4.2 Bäume

Ungerichtete Bäume

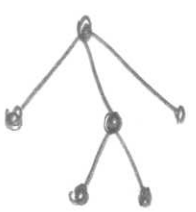
Definition 4.43

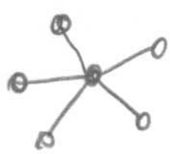
Ein <u>ungerichteter Baum</u> ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G=(V,E)$, der keinen einfachen Kreis enthält.

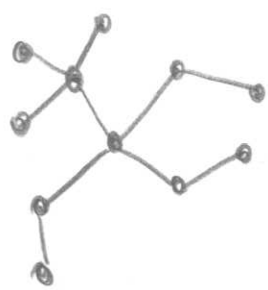
Diejenigen Knoten in V, die den Grad 1 haben, heißen <u>Blätter</u> des Baums.

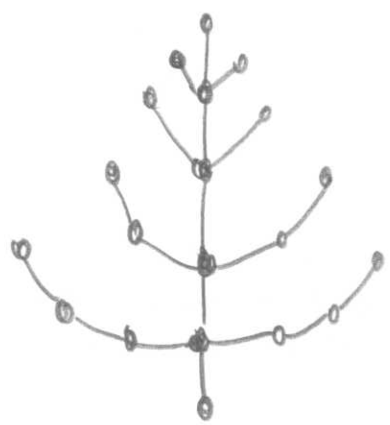
Beispiel 4.44

Bäume:

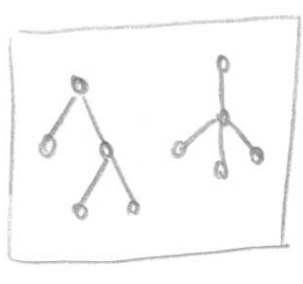








Keine Bäume:



Beobachtung 4.45

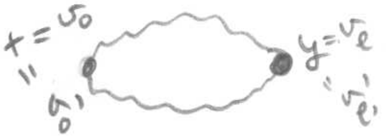
Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum.

Da B zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis enthält, gilt f.a. Knoten $x, y \in V$:

$\boxed{\text{es gibt in } B \text{ genau einen einfachen Weg von } x \text{ nach } y}$

(denn: Da B zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen einfachen Weg von x nach y.

Angenommen, $(v_0, \dots, v_\ell)$ und $(v_0', \dots, v_{\ell'}')$ sind zwei verschiedene einfache Wege von x nach y. Insbes. gilt dann: $v_0 = x = v_0'$ und $v_\ell = y = v_{\ell'}'$. Skizze:



Dann ist aber $(v_0, \dots, v_\ell, v_{\ell'-1}', \dots, v_0')$ ein Kreis. Dieser Kreis enthält einen einfachen Kreis. Dann kann B aber kein Baum sein. ↯)

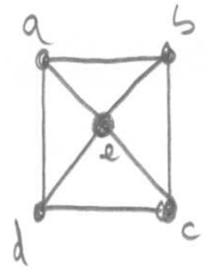
Definition 4.46

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

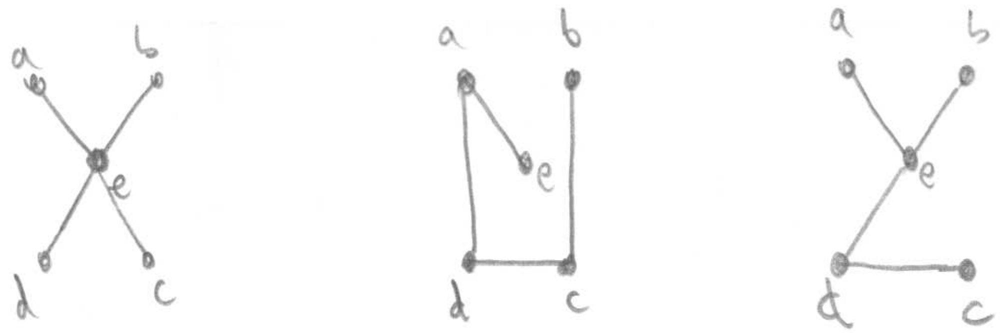
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt <u>Spannbaum von G</u>, falls G' ein ungerichteter Baum mit $V' = V$ und $E' \subseteq E$ ist.

Beispiel 4.47

Der Graph $G =$



hat z.B. folgende Spannbäume:



Satz 4.48

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge endlich ist. Dann gilt:

Es gibt (mindestens) einen Spannbaum von G $\iff$ G ist zusammenhängend.

Beweis: "$\Rightarrow$": klar.
"$\Leftarrow$": Übung.

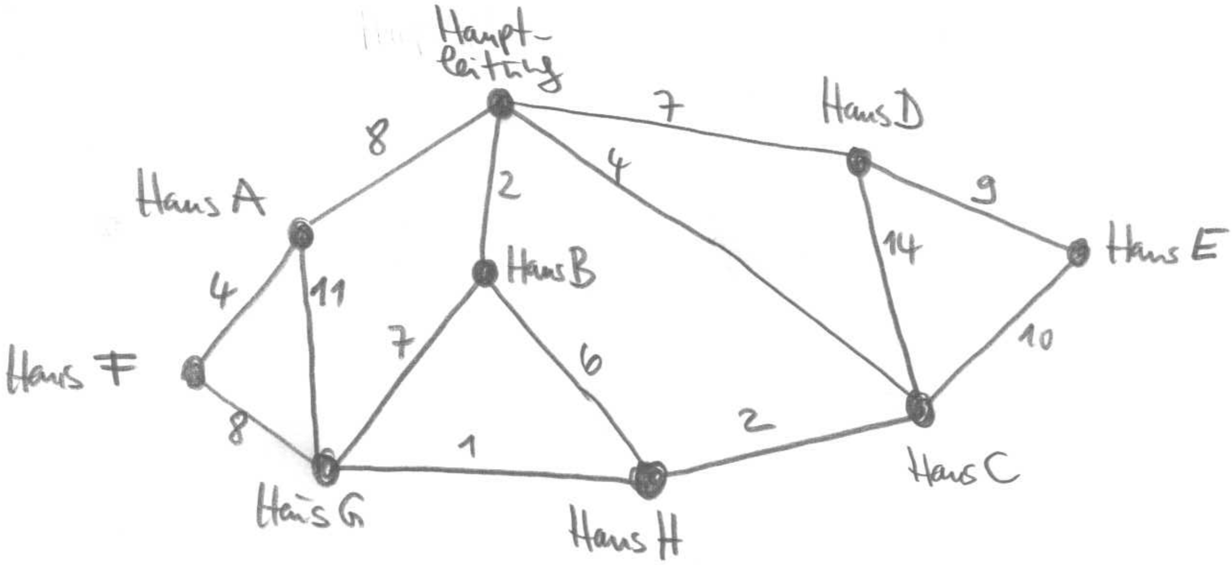
Geht man von einem zusammenhängenden Graphen zu einem seiner Spannbäume über, so verkleinert man die Kantenmenge von $|E|$ auf — gemäß dem folgenden Satz 450 — $|V|-1$ Kanten, ohne dabei den Zusammenhang des Graphen aufzugeben. Mit dem Begriff des Spannbaums wird also ein "bezüglich der Kantenanzahl kostengünstigerer Zusammenhang" modelliert.

Manche konkreten Probleme lassen sich durch Graphen modellieren, deren Kanten mit bestimmten Werten markiert sind, so dass zur Lösung des Problems ein Spannbaum gesucht wird, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist (engl.: "minimum spanning tree problem")

Beispiel 4.49 (Kabelfernsehen)

Eine Firma will Leitungen zum Empfang von Kabelfernsehen in einem neuen Wohngebiet verlegen. Der folgende Graph skizziert das Wohngebiet.

- Knoten entsprechen dabei einzelnen Häusern bzw der Hauptleitung die aus einem bereits verkabelten Gebiet heranführt,
- eine Kante zwischen zwei Knoten zeigt an, dass es prinzipiell möglich ist, eine direkte Leitung zwischen den beiden Häusern zu verlegen, und
- der Wert, mit dem die Kante markiert ist, beschreibt, wie teuer (in 1.000 €) es ist, diese Leitung unterirdisch zu verlegen.



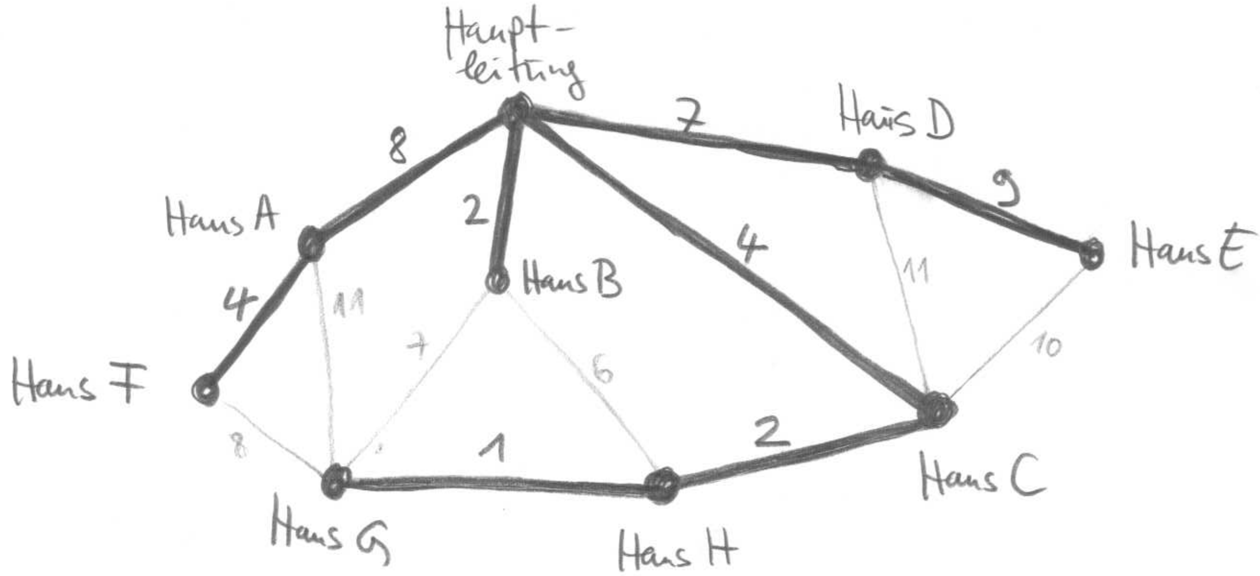
Ziel ist, Leitungen so zu verlegen, dass

1) jedes Haus ans Kabelfernsehen angeschlossen ist, und
2) die Kosten für das Verlegen der Leitungen so gering wie möglich sind.

Es wird also ein Spannbaum gesucht, bei dem die Summe seiner Kantenmarkierungen so klein wie möglich ist.

Ein solcher Spannbaum wird <u>minimaler Spannbaum</u> (engl.: minimum spanning tree) genannt.

Die im Folgenden **fett** gezeichneten Kanten geben die Kanten eines minimalen Spannbaums an



Verlegt die Firma genau diese Leitungen, so hat sie das neue Wohngebiet mit den geringstmöglichen Kosten ans Kabelfernsehen angeschlossen.

<u>Bemerkung:</u> Effiziente Verfahren zum Finden minimaler Spannbäume werden Sie in der Vorlesung "Algorithmentheorie" (GL-1) kennenlernen.

Satz 4.50 (Anzahl der Kanten eines Baums)

Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum, dessen Knotenmenge endlich und nicht-leer ist.

Dann gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Beweis: Per Induktion nach $n := |V|$.

Induktionsanfang: $n = 1$:

Der einzige ungerichtete Baum $B = (V, E)$ mit $|V| = 1$ ist der Graph $\bullet$ mit $E = \emptyset$.

Für diesen Graphen gilt:

$|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$ ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

Induktionsannahme:

Für jeden ungerichteten Baum $B' = (V', E')$ mit $|V'| \leq n$ gilt:

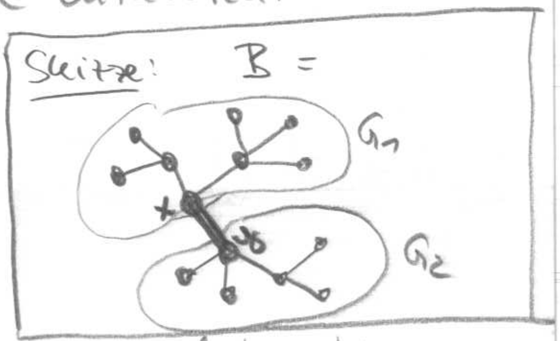
$$|E'| = |V'| - 1.$$

<u>Behauptung</u>: Für jeden ungerichteten Baum $B = (V, E)$ mit $|V| = n+1$ gilt: $|E| = |V| - 1$.

<u>Beweis</u>: Sei $B = (V, E)$ ein ungerichteter Baum mit $|V| = n+1$.

Da B zusammenhängend ist und $|V| \geq 1+1 = 2$ Knoten besitzt, muss E mindestens eine Kante enthalten.

Sei $\{x, y\}$ eine Kante in E.



Sei G der Graph, der aus B durch Löschen der Kante $\{x, y\}$ entsteht.

Da B zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis enthält, muss G aus genau 2 Zusammenhangskomponenten bestehen.

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ diese beiden Zusammenhangskomponenten von G.

Es gilt:
1) $V = V_1 \dot\cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$
2) $E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \{\{x, y\}\}$
3) G_1 ist ein ungerichteter Baum
4) G_2 ist ein ungerichteter Baum

Wegen 1) gilt insbesondere, dass $|V_1|, |V_2| \leq n$.

Wegen 3) und 4) gilt daher gemäß Induktionsannahme:

5) $|E_1| = |V_1| - 1$ und $|E_2| = |V_2| - 1$.

Aus 2) und 1) folgt daher:

$$|E| \underset{2)}{=} |E_1| + |E_2| + 1 \underset{5)}{=} |V_1| - 1 + |V_2| \cancel{-1} \cancel{+1} \underset{1)}{=} |V| - 1 .$$

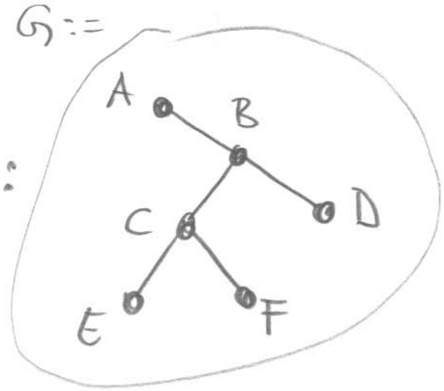
$\square$

Gerichtete Bäume

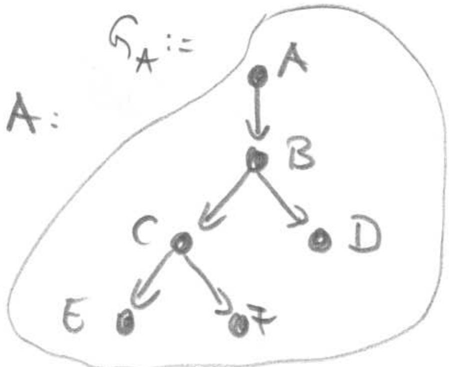
Einen <u>gerichteten Baum</u> erhält man, indem man in einem ungerichteten Baum einen Knoten als "Wurzel" auswählt und alle Kanten in die Richtung orientiert, die von der Wurzel weg führt.

<u>Beispiel 4.51:</u>

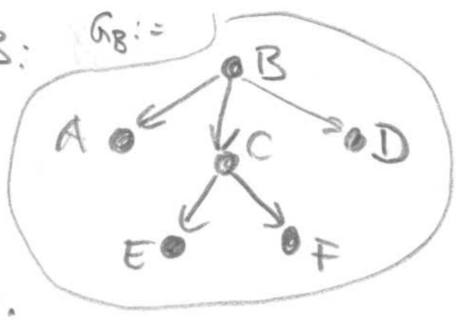
Ungerichteter Baum:



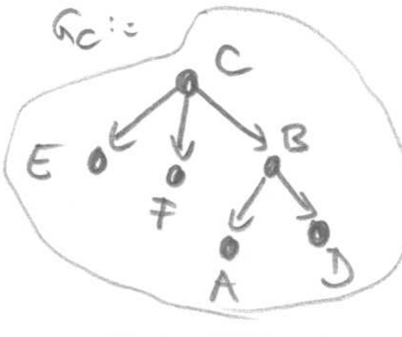
- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel A:



- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel B:



- Zugehöriger gerichteter Baum mit Wurzel C:



Definition 4.52

(a) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt gerichteter Baum, falls er folgende Eigenschaften hat:

1) G besitzt genau einen Knoten $w \in V$ mit $\text{Ein-Grad}_G(w) = 0$. Dieser Knoten wird Wurzel genannt.

2) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg von der Wurzel zum Knoten v.

3) Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Ein-Grad}_G(v) \leq 1$.

(b) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum.
Die Höhe (bzw. Tiefe, engl.: height, depth) von B ist die Länge eines längsten Weges in B.

Beispiel: In Beispiel 4.51 hat G_A die Höhe 3,
G_B die Höhe 2 und
G_C die Höhe 2.

(c) Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum.
Diejenigen Knoten, deren Aus-Grad 0 ist, heißen Blätter.

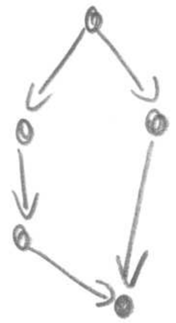
Beispiel: In Beispiel 4.51 hat G_A die Blätter D, E, F, G_B die Blätter A, D, E, F und G_C die Blätter A, D, E, F.

(d) Diejenigen Knoten eines gerichteten Baums, die weder Wurzel noch Blätter sind, heißen innere Knoten.

Beobachtung 4.53

(a) Jeder gerichtete Baum ist ein gerichteter azyklischer Graph (kurz: DAG, vgl. Definition 4.14).
Aber es gibt gerichtete azyklische Graphen, die keine gerichteten Bäume sind.

Beispiel:



ist ein DAG, aber kein gerichteter Baum.

(b) Für jeden gerichteten Baum $B = (V, E)$, dessen Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, gilt:

$$|E| = |V| - 1.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.50, da der ungerichtete Graph, der entsteht, indem man in B die Kantenorientierung "vergisst" (d.h. jede gerichtete Kante (i,j) durch die ungerichtete Kante $\{i,j\}$ ersetzt), ein ungerichteter Baum ist.

Alternativ zu Definition 4.52 kann man die gerichteten Bäume, deren Knotenmenge endlich und nicht-leer ist, auch folgendermaßen definieren:

Definition 4.54:

Die Klasse der gerichteten Bäume mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge ist rekursiv wie folgt definiert:

Basisregel: Ist V eine Menge mit $|V| = 1$, so ist $B := (V, \emptyset)$ ein gerichteter Baum.

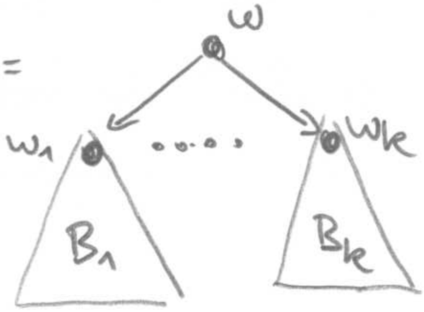
Skizze: $B :=$ •

Der (eindeutig bestimmte) Knoten in V heißt Wurzel von B.

Die Höhe von B ist 0.

Rekursive Regel: Ist $k \in \mathbb{N}_{>0}$, sind $B_1 = (V_1, E_1), \ldots, B_k = (V_k, E_k)$ gerichtete Bäume mit paarweise disjunkten Knotenmengen (d.h. $V_i \cap V_j = \emptyset$ f.a. $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ mit $i \neq j$), sind $w_1 \in V_1, \ldots, w_k \in V_k$ die Wurzeln von $B_1, \ldots, B_k$, und ist w ein Element, das nicht in $V_1 \cup \cdots \cup V_k$ liegt, dann ist der Graph $B = (V, E)$ mit $V := \{w\} \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ und $E := E_1 \cup \cdots \cup E_k \cup \{(w, w_i) : i \in \{1,\ldots,k\}\}$ ein gerichteter Baum.

Skizze: $B :=$



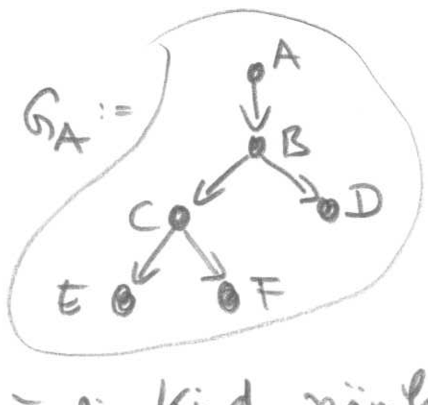
Der Knoten w heißt Wurzel von B.

Die Höhe von B ist $1 + \max\{h_1, \dots, h_k\}$, wobei $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{N}$ die Höhen der gerichteten Bäume $B_1, \dots, B_k$ sind.

Notation 4.55:

Sei $B = (V, E)$ ein gerichteter Baum und sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten in B.
Die Knoten $v' \in V$, zu denen von v aus eine Kante führt (dh $(v, v') \in E$), heißen Kinder von v.

Beispiel: Im Graphen $G_A :=$



aus Beispiel 4.51

gilt: Knoten A hat genau ein Kind, nämlich B,
Knoten B ········ zwei Kinder, ········ C und D,
········ C ········ ········ E und F, und
die Knoten D, E, F haben keine Kinder.

Eine besondere Rolle bei der Modellierung spielen Bäume, bei denen jeder Knoten höchstens 2 Kinder hat. Mit solchen Bäumen kann man z.B. Kaskaden von JA-NEIN-Entscheidungen oder Binär-Codierungen beschreiben.

Definition 4.56 (Binärbaum, vollständiger Binärbaum)

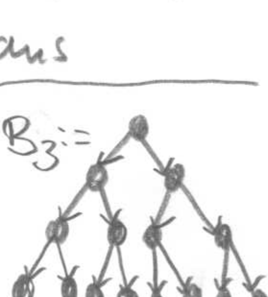
(a) Ein gerichteter Baum $B=(V,E)$ heißt Binärbaum, falls für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Aus-Grad}_B(v) \leq 2$.

(b) Ein Binärbaum $B=(V,E)$ heißt vollständiger Binärbaum, falls gilt:
1) Jeder Knoten, der kein Blatt ist, hat Aus-Grad 2, und
2) Es gibt eine Zahl $h \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Blatt $v \in V$ gilt: Der Weg von der Wurzel zum Blatt v hat die Länge h.

Beispiel 4.57

Der Graph G_A aus Beispiel 4.51 ist ein Binärbaum, aber kein vollständiger Binärbaum. Der Graph G_B aus Beispiel 4.51 ist kein Binärbaum.
Der folgende Graph B_3 ist ein vollständiger Binärbaum der Höhe 3.

$B_3 :=$



Zwischen der Höhe, der Anzahl der Blätter und der Anzahl der Knoten eines Binärbaums besteht der folgende wichtige Zusammenhang:

Satz 4.57

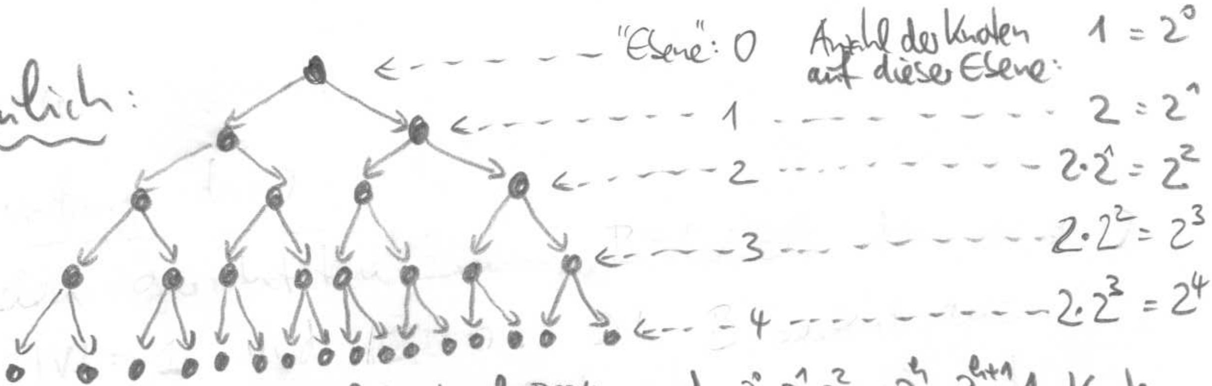
Sei $h \in \mathbb{N}$.

(a) Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten

(b) Jeder Binärbaum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter und höchstens $2^{h+1}-1$ Knoten.

Beweis:

(a) Anschaulich:



⇝ vollst. Bin.baum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^0+2^1+2^2+\dots+2^h \underset{\text{Satz 2.41}}{=} 2^{h+1}-1$ Knoten.

Formaler Beweis: Per Induktion nach h:

Induktionsanfang: $h=0$:

Für jeden gerichteten Baum $B=(V,E)$ der Höhe 0 gilt: $|V|=1$ und $|E|=0$. D.h. B besteht aus genau einen Knoten, der gleichzeitig Wurzel und (einziges) Blatt des Baums ist.

D.h: B hat genau $1=2^0=2^h$ Blätter und genau $1=2-1=2^1-1=2^{h+1}-1$ Knoten.

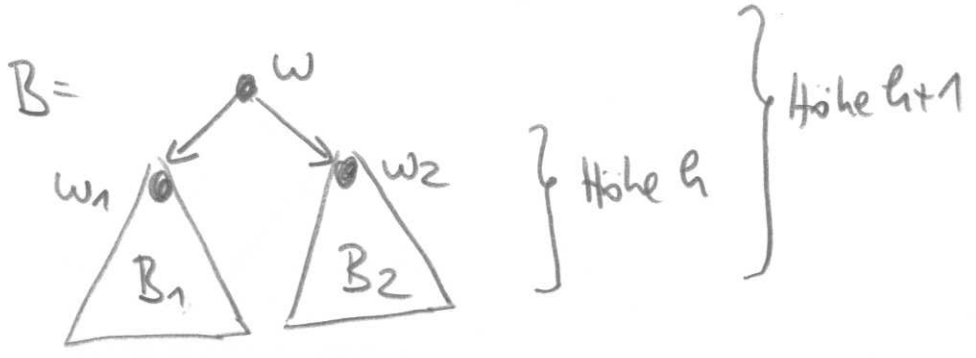
Induktionsschritt: $h \to h+1$: Sei $h \in \mathbb{N}$ beliebig.

Induktionsannahme: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe h hat genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten.

Behauptung: Jeder vollständige Binärbaum der Höhe $h+1$ hat genau 2^{h+1} Blätter und genau $2^{h+2}-1$ Knoten.

Beweis: Sei $B = (V, E)$ ein vollständiger Binärbaum der Höhe $h+1$, und sei $w \in V$ die Wurzel von B. Wegen $h+1 \geq 1$ hat w genau 2 Kinder; seien $w_1 \in V$ und $w_2 \in V$ diese beiden Kinder von w. Für $i \in \{1,2\}$ sei V_i die Menge aller Knoten aus V, zu denen von w_i aus ein Weg führt; und sei $B_i := (V_i, E_i)$ der induzierte Teilgraph von B mit Knotenmenge V_i.

Skizze:



Offensichtlich ist sowohl B_1 als auch B_2 ein vollständiger Binärbaum der Höhe h.
Gemäß Induktionsannahme hat jeder der beiden Bäume B_1 und B_2 genau 2^h Blätter und genau $2^{h+1}-1$ Knoten.

Der Baum B hat daher genau $2^h + 2^h = 2^{h+1}$ Blätter und genau $1 + (2^{h+1}-1) + (2^{h+1}-1) = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$ Knoten.

$\square$

(b): Analog.
Details: Übung. $\square$

Modellierungsbeispiele

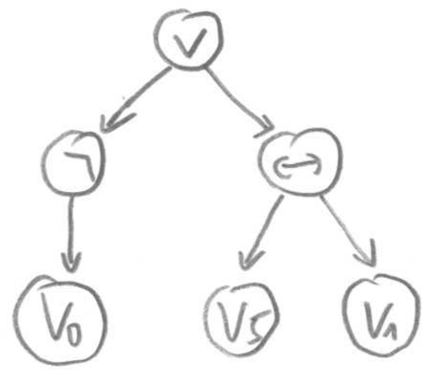
Gerichtete Bäume mit zusätzlichen Knoten- und/oder Kantenmarkierungen können auf vielfältige Arten zur Modellierung genutzt werden:

Beispiel 4.58

In Kapitel 3 (Seite 97) haben wir Bäume bereits genutzt, um die Struktur einer aussagenlogischen Formel übersichtlich darzustellen (der entsprechende Baum heißt Syntaxbaum der Formel).

Beispiel: Syntaxbaum der Formel

$(\neg V_0 \vee (V_5 \leftrightarrow V_1))$



Auf ähnliche Art werden markierte Bäume genutzt, um die Struktur vieler anderer Objekte (an Stelle von aussagenlogischen Formeln) zu beschreiben — z.B. für arithmetische Terme,

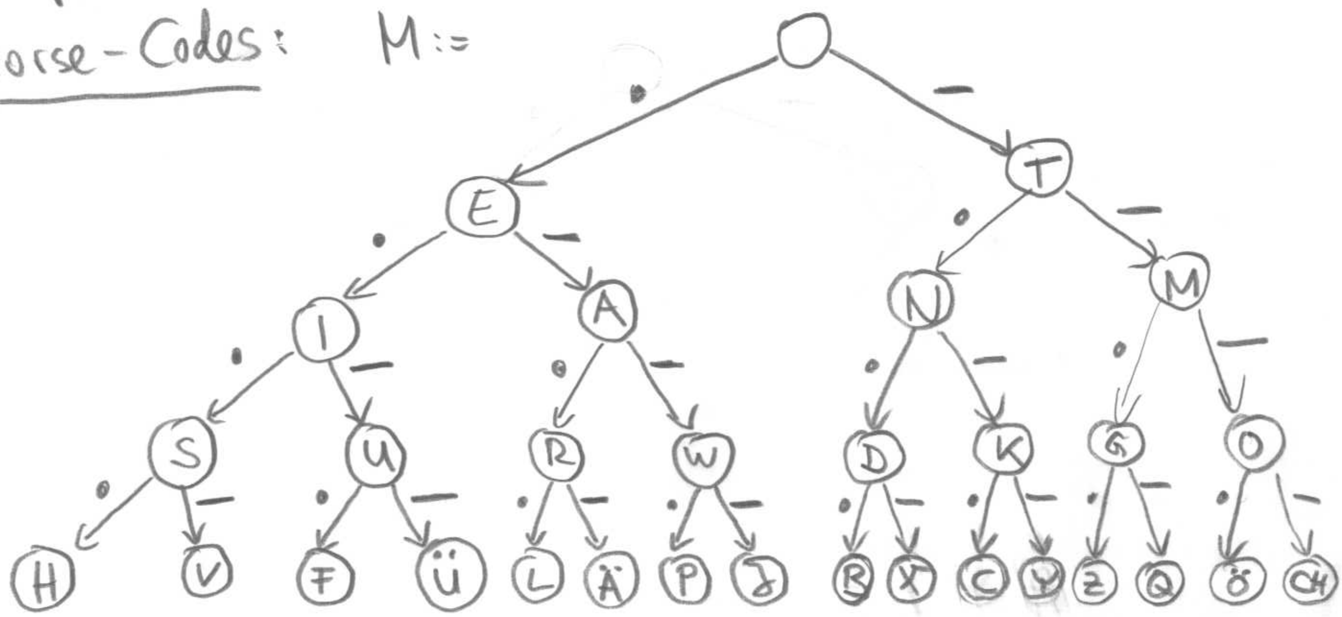
für Darstellung von Klassen- und Objekthierarchien, oder

für Beschreibung der Struktur von Computerprogrammen oder umgangssprachlichen Texten (↗Linguistik).

Beispiel 4.59

Folgen von Entscheidungen können in vielen Zusammenhängen durch gerichtete markierte Bäume modelliert werden — so genannte Entscheidungsbäume.

Durch einen solchen Entscheidungsbaum erhält man beispielsweise eine kompakte Darstellung des Morse-Codes: $M :=$



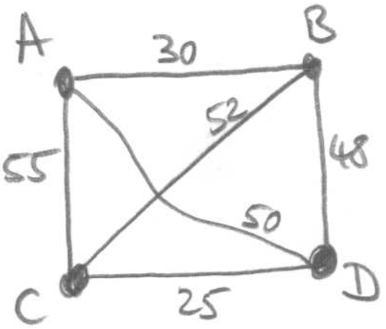
Im Morse-Code wird jeder Buchstabe durch eine Folge von kurzen und langen Signalen (• ≙ kurz, — ≙ lang) repräsentiert.
Eine eingehende Meldung aus kurzen und langen Signalen wird entschlüsselt, indem man an der Wurzel des Baums M beginnt und bei einem kurzen Signal nach links, bei einem langen nach rechts weitergeht. Eine längere Pause zeigt an, dass ein Buchstabe vollständig übermittelt ist.

In jedem Entscheidungsbaum modellieren die Knoten einen Zwischenstand bei der Entscheidungsfindung. Sie können entsprechend markiert sein, z.B. mit dem codierten Buchstaben des Morse-Codes. Die Kanten, die von einem Knoten ausgehen, modellieren die Alternativen, aus denen in dem durch den Knoten repräsentierten "Zustand" eine ausgewählt werden kann — im Morse-Code ist das jeweils ein kurzes oder ein langes Signal, das als Kantenmarkierung angegeben wird.

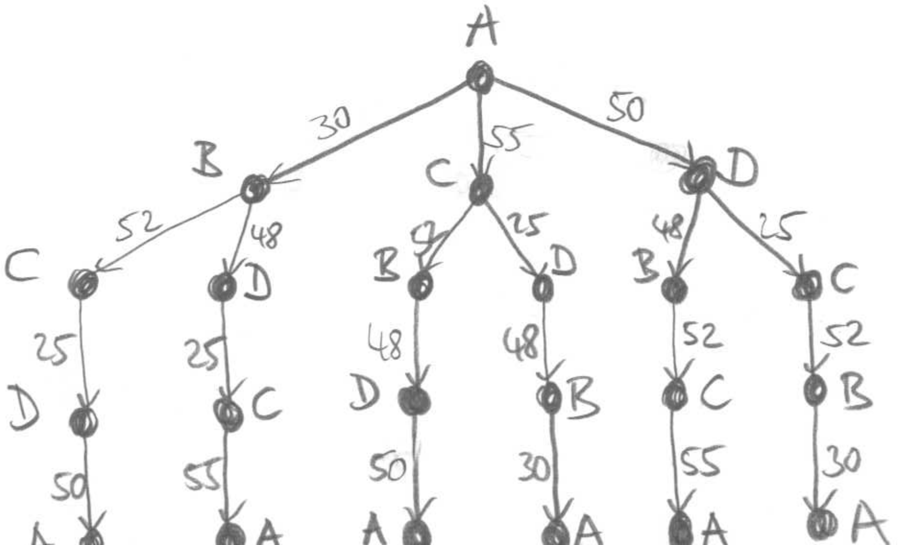
Beispiel 4.60:

Markierte Bäume können auch genutzt werden, um den Lösungsraum kombinatorischer Probleme darzustellen.

<u>Beispiel:</u> Ein Handlungsreisender soll einen möglichst kurzen Rundweg finden, auf dem er jede der Städte A, B, C, D besucht. Die Entfernungen (in km) zwischen den Städten sind als Kantenmarkierungen des folgenden Graphen gegeben:



Alle möglichen in Stadt A startenden Rundwege werden durch den folgenden Baum dargestellt:



Gesamtentfernung: 157 158 205 158 205 157

Jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt repräsentiert dabei einen Rundweg, auf dem jede der Städte genau einmal besucht wird.
Die Kantenmarkierungen geben die Entfernungen zwischen einzelnen Städten wieder. Eine zusätzliche Knotenmarkierung an jedem Blatt gibt die Gesamtlänge des entsprechenden Rundwegs an.
Die beiden kürzesten Rundwege für unseren Handlungsreisenden sind also

$$(A, B, C, D, A) \quad \text{und} \quad (A, D, C, B, A).$$

<u>Bemerkung 4.61</u>:
Nach dem gleichen Schema kann man auch Zugfolgen in Spielen modellieren: Jeder Knoten des Entscheidungsbaums modelliert einen Spielzustand. Die von dort ausgehenden Kanten geben an, welche Möglichkeiten für den nächsten Zug bestehen.
Solche Darstellungen werden z.B. in Schachprogrammen verwendet, um die Folgen der anstehenden Entscheidung zu analysieren und zu bewerten.

<u>Beachte</u>: Bei der Modellierung von Spielabläufen können manche "Spielzustände" (z.B. Konfigurationen eines Schachbretts) auf unterschiedlichen Wegen (d.h.

Spielverläufen) erreicht werden, und trotzdem "im Sinne des Spiels" denselben Zustand beschreiben. In solchen Fällen könnte man im Entscheidungsbaum die zugehörigen Knoten zu einem einzigen Knoten zusammenfassen. Damit geht dann allerdings die Baum-Eigenschaft verloren, und es entsteht ein allgemeiner gerichteter Graph, der auch Kreise enthalten kann. Ein Kreis entspricht dann der Situation, dass eine Folge von Spielzügen in einen Zustand des Spiels zurückführt, der früher schon einmal durchlaufen wurde.

4.3 Einige spezielle Arten von Graphen

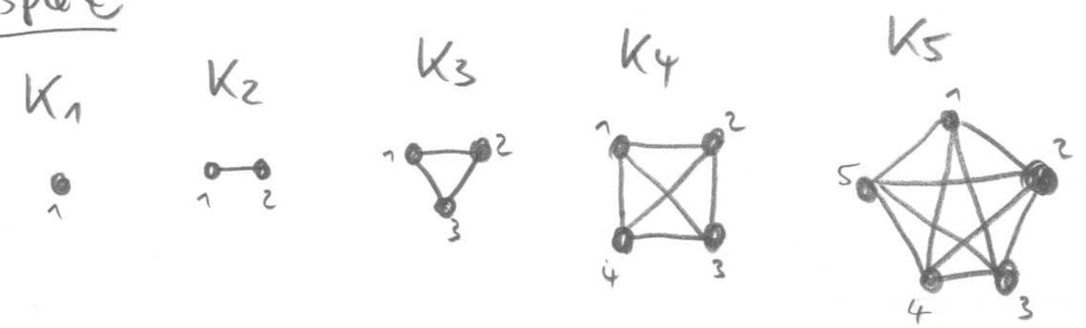
In diesem Abschnitt werden einige spezielle Arten von Graphen vorgestellt, die Ihnen im Laufe der nächsten Semester immer wieder begegnen werden.

Spezielle ungerichtete Graphen

Definition 4.62 (Der vollständige Graph K_n)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Der vollständige ungerichtete Graph K_n hat Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge $\{\{i,j\} : i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$

Beispiele:



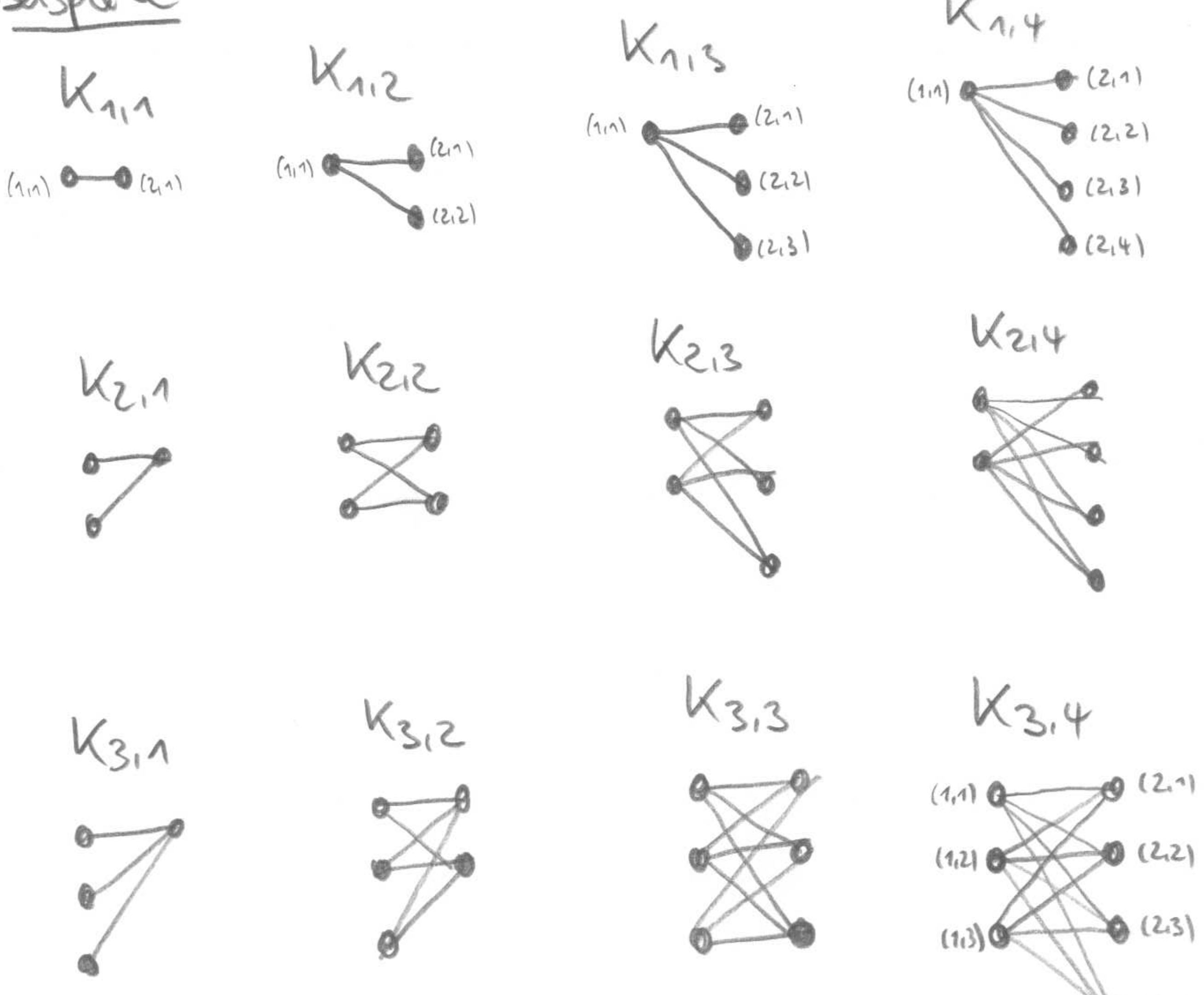
Beobachtung: Der vollständige Graph K_n hat n Knoten und $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

Definition 4.63 (Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$)

Seien $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Der vollständige ungerichtete bipartite Graph $K_{m,n}$ hat Knotenmenge $\{(1,i) : i \in \{1,\dots,n\}\} \,\dot\cup\, \{(2,j) : j \in \{1,\dots,m\}\}$ und Kantenmenge $\{\{(1,i),(2,j)\} : i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}\}$.

Beispiele:



Beobachtung: Der Graph $K_{m,n}$ hat $m+n$ Knoten und $m \cdot n$ Kanten.

Notation 4.64

Ein ungerichteter Graph G mit endlicher, nicht-leerer Knotenmenge heißt

(a) <u>vollständig</u>, falls es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $G \cong K_n$ (d.h. G ist isomorph zu K_n)

(b) <u>vollständig bipartit</u>, falls es Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, so dass $G \cong K_{m,n}$.

Spezielle gerichtete Graphen

Gemäß Definition 4.6 ("gerichteter Graph") und Definition 2.20 (c) ("k-stellige Relation") kann jeder gerichtete Graph $G = (V, E)$ als eine 2-stellige Relation über V aufgefasst werden, da die Kantenmenge E von G ja gerade eine Teilmenge von $V^2 = V \times V$ ist.

Umgekehrt können wir natürlich auch jede 2-stellige Relation R über einer Menge M als gerichteten Graph auffassen, dessen Knotenmenge M und dessen Kantenmenge R ist.

Gerichtete Graphen sind also dasselbe wie 2-stellige Relationen über einer Menge V.

Von besonderem Interesse sind 2-stellige Relationen, die eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften besitzen:

__Definition 4.65:__

Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V (d.h. $E \subseteq V \times V$, d.h. $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph)

__(a)__ E heißt __reflexiv__, falls für alle $v \in V$ gilt:

$$(v, v) \in E$$

(Skizze: )

__(b)__ E heißt __symmetrisch__, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

Wenn $(v, w) \in E$, dann auch $(w, v) \in E$

(d.h. zu jeder Kante $v \rightarrow w$ gibt es auch eine "Rückwärtskante $v \leftarrow w$)

__(c)__ E heißt __antisymmetrisch__, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

Wenn $(v, w) \in E$ und $(w, v) \in E$, dann $v = w$.

(d.h.: Ist $v \neq w$, so gibt es in E allenfalls eine der beiden Kanten $v \rightarrow w$ und $v \leftarrow w$)

(d) E heißt <u>konnex</u>, falls f.a. $v, w \in V$ gilt:

$$(v,w) \in E \quad \text{oder} \quad (w,v) \in E$$

(dh mindestens eine der beiden Kanten $\underset{v}{\bullet} \longrightarrow \underset{w}{\bullet}$ und $\underset{v}{\bullet} \longleftarrow \underset{w}{\bullet}$ liegt in E)

(e) E heißt <u>transitiv</u>, falls f.a. $v, w, u \in V$ gilt:

Ist $(v,w) \in E$ und $(w,u) \in E$, so auch $(v,u) \in E$

(<u>Skizze</u>:
$$\begin{tikzcd} \underset{v}{\bullet} \arrow[r, "\underset{E}{\cap}"'] & \underset{w}{\bullet} \arrow[r, "\underset{E}{\cap}"'] & \underset{u}{\bullet} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \underset{v}{\bullet} \arrow[r, "\underset{E}{\cap}"'] \arrow[rr, bend left, "\in E"] & \underset{w}{\bullet} \arrow[r, "\underset{E}{\cap}"'] & \underset{u}{\bullet} \end{tikzcd}$$
)

<u>Äquivalenzrelationen</u>:

<u>Definition 4.66</u>:

Eine <u>Äquivalenzrelation</u> ist eine 2-stellige Relation, die <u>reflexiv</u>, <u>symmetrisch</u> und <u>transitiv</u> ist.

<u>Beispiel 4.67</u>:

Beispiele für Äquivalenzrelationen:

(a) <u>Gleichheit</u>: Für jede Menge M ist

$E := \{ (m,m) : m \in M \}$ eine Äquivalenzrelation.

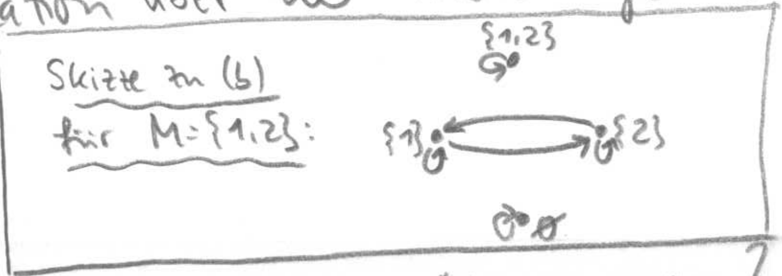
Die Aussage "$(x,y) \in E$" entspricht gerade der Aussage "$x = y$".

(b) Gleichmächtigkeit:

Für jede endliche Menge M ist

$$E := \{ (A,B) : A \subseteq M,\ B \subseteq M,\ |A| = |B| \}$$

eine Äquivalenzrelation über der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.



(c) Logische Äquivalenz:

$$E := \{ (\varphi,\psi) : \varphi \in AL,\ \psi \in AL,\ \varphi \equiv \psi \}$$

ist eine Äquivalenzrelation über der Menge AL aller aussagenlogischen Formeln.

Ordnungsrelationen

Definition 4.68 (Ordnungen)

Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V.

(a) E heißt Präordnung, falls E reflexiv und transitiv ist

(b) E heißt partielle Ordnung, falls E reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

(c) E heißt lineare Ordnung (oder totale Ordnung), falls E reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und konnex ist.

Beispiel 4.69

(a) $\leq$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Ebenso ist $\geq$ eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

(b) Für jede Menge M sind $\subseteq$ und $\supseteq$ partielle Ordnungen auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(c) Die "Folgerungsrelation"

$$E := \{ (\varphi, \psi) : \varphi \in AL, \psi \in AL, \varphi \models \psi \}$$

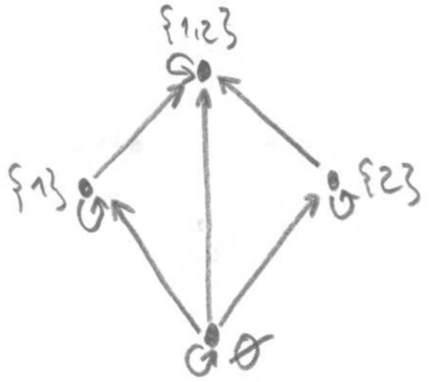
ist eine Präordnung auf AL.

(d) Für jede endliche Menge M ist

$$E := \{ (A, B) : A \subseteq M, B \subseteq M, |A| \leq |B| \}$$

eine Präordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

Skizze zu (b) für $M = \{1,2\}$:



Skizze zu (d) für $M = \{1,2\}$:

Die reflexive transitive Hülle einer Relation

Definition 4.70

Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph.
Die reflexive transitive Hülle (bzw. der reflexive transitive Abschluss) von E auf V ist die rekursiv wie folgt definierte Relation $E^* \subseteq V \times V$:

Basisregeln:

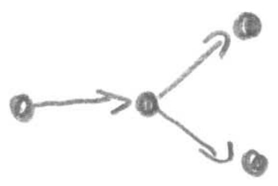
- F.a. $v \in V$ ist $(v,v) \in E^*$.
- F.a. $(v,w) \in E$ ist $(v,w) \in E^*$.

Rekursive Regel:

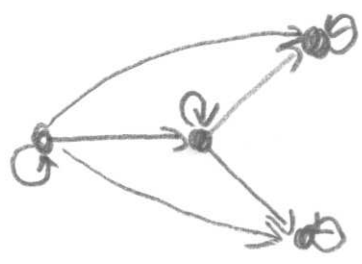
- Sind $(v,w) \in E^*$ und $(w,u) \in E^*$, so ist auch $(v,u) \in E^*$.

Beispiel

$G=(V,E) :=$



$G^* = (V, E^*)$:



Beobachtung 4.71:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $v, w \in V$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Es gibt in G einen Weg von v nach w

(b) $(v, w) \in E^*$, wobei E^* die reflexive transitive Hülle von E auf V ist.

Beweis: Übung.