Serie 10

10.1 Extrapolation summierter Quadraturformeln

Es sei $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty$ ein festes äquidistantes Gitter und f eine glatte Funktion auf dem Intervall $[x_0, x_n]$.

a) Überprüfen Sie, dass $T_{h/2} = \frac{1}{2}(T_h + M_h)$, wobei

$$T_h[f] = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right), \quad M_h[f] = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2)$$

die summierte Trapezregel T_h und M_h die summierte Mittelpunktsregel sind.

b) Berechnen Sie einen Schritt des Romberg-Schemas mit den Werten $T_h[f]$ und $T_{h/2}[f]$. Formen Sie das Ergebnis zu einer summierten Quadraturformel mit Schrittweite h um.

c) Welche Fehlerentwicklung hat das neue Verfahren?

10.2 Quadraturfehler Simpsonregel und Gaussquadratur

a) Beweisen Sie die Fehlerdarstellung der Simpsonregel für $C^4([a, b])$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + f(b)\right] = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$. Folgen Sie dazu der Beweisidee von Satz 4.2 ii) des Skripts und begründen Sie jeden Schritt detailliert.

b) Zeigen Sie Satz 4.17 des Skripts: Für $f \in C^{2n+2}([-1, 1])$ existiert ein $\xi \in (-1, 1)$, so dass

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x - Q^{(n)}[f] = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2 \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Fügen Sie auf der linken Seite ein geeignetes Polynom p ein, so dass $Q^{(n)}[f - p] = 0$. Wenden Sie Satz 3.6 über den Interpolationsfehler für Hermiteinterpolation an.

10.3 Uneigentliches Integral

Wir betrachten die Aufgabe, das Integral I numerisch bis auf einen absoluten Fehler kleiner als $\epsilon = 10^{-2}$ zu berechnen, wobei

$$I = \int_0^\infty \sin(x)e^{-x}dx = \frac{1}{2}.$$

a) Bestimmen Sie ein $c > 0$ so, dass der Beitrag von I_2 zu I in der Aufteilung

$$I = I_1(c) + I_2(c) := \int_0^c \sin(x)e^{-x}dx + \int_c^\infty \sin(x)e^{-x}dx$$

unterhalb der halben Fehlertoleranz ϵ liegt, also $I_2(c) < \epsilon/2$.

b) Wie viele Funktionsauswertungen benötigen Sie, um I_1 mit der summierten Trapezregel auf einen Fehler kleiner $\epsilon/2$ auszuwerten, mit c wie in **a)**? *Hinweis:* Benutzen Sie die Fehlerabschätzung in Satz 4.4 im Skript, und gehen Sie davon aus, dass jede eindeutige Stützstelle eine Funktionsauswertung mit sich bringt.

c) Ein alternativer Ansatz geht über die Gauss-Laguerre Quadratur: Für eine Funktion $f \in C^{2n}([0,\infty))$ setze man $\phi(x) = f(x)e^x$, $x \in [0,\infty)$. Dann gilt

$$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \phi(x)e^{-x}dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi(x_i) + R_n, \tag{1}$$

wobei der Restterm R_n sich abschätzen lässt durch

$$|R_n| \le \frac{(n!)^2}{(2n)!} \max_{x\in[0,\infty)} |\phi^{(2n)}(x)|.$$

Wie viele Funktionsauswertungen sind nötig, um die obige Aufgabe zu lösen?

d) Die Stützstellen x_i, $i = 1, \dots, n$, in (1) sind gerade die Nullstellen des Laguerre-Polynoms $\mathcal{L}_n$, welches definiert ist durch

$$\mathcal{L}_n(x) := e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), \quad x \in [0,\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Gewichte α_i, $i = 1, \dots, n$ ergeben sich aus der Formel

$$\alpha_i = \frac{(n!)^2 x_i}{(\mathcal{L}_{n+1}(x_i))^2}.$$

Berechnen Sie I mittels Gauss-Laguerre Quadratur mit dem n, das Sie in c) gefunden haben, und überprüfen Sie, dass die Fehlertoleranz eingehalten wird. Die Nullstellen von $\mathcal{L}_n$ sind für einige n auf der Vorlesungshomepage verlinkt.

10.4 MATLAB: Adaptive Quadratur

a) Implementieren Sie die MATLAB-Funktion `Qn = simpson(a,b,n,g)`, die das Integral $\int_a^b g(x)dx$ mit der summierten Simpsonregel $Q_{1/n}[f]$ mit n gleich grossen Teilintervallen berechnet. Das Argument `g` soll ein Funktionenhandle zu einer Funktion sein, die wiederum ein Argument erwartet.

b) Implementieren Sie eine nicht-äquidistante Simpsonquadratur in der MATLAB-Funktion `[Qfein,nInt] = adaptiveQuad(a,b,f,tol,Qgrob,nInt)` nach folgendem Algorithmus, der adaptiv das Gitter verfeinert, falls der Fehlerschätzer auf einem Intervall grösser als `tol` ist. `Qgrob` kann zu Beginn durch einen groben Schätzwert für das Integral gegeben sein. Gegeben sei auch das Intervall $[a, b]$ mit Länge $h = b-a$, die Toleranz `tol`, und die Funktion f als Funktionenhandle. `nInt` kennzeichnet die Anzahl verwendeter Teilintervalle.

1. (Fehlerschätzung) Schätzen Sie den Integrationsfehler durch $err = |Q_h[f] - E_{h/2}[f]|$, wobei $Q_h[f]$ der Wert der Simpsonregel ist und

$$E_{h/2}[f] = Q_h[f] + \frac{Q_{h/2}[f] - Q_h[f]}{15}$$

   die extrapolierte Simpsonregel ist.
2. Abbruch, falls $err \leq tol$ (die Approximation $E_{h/2}[f]$ ist gut genug und wird als `Qfein` zurückgegeben).
3. Sonst unterteilen Sie $[a, b]$ in zwei gleich grosse Teilintervalle und rufen auf beiden die Funktion `adaptiveQuad` rekursiv auf.

c) Vergleichen Sie die Konvergenz der summierten Simpsonregel mit derjenigen der adaptiven Quadratur, indem Sie für die Funktion $g(x) = 1/(10^{-4} + x^2)$ auf dem Intervall [0, 1] die Anzahl der Teilintervalle gegen den Quadraturfehler

$$R_n \approx |Q_n[g] - Q_{\text{prec}}|$$

doppeltlogarithmisch plotten. Dabei ist $Q_n[g]$ der Fehler Ihrer jeweiligen Quadraturformel und Q_{prec} eine genaue Approximation des Integrals mit MATLAB (z. B. mit `Qprec = quad(g,a,b,1e-12)`). Um die Anzahl der Intervalle bei der adaptiven Quadratur zu erhöhen, verringern Sie die Toleranz tol.

Generelle Hinweise für MATLAB-Aufgaben:
Alle Programme müssen im Kommentar mit **Namen** und **Datum** versehen werden, und werden nur so akzeptiert. Funktionen/Skripte benötigen eine kurze Beschreibung ihres Zwecks, der Eingabe- und Ausgabewerte. Plots müssen klar lesbar mit Titel, Achsenbeschriftungen, bei mehreren Kurven auch mit Legenden versehen werden. Alle MATLAB-relevanten Dateien geben Sie bitte **zusätzlich online** ab, über die Vorlesungshomepage
Upload der MATLAB-Lösungen über
`https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/math/nm/`
Präsenzstunde für Fragen zu den Aufgaben: Mo. 12:15-12:45h, vor HG G53.2.
Abgabe: 14./15. Mai, in den Übungen oder ins Fach vor HG G53.2.