# Teil IV

# Kontextfreie Sprachen, Teil 5: Deterministische Kellerautomaten und Entscheidungsprobleme

# Deterministische Kellerautomaten

## Definition

Sei $A := (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, K_0, F)$ ein Kellerautomat. Wir bezeichnen $A$ als **deterministischen Kellerautomaten (DPDA)** wenn

$$|\delta(q, a, K)| + |\delta(q, \varepsilon, K)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $K \in \Gamma$.

# Deterministische Kellerautomaten

## Definition

Sei $A := (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, K_0, F)$ ein Kellerautomat. Wir bezeichnen $A$ als **deterministischen Kellerautomaten (DPDA)** wenn

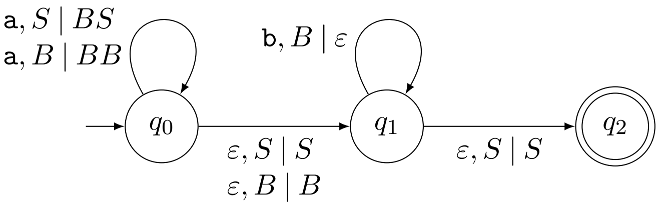
$$|\delta(q, a, K)| + |\delta(q, \varepsilon, K)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $K \in \Gamma$.

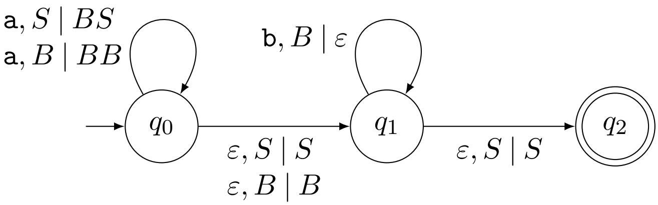
## Also:

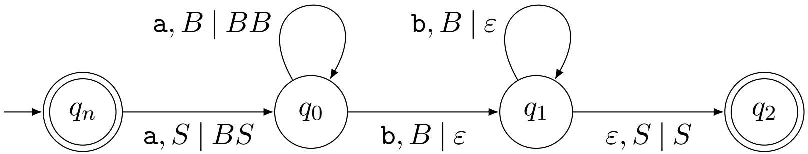
- $\varepsilon$-Übergänge sind erlaubt...
- ...aber nicht zusammen mit anderen Übergängen (abhängig vom Kellersymbol).

# Beispiel: Determinismus und PDAs



# Beispiel: Determinismus und PDAs



# Deterministisch kontextfreie Sprachen

**Definition**

Eine kontextfreie Sprache $L$ ist **deterministisch kontextfrei**, wenn ein DPDA $A$ existiert mit $L = \mathcal{L}_Z(A)$.

# Deterministisch kontextfreie Sprachen

## Definition

Eine kontextfreie Sprache $L$ ist **deterministisch kontextfrei**, wenn ein DPDA $A$ existiert mit $L = \mathcal{L}_Z(A)$.

## Lemma

Sei $A$ ein DPDA und sei $u \in \mathcal{L}_K(A)$.
Dann existiert kein $w \in \mathcal{L}_K(A)$
für das $u$ ein echtes Präfix von $w$ ist.

# Deterministisch kontextfreie Sprachen

**Definition**

Eine kontextfreie Sprache $L$ ist **deterministisch kontextfrei**, wenn ein DPDA $A$ existiert mit $L = \mathcal{L}_Z(A)$.

**Lemma**

Sei $A$ ein DPDA und sei $u \in \mathcal{L}_K(A)$. Dann existiert kein $w \in \mathcal{L}_K(A)$ für das $u$ ein echtes Präfix von $w$ ist.

- $\mathrm{DCFL}$: Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen.

# Deterministisch kontextfreie Sprachen

## Definition

Eine kontextfreie Sprache $L$ ist **deterministisch kontextfrei**, wenn ein DPDA $A$ existiert mit $L = \mathcal{L}_Z(A)$.

## Lemma

Sei $A$ ein DPDA und sei $u \in \mathcal{L}_K(A)$. Dann existiert kein $w \in \mathcal{L}_K(A)$ für das $u$ ein echtes Präfix von $w$ ist.

- $\mathrm{DCFL}$: Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen.

## Beispiel

$\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$
- $\overline{\mathrm{COPY}_\Sigma} \notin \mathrm{DCFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$
- $\overline{\mathrm{COPY}_\Sigma} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \notin \mathrm{DCFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$
- $\overline{\mathrm{COPY}_\Sigma} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{w\mathtt{c}w^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \mathrm{DCFL}$

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_{\mathtt{a}} = |w|_{\mathtt{b}}\} \in \mathrm{DCFL}$
- $\overline{\mathrm{COPY}_\Sigma} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{w\mathtt{c}w^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \mathrm{DCFL}$

DCFL ist...

- **nicht abgeschlossen** unter Schnitt, Vereinigung, Mengendifferenz, Homomorphismus, suffix ...

# Eigenschaften von DCFL

**Satz**

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCFL} \subset \mathrm{CFL}$

**Satz**

DCFL ist abgeschlossen unter Komplement.

$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

- $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b}\} \in \mathrm{DCFL}$
- $\overline{\mathrm{COPY}_\Sigma} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \notin \mathrm{DCFL}$
- $\{w\mathtt{c}w^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \mathrm{DCFL}$

DCFL ist...

- **nicht abgeschlossen** unter Schnitt, Vereinigung, Mengendifferenz, Homomorphismus, suffix ...
- **abgeschlossen** unter Schnitt mit regulären Sprachen, inversem Homomorphismus, prefix.

# Entscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

## Entscheidungsprobleme

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik.

# Entscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

**Entscheidungsprobleme**

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(G)$?

# Entscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

## Entscheidungsprobleme

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(G)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

# Entscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

## Entscheidungsprobleme

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(G)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?
- Unendlichkeitsproblem: Ist $|\mathcal{L}(G)| = \infty$?

# Entscheidungsprobleme für kontextfreie Sprachen

## Entscheidungsprobleme

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(G)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?
- Unendlichkeitsproblem: Ist $|\mathcal{L}(G)| = \infty$?

Diese Probleme sind effizient lösbar.

# Das Postsche Korrespondenz Problem

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Homomorphismenvariante

- Seien $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Alphabete und $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen.
- $(\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$ ist **Instanz des PCP**

# Das Postsche Korrespondenz Problem

**Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Homomorphismenvariante**

- Seien $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Alphabete und $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen.
- $(\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$ ist **Instanz des PCP**
- **Lösung** dieser Instanz: Wort $x \in \Sigma_1^+$ mit $g(x) = h(x)$.

# Das Postsche Korrespondenz Problem

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Homomorphismenvariante

- Seien $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Alphabete und $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen.
- $(\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$ ist **Instanz des PCP**
- **Lösung** dieser Instanz: Wort $x \in \Sigma_1^+$ mit $g(x) = h(x)$.

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Dominovariante

- Sei $\Sigma$ ein Alphabet.
- **Instanz des PCP:** $(\Sigma, P)$
  Folge $P := ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ mit $n \geq 1$, $x_i, y_i \in \Sigma^*$.

# Das Postsche Korrespondenz Problem

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Homomorphismenvariante

- Seien $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Alphabete und $g, h \colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen.
- $(\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$ ist **Instanz des PCP**
- **Lösung** dieser Instanz: Wort $x \in \Sigma_1^+$ mit $g(x) = h(x)$.

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Dominovariante

- Sei $\Sigma$ ein Alphabet.
- **Instanz des PCP:** $(\Sigma, P)$
  Folge $P := ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ mit $n \geq 1$, $x_i, y_i \in \Sigma^*$.
- **Lösung** dieser Instanz: Folge $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ für $k \geq 1$ mit

$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdots y_{i_k}.$$

# Das Postsche Korrespondenz Problem

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Homomorphismenvariante

- Seien $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Alphabete und $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ Homomorphismen.
- $(\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$ ist **Instanz des PCP**
- **Lösung** dieser Instanz: Wort $x \in \Sigma_1^+$ mit $g(x) = h(x)$.

## Postsches Korrespondenz Problem (PCP) – Dominovariante

- Sei $\Sigma$ ein Alphabet.
- **Instanz des PCP:** $(\Sigma, P)$
  Folge $P := ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ mit $n \geq 1$, $x_i, y_i \in \Sigma^*$.
- **Lösung** dieser Instanz: Folge $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ für $k \geq 1$ mit

$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdots y_{i_k}.$$

## Entscheidungsproblem PCP

Hat eine Instanz des PCP eine Lösung?

Unentscheidbar.

# PCP-Beispiele

Sei $\Sigma_1 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $\Sigma_2 := \{0, 1\}$.

## Beispiel 1

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 11,$$
$$h(\mathtt{a}) := 01, \qquad h(\mathtt{b}) := 1, \qquad h(\mathtt{c}) := 10.$$

# PCP-Beispiele

Sei $\Sigma_1 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $\Sigma_2 := \{0, 1\}$.

## Beispiel 1

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 11,$$
$$h(\mathtt{a}) := 01, \qquad h(\mathtt{b}) := 1, \qquad h(\mathtt{c}) := 10.$$

Kürzeste Lösung: `acb`.

# PCP-Beispiele

Sei $\Sigma_1 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $\Sigma_2 := \{0, 1\}$.

### Beispiel 1

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 11,$$
$$h(\mathtt{a}) := 01, \qquad h(\mathtt{b}) := 1, \qquad h(\mathtt{c}) := 10.$$

Kürzeste Lösung: $\mathtt{acb}$.

### Beispiel 2

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 1,$$
$$h(\mathtt{a}) := 1, \qquad h(\mathtt{b}) := 0, \qquad h(\mathtt{c}) := 101.$$

# PCP-Beispiele

Sei $\Sigma_1 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $\Sigma_2 := \{0, 1\}$.

## Beispiel 1

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 11,$$
$$h(\mathtt{a}) := 01, \qquad h(\mathtt{b}) := 1, \qquad h(\mathtt{c}) := 10.$$

Kürzeste Lösung: acb.

## Beispiel 2

Wir definieren die Homomorphismen $g, h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ durch

$$g(\mathtt{a}) := 0, \qquad g(\mathtt{b}) := 01, \qquad g(\mathtt{c}) := 1,$$
$$h(\mathtt{a}) := 1, \qquad h(\mathtt{b}) := 0, \qquad h(\mathtt{c}) := 101.$$

Kürzeste Lösung:

babbababbabbcbbccbaacbbabcbbaabcbbbacbcbccac

# Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

## Schnittproblem(e)

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- CFG-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

# Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

## Schnittproblem(e)

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- CFG-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Seien $A_1, A_2$ DPDAs.

- DPDA-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2) = \emptyset$?

# Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

## Schnittproblem(e)

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- CFG-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Seien $A_1, A_2$ DPDAs.

- DPDA-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2) = \emptyset$?

## Satz

Beide Probleme sind unentscheidbar.

# Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

### Schnittproblem(e)

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- CFG-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Seien $A_1, A_2$ DPDAs.

- DPDA-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2) = \emptyset$?

### Satz

Beide Probleme sind unentscheidbar.

### Idee

Reduziere PCP auf diese Probleme.

# Unentscheidbarkeit bei kontextfreien Sprachen

## Schnittproblem(e)

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- CFG-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Seien $A_1, A_2$ DPDAs.

- DPDA-Schnittproblem: Ist $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2) = \emptyset$?

## Satz

Beide Probleme sind unentscheidbar.

## Idee

Reduziere PCP auf diese Probleme.

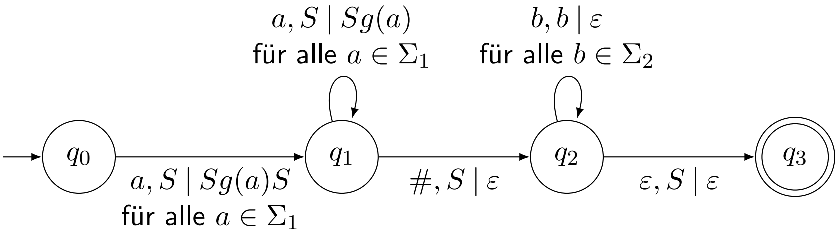
- Eingabe: $I = (\Sigma_1, \Sigma_2, g, h)$
- Konstruiere DPDAs $A_g$, $A_h$
- $\mathcal{L}(A_g) \cap \mathcal{L}(A_h) \neq \emptyset$ gdw $I$ hat Lösung

# PCP $\rightarrow$ DPDA-Schnittproblem

$$L_g := \{a_n \cdots a_2 a_1 \# g(a_1) g(a_2) \cdots g(a_n) \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma_1\},$$
$$L_h := \{a_n \cdots a_2 a_1 \# h(a_1) h(a_2) \cdots h(a_n) \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma_1\}.$$

# PCP → DPDA-Schnittproblem

$$L_g := \{a_n \cdots a_2 a_1 \# g(a_1) g(a_2) \cdots g(a_n) \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma_1\},$$
$$L_h := \{a_n \cdots a_2 a_1 \# h(a_1) h(a_2) \cdots h(a_n) \mid n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma_1\}.$$



# Mehr Unentscheidbarkeit

## Mehr Entscheidungsprobleme

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^*$?

# Mehr Unentscheidbarkeit

## Mehr Entscheidungsprobleme

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \subseteq \mathcal{L}(G_2)$?

# Mehr Unentscheidbarkeit

## Mehr Entscheidungsprobleme

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \subseteq \mathcal{L}(G_2)$?
- Äquivalenzproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?

# Mehr Unentscheidbarkeit

## Mehr Entscheidungsprobleme

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \subseteq \mathcal{L}(G_2)$?
- Äquivalenzproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?
- Mehrdeutigkeitsproblem: Ist $G_1$ mehrdeutig?

# Mehr Unentscheidbarkeit

## Mehr Entscheidungsprobleme

Seien $G_1, G_2$ kontextfreie Grammatiken.

- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) \subseteq \mathcal{L}(G_2)$?
- Äquivalenzproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?
- Mehrdeutigkeitsproblem: Ist $G_1$ mehrdeutig?
- Regularitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(G_1)$ regulär?

## Satz

Jedes dieser Probleme ist unentscheidbar.