Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

15. Dezember 2009

Logik in der Informatik

Wintersemester 2009 / 2010

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis Dienstag, 12. Januar 2010

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi \quad := \quad & \{\, v_i = v_{i+2} \;:\; i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \,\} \\ & \cup \{\, E(v_0, v_7),\ E(v_1, v_4),\ E(v_6, v_0),\ \forall v_1 \forall v_3 \big(E(v_1, v_3) \to E(v_3, v_1)\big) \,\}.\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie Lemma 7.37, d.h. zeigen Sie Folgendes:

(i) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $\llbracket t \rrbracket^{[\mathcal{I}_\Phi]} = [t]$.

(ii) Für alle *atomaren* FO$[\sigma]$-Formeln φ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$.

(c) Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin aus.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq$ FO$[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq$ FO$[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Hinweis zu (a): Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \,:\, t \in T_\sigma \,\}$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Behauptung 2 aus dem Beweis von Lemma 7.42, d.h. zeigen Sie, dass die im Beweis von Lemma 7.42 definierte Formelmenge Θ widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

(a) Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \;:=\; \{\, v_0 = t \;:\; t \in T_\sigma \,\} \;\cup\; \{\, \exists v_0 \exists v_1\, \neg v_0 = v_1 \,\}.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(i) Φ ist widerspruchsfrei.

(ii) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq$ FO$[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

(b) Beweisen Sie, dass Folgendes gilt: Ist σ eine abzählbare Signatur, so ist die Menge aller FO$[\sigma]$-Formeln abzählbar.

(c) Arbeiten Sie die Details am Ende des Beweises von Lemma 7.41 aus, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die im Beweis von Lemma 7.41 definierte Menge Ψ_n widerspruchsfrei, so ist auch die Menge $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ widerspruchsfrei.