Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Dezember 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 16. Januar 2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned} \Phi \quad := \quad & \{\, v_i = v_{i+2} \,:\, i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \,\} \\ & \cup \ \{\ E(v_0, v_7),\ E(v_1, v_4),\ E(v_6, v_0),\ \forall v_1 \forall v_3 \big(E(v_1, v_3) \to E(v_3, v_1)\big)\ \}\,. \end{aligned}$$

(b) Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin aus.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Hinweis zu (a): Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \,:\, t \in T_\sigma \,\}$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \,:\, t \in T_\sigma \,\} \ \cup \ \{\ \exists v_0 \exists v_1\, \neg v_0 = v_1 \ \}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.