Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. April 2020

Logik und Komplexität

Sommersemester 2020

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis 5. Mai 2020

Aufgabe 1:

Für eine FO[σ]-Formel $\varphi(\bar{x})$ mit k freien Variablen (für $k \geqslant 1$) und für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ sei $[\![\varphi(\bar{x})]\!]^{\mathcal{A}} := \{\bar{a} \in A^k \ : \ \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}$. Zeigen Sie, dass es eine Signatur σ gibt, so dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

> QUERY CONTAINMENT PROBLEM FÜR FO[σ]
>
> *Eingabe:* Eine Zahl $k \geqslant 1$ und FO[σ]-Formeln φ und ψ mit je k freien Variablen $\bar{x}$.
>
> *Frage:* Gilt für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$: $[\![\varphi(\bar{x})]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq [\![\psi(\bar{x})]\!]^{\mathcal{A}}$?

Aufgabe 2: **Diese Aufgabe ist zur Abgabe vorgesehen**

Eine Signatur σ nennen wir **binär**, falls jedes Symbol in σ ein Relationssymbol der Stelligkeit 2 ist.

Beweisen Sie folgende Verschärfung des Satzes von Trakhtenbrot:

Es gibt eine endliche, binäre Signatur $\hat{\sigma}$, so dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO[$\hat{\sigma}$] unentscheidbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich für beliebige Signaturen σ eine geeignete Repräsentation von σ-Strukturen durch kantengefärbte Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten binären Signatur $\hat{\sigma}$. Benutzen Sie die in der Vorlesung für $\sigma := \{<, \mathsf{succ}, 0, B, K, Z\}$ bewiesene Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO[σ]-Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO[$\hat{\sigma}$]-Sätze zu beweisen.

Achtung: Die für die Aufgaben 3 und 4 benötigten Definitionen zu Baumautomaten und regulären Baumsprachen finden Sie auf der Rückseite des Blattes.

Aufgabe 3:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in denen jedes Blatt gerade Höhe hat. Hierbei sei die *Höhe* eines Blattes b definiert als die Anzahl der Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu b. Zeigen Sie, dass L regulär ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4:
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Wenn $L_1 \subseteq T_\Sigma$ und $L_2 \subseteq T_\Sigma$ regulär sind, so ist auch $L_\cup := L_1 \cup L_2$ regulär.

(b) Wenn $L \subseteq T_\Sigma$ regulär ist, so ist auch die Baumsprache $\overline{L} := \{t \in T_\Sigma \ : \ t \notin L\}$ regulär.

Definitionen

Binärbäume. Ein *gewurzelter Baum* G ist ein endlicher gerichteter Graph, der als ungerichteter Graph ein Baum ist (d.h. der ungerichtete Graph, der aus dem gerichteten Graphen G entsteht, indem jede Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt wird, ist ein Baum) und der einen *Wurzelknoten* enthält, von dem aus jeder andere Knoten über einen gerichteten Pfad erreichbar ist. Wenn jeder Knoten von G entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder besitzt, so heißt G *voll*. Ein voller Baum, dessen Kantenmenge E in $E_1 \dot\cup E_2$ partitioniert ist, so dass jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau ein Kind in E_1 (sein *erstes Kind*) und ein Kind in E_2 (sein *zweites Kind*) besitzt, heißt *geordneter Binärbaum*.

Σ-Bäume. Sei Σ ein endliches nicht-leeres Alphabet. Ein Σ-*Baum* $t = (B, \lambda)$ besteht aus einem geordneten Binärbaum B und einer Abbildung λ, die jedem Knoten v von B eine *Beschriftung* $\lambda(v) \in \Sigma$ zuordnet. Die Menge aller Σ-Bäume bezeichnen wir mit T_Σ. Eine *Baumsprache* ist eine Teilmenge L von T_Σ.

Baumautomaten und reguläre Baumsprachen. Analog zu den endlichen Automaten aus der Theorie der formalen Sprachen, definieren wir Automaten, die Σ-Bäume verarbeiten. Ein (bottom-up) *Baumautomat* ist ein Tupel $\mathfrak{A} := (Q, \Sigma, \Delta, F)$, wobei Q eine endliche Menge, Σ ein endliches Alphabet, $F \subseteq Q$ und $\Delta \subseteq (Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma \times Q$ eine Relation ist. Q heißt *Zustandsmenge*, F heißt *Menge der akzeptierenden Zustände* und Δ heißt *Überführungsrelation* von $\mathfrak{A}$. Falls Δ der Graph einer Abbildung ist, die auf ganz $(Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma$ definiert ist, so heißt $\mathfrak{A}$ *deterministisch*, ansonsten heißt $\mathfrak{A}$ *nichtdeterministisch*. Intuitiv können wir uns vorstellen, dass $\mathfrak{A}$ einen Σ-Baum t von den Blättern ausgehend verarbeitet und sich dabei auf die Wurzel zubewegt. Sei $V(t)$ die Knotenmenge des Binärbaums von t. Dabei baut $\mathfrak{A}$ eine Funktion $q : V(t) \to Q$ auf, die als *Lauf von* $\mathfrak{A}$ *auf* t bezeichnet wird. Wenn $\mathfrak{A}$ deterministisch ist, ist q eindeutig bestimmt; ansonsten kann $\mathfrak{A}$ viele Läufe (oder auch keinen Lauf) auf t haben. Zunächst wird jedem Blatt v mit Beschriftung $a \in \Sigma$ ein Zustand $q(v) \in Q$ mit $(\perp, a, q(v)) \in \Delta$ zugewiesen. Nun bestimmt $\mathfrak{A}$ rekursiv den Zustand $q(v)$ eines mit $a \in \Sigma$ gefärbten Knotens v, der kein Blatt ist, aus den Zuständen seines ersten und zweiten Kindes u_1 und u_2. Dazu weist $\mathfrak{A}$ dem Knoten v einen Zustand $q(v) \in Q$ mit $(q(u_1), q(u_2), a, q(v)) \in \Delta$ zu. Wenn schließlich alle Knoten von t durch q mit Zuständen markiert sind, prüft $\mathfrak{A}$, ob der Zustand $q(w)$ an der Wurzel w von t zur Menge F gehört. Falls ja, so ist q ein *akzeptierender Lauf*, ansonsten ist q ein *verwerfender Lauf*. Ein Σ-Baum t wird von $\mathfrak{A}$ genau dann *akzeptiert*, wenn es mindestens einen akzeptierenden Lauf von $\mathfrak{A}$ auf t gibt. Die vom Baumautomat $\mathfrak{A}$ *erkannte* Baumsprache $L(\mathfrak{A})$ ist die Menge aller Σ-Bäume t, die von $\mathfrak{A}$ akzeptiert werden. Eine Baumsprache L heißt *regulär*, wenn es einen Baumautomaten $\mathfrak{A}$ gibt, der L erkennt.