefasst) in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x}+h, \hat{y}) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\bigg|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{y})$$

   Weitere Schreibweise: $f_x(\hat{x}, \hat{y})$

2. partielle Ableitung nach y (x wird als konstant aufgefasst) in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x}, \hat{y}+h) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\bigg|_{x=\hat{x}, y=\hat{y}} = \frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x}, \hat{y})$$

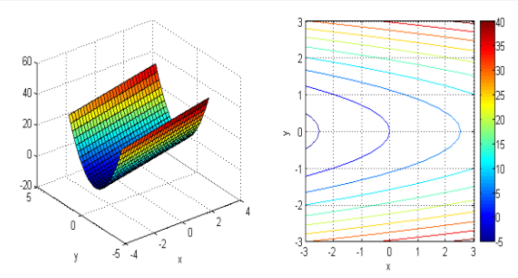
   Weitere Schreibweise: $f_y(\hat{x}, \hat{y})$

Beispiel 7.1

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = 2x + y^2$.

1.
$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) + y^2 - (2x + y^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

2.
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{2x + (y+h)^2 - (2x + y^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2yh + h^2}{h} = 2y$$



Richtungsableitung

3. Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ mit $\|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 1$ in $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$f_{\mathbf{r}}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x} + h \cdot r_1, \hat{y} + h \cdot r_2) - f(\hat{x}, \hat{y})}{h}$$

Bemerkungen:

- Die definierten Grenzwerte (1), (2), (3) existieren u. U. nicht.
- (1) und (2) sind Spezialfälle von (3).
- Für die partielle Differentation gelten die gleichen Regeln (Summen-, Produkt-, Quotienten, Kettenregel) wie für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen.

Verallgemeinerung auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- partielle Ableitung nach der Variablen x_i in Punkt $\hat{\mathbf{x}}$:

$$
\begin{aligned}
f_{x_i}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_{i-1}}, \hat{x_i} + h, \hat{x_{i+1}}, \ldots, \hat{x_n}) - f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})}{h}
\end{aligned}
$$

- Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\mathbf{r}$ in Punkt $\hat{\mathbf{x}}$:

$$
f_{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\hat{x_1} + h \cdot r_1, \ldots, \hat{x_n} + h \cdot r_n) - f(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})}{h}
$$

Auch hier muss $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$ gelten.

Gradient

- Existieren die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i für $i = 1, \ldots, n$ im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$, dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

  Gradient von f im Punkte $\hat{\mathbf{x}}$.

- Als Bezeichnung für den Gradienten wird auch das Symbol

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$$

  verwendet.

- Der Gradient ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$.

Richtungsableitung und Gradient

Die Richtungsableitung lässt sich mithilfe des Gradienten berechnen.

- Für einen Richtungsvektor $\mathbf{r}$ mit $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$ gilt

$$f_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{r}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle.$$

- Da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in den Argumenten ist, erhalten wir für einen Richtungsvektor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ die allgemeine Formel

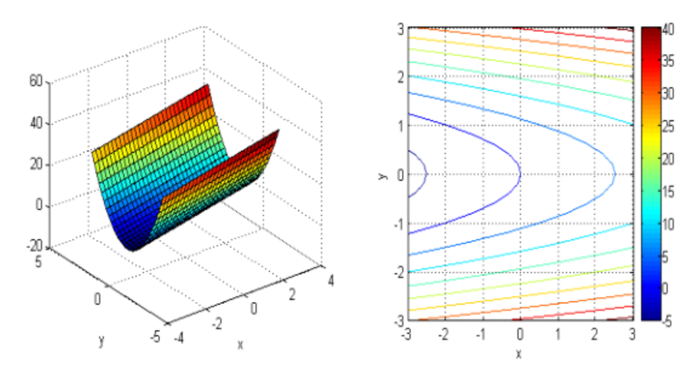
$$f_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|_2} \langle \mathbf{r}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\|_2 \cdot \cos(\alpha),$$

wobei α den durch die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\nabla f(\mathbf{x})$ aufgepannten Winkel bezeichnet.

Beispiel 7.2

Wir betrachten wieder die Funktion $f(x, y) = 2x + y^2$.

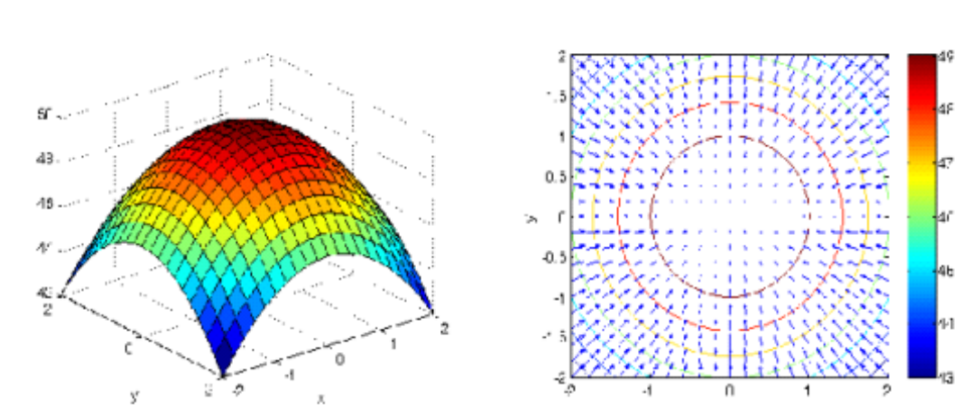
- In welche Richtung steigt die Funktion im Punkte $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ am stärksten?
- Wie hoch ist dieser Anstieg?



Beispiel 7.3

Wir betrachten $f(x,y) = 50 - x^2 - y^2$.

Richtung des steilsten Anstiegs/Abstiegs?



Partielle Ableitungen höherer Ordnung

- Partielle Ableitungen erster Ordnung sind meistens wieder Funktionen der unabhängigen Variablen, z. B.

$$\begin{aligned} f(x,y) = 10x^2y^3 \quad &\Rightarrow \quad f_x(x,y) = 20xy^3 \\ &\Rightarrow \quad f_y(x,y) = 30x^2y^2 \end{aligned}$$

- Nochmalige partielle Ableitung führt zu partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.
- partielle Ableitugen zweiter Ordnung für $f(x,y)$:
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial x} f$ nach x: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} = f_{xx}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial x} f$ nach y: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = f_{xy}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial y} f$ nach x: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = f_{yx}$
  - partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial y} f$ nach y: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = f_{yy}$
- Sind die partiellen Ableitungen bis einschließlich der betrachteten Ordnung stetig, dann ist die Reihenfolge der Differentiation vertauschbar. Z. B. gilt dann $f_{xy} = f_{yx}$.

Hesse-Matrix

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt die Matrix

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \partial x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Beispiel 7.4

Für $f(x,y) = 50 - x^2 - y^2$ erhalten wir $f_x(x,y) = -2x$ und $f_y = -2y$ und somit

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Konvexität

- Funktionseigenschaften in Zusammenhang mit der Krümmung: Konvexität, Konkavität
- Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ auch die Strecke zwischen diesen beiden Punkten in D enthalten ist.

$$D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist konvex } :\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in D.$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$.

  f ist konvex $:\Leftrightarrow$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

- f ist konkav, wenn $-f$ konvex ist.
- f ist streng konvex (konkav), wenn für alle $\lambda \in (0,1)$ die Ungleichung strikt gilt.

Definitheit von Matrizen

- Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv (semi-)definit, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$$

- Gilt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$$

  dann ist $\mathbf{A}$ negativ (semi-)definit.
- Existieren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0,$$

  so ist $\mathbf{A}$ indefinit.

Krümmung und Hesse Matrix

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konvex auf D, wenn die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$ positv semidefinit (definit) für alle $\mathbf{x} \in D$ ist.
- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konkav auf D, wenn die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$ negativ semidefinit (definit) für alle $\mathbf{x} \in D$ ist.

Beispiel 7.5

Für $f(x,y) = 50 - x^2 - y^2$ gilt

$$H_f(\hat{x},\hat{y}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{x}^T H_f(\hat{x},\hat{y})\mathbf{x} = -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0 \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Also ist f streng konkav auf $\mathbb{R}^2$.

Kriterien für Definitheit: Eigenwerte

Satz 7.6

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dann gilt:

- **A** *ist positiv definit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$.
- **A** *ist positiv semidefinit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$.
- **A** *ist negativ definit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$.
- **A** *ist negativ semidefinit* $\Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$.
- **A** *ist indefinit* $\Leftrightarrow$ *es existieren ein* $\lambda_i > 0$ *und ein* $\lambda_j < 0$.

Kriterien für Definitheit: Hauptminoren

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $k \in \{1,\ldots,n\}$. Dann heißt

$$\det(\mathbf{A}_k) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

der k-te Hauptminor (oder k-te Hauptabschnittsdeterminante) von $\mathbf{A}$.

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann

- positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind, also $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ für $k = 1,\ldots,n$,
- negativ definit, wenn $(-1)^k \det(\mathbf{A}_k) > 0$ für $k = 1,\ldots,n$ gilt.
- Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und keiner der beiden Fälle trifft zu, dann ist $\mathbf{A}$ indefinit.

Lokales Maximum und lokales Minimum

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

- Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heißt lokales Maximum, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\hat{\mathbf{x}}).$$

- Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heißt lokales Minimum, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}).$$

Bemerkungen:

- Anschaulich: in einer kleinen Umgebung von $\hat{\mathbf{x}}$ mit Radius ϵ gibt es keinen größeren (kleineren) Funktionswert.
- Die genaue Norm spielt hier keine Rolle, da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen in einem gewissen Sinne äquivalent sind.

Notwendige Bedingung für lokales Extremum

- In einem lokalen Extremum darf es keine Richtung geben, in der eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wächst.
- Also müssen alle Richtungsableitungen $= 0$ sein.
- Somit insbesondere die partiellen Ableitungen.
- Damit erhalten wir als notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

- Dies ist ein u. U. nichtlineares Gleichungssystem in n Variablen.

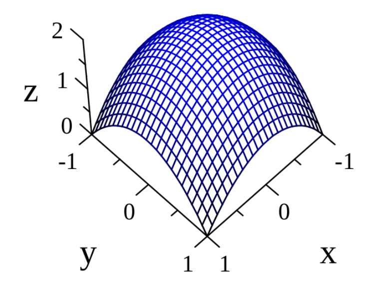
Beispiel 7.7

Für $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ erhalten wir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Damit ergibt sich $x = y = 0$ als einziger Kandidat für einen Extremwert.

An der Graphik sehen wir, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.



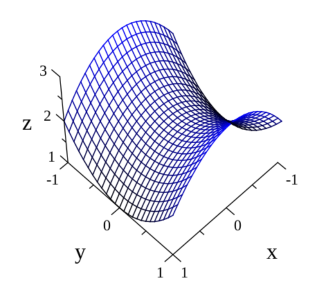
Beispiel 7.8

Auch für die Funktion $f(x, y) = 2 - x^2 + y^2$ ist die Bedingung

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

in $x = y = 0$ erfüllt.

Hier handelt es sich aber um einen Sattelpunkt.



Hinreichende Bedingungen für Minimum/Maximum

- Die Krümmung muss in einem stationären Punkt ($\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) in alle Richtungen gleichartig sein, d. h. in alle Richtungen konvex oder in alle Richtungen konkav.
- In einem Sattelpunkt ist dies nicht der Fall.
- Die Art der Krümmung können wir mithilfe der Hesse-Matrix ermitteln.
- Genauer:
  - Wir bestimmen die Eigenwerte der Hesse-Matrix oder
  - wir wenden das Hauptminorenkriterium an.

Beispiel 7.9

1. Für $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Dies ist eine Diagonalmatrix, die Diagonalelemente sind die Eigenwerte, also ist die Matrix negativ definit.
   Somit liegt ein Maximum vor.

2. Für $f(x,y) = 2 - x^2 + y^2$ ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Wir haben Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen, also indefinit, also Sattelpunkt.

Beispiel 7.10

Sei $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Wir erhalten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

und damit $x = y = 0$ als einzigen stationären Punkt.
Wir bilden die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist diese Matrix positiv definit, also liegt ein Minimum vor.

Beispiel 7.11

Sei $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$. Wir erhalten

$$\nabla f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - 2x^2 \\ -2xy \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Stationäre Punkte: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0$.
Hesse-Matrix:

$$H_f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x & 4x^2y - 2y \\ 4x^2y - 2y & 4y^2x - 2x \end{pmatrix}$$

Einsetzen ergibt:

- $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ist negativ definit, also Maximum.
- $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ist positiv definit, also Minimum.

Beispiel 7.12

Sei $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 6$. Wir erhalten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x_1 - 4x_2 - 10 \\ -4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8 \\ 4x_2 + 14x_3 + 14 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Stationärer Punkt: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$.
Hesse-Matrix:

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Das Hauptminorenkriterium liefert, dass diese Matrix positiv definit ist, also liegt ein Minimum vor.

Zusammenfassung

- partielle Ableitungen und Richtungsableitung
- Richtungsableitung kann aus den partiellen Ableitungen berechnet werden.
- Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs
- zweite partielle Ableitungen: Hesse-Matrix
- notwenige Bedingung für Extremum: $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- Art des stationären Punkts: Definitheit der Hesse-Matrix
- Wie Definitheit bestimmen? Eigenwerte oder Hauptminorenkriterium

Die Funktion $f(x) = e^{ix}$

- Wir wissen $\left|e^{ix}\right| = 1$, liegt also auf dem Einheitskreis.
- Mit wachsendem x läuft e^{ix} immer wieder um den Einheitskreis herum.
- Die Laufrichtung ist gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv).

Lemma 8.1

Sei $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = e^{ix}$.

- *Dann gibt es genau ein $T > 0$, für das $f : [0, T) \to K$ bijektiv ist.*
- *Es gilt $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

- Eine Funktion mit $f(x + T) = f(x)$ nennen wir periodisch mit der Periode T.

Die Zahl π

Definition 8.2

Sei T wie in Lemma 8.1. Dann sei die Zahl

$$\pi := \frac{T}{2}.$$

π ist also die Hälfte der Länge des Einheitskreises.

Folgerung 8.3

Die Lösungen der Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$ *sind* $x = 2\pi k$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.

Konsequenzen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Satz 8.4

(i) *Die Funktionen Sinus und Cosinus sind 2π-periodisch, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

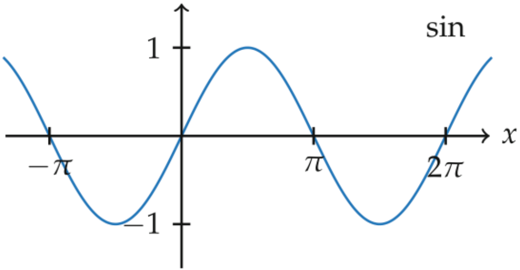
(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

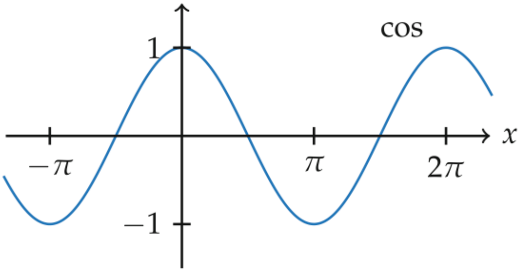
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

(iii) *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\sin(k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Graph von Sinus und Cosinus





Tab. 14.1 Die wichtigsten Werte von Sinus und Kosinus

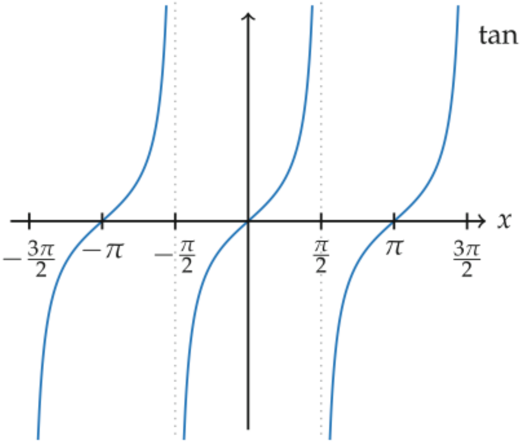
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
Gradmaß	0	30	45	60	90	180
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

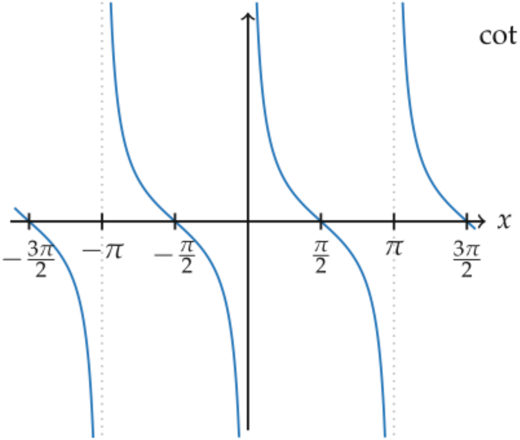
Tangens und Cotangens

Definition 8.5

$$\begin{aligned}
\tan(x) &:= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \\
\cot(x) &:= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Graph von Tangens und Cotangens





Eigenschaften von Tangens und Cotangens

Satz 8.6

(i) *Tangens und Cotangens sind π-periodisch:*

$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \quad \cot(x+\pi) = \cot(x).$$

(ii) $\cot(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

(iii)

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), (\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

(iv)

$$\int \tan(x)\,dx = -\log(|\cos(x)|), \quad \int \cot(x)\,dx = \log(|\sin(x)|)$$

Die Arcusfunktionen

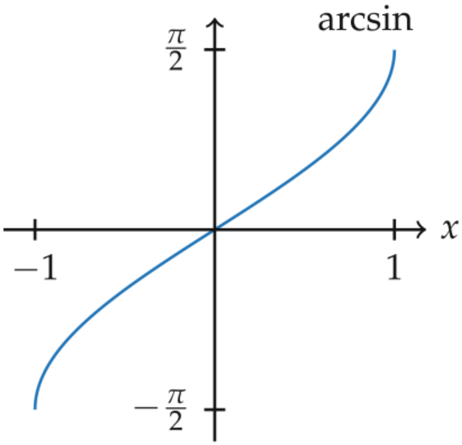
- Die trigonometrischen Funktionen sind nicht injektiv.
- Will man die Umkehrfunktionen definieren, muss daher der Definitionsbereich geeignet eingeschränkt werden.

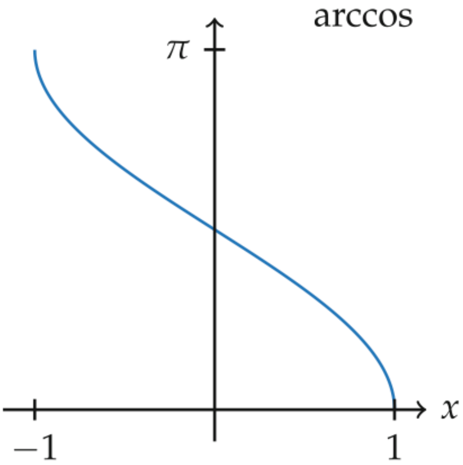
Definition 8.7

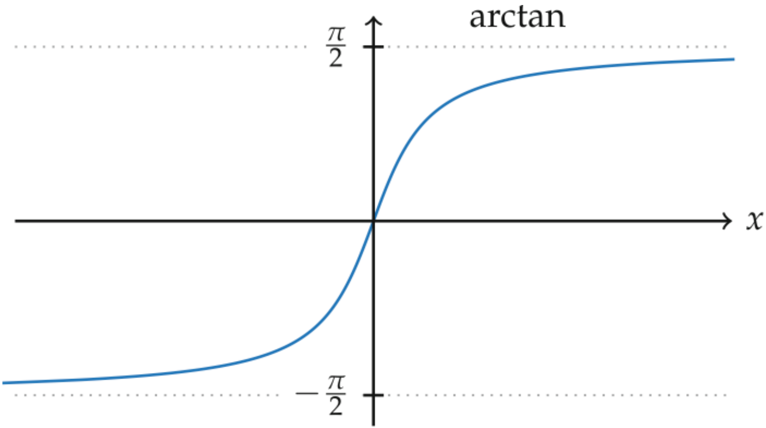
Die Arcusfunktionen sind als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen wie folgt definiert:

Trig. Funktion					Umkehrfunktion				
sin	:	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\rightarrow$	$[-1, 1]$	arcsin	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
cos	:	$[0, \pi]$	$\rightarrow$	$[-1, 1]$	arccos	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
tan	:	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\rightarrow$	$\mathbb{R}$	arctan	:	$\mathbb{R}$	$\rightarrow$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Graphen der Arcusfunktionen






arctan
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$

Eigenschaften der Arcusfunktionen

Satz 8.8

Es gilt:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Folgerung 8.9

Es gilt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x), \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$$

Nochmals Integration rationaler Funktionen

Beispiel 8.10

Wir wollen

$$\int \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\, dx$$

bestimmen. Eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist 2. Polynomdivision liefert

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 2) = x^2 + 1.$$

Also hat das Nennerpolynom keine weiteren reellen Nullstellen, aber die komplexen Nullstellen i und −i. In diesem Fall wählt man einen anderen Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} &= \frac{a}{x-2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2+1) + (bx + c)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-2b + c)x + (a - 2c)}{(x-2)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 3 \\ & - & 2b & + & c & = & -1 \\ a & & & - & 2c & = & -5 \end{array}$$

mit der Lösung $a = 1, b = 2, c = 3$. Also

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\, dx &= \int \frac{1}{x-2}\, dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\, dx \\ &= \log(x-2) + \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= \log(x-2) + \log(x^2+1) + 3\arctan(x). \end{aligned}$$