ETH Zürich FS 2013
D-MATH
Hans Rudolf Künsch

Koordinator
Blanka Horvath

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Musterlösung Serie 5

1. a) Allgemein definiert jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $\mathbb{P}(N) := \sum_{n\in N} f(n)$ $(N \subseteq \mathbb{N})$. [1]

Offensichtlich ist $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Für eine Folge N_i $(i \in \mathbb{N})$ von disjunkten Teilmengen von $\mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \underbrace{\sum_{n\in\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i} f(n)}_{=:a} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n\in N_i} f(n)}_{=:b} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_i),$$

wobei $a = b$ aus der Tatsache folgt, dass die Mengen N_i disjunkt sind und $f(n) \geq 0$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, aus der Analysis folgt dann (siehe auch Umordnungsatz), dass es auf die Nummerierung der Elemente nicht ankommt ($\sum_{n\in N} f(n)$ ist ja eigentlich definiert durch $\sup_{A\subseteq N \text{ endlich}} \sum_{n\in A} f(n)$).

Nun setzen wir $f(n) := \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Sei p ein Primzahl, dann ist $N_p = \{np \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ und somit

$$\mathbb{P}(N_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{(np)^s} = \frac{1}{p^s}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{p^s}.$$

c) Zu zeigen ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(N_{p_i}) \qquad (m \in \mathbb{N}; p_1 \neq \cdots \neq p_m \text{ prim}).$$

Seien also $m \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_m$ unterschiedliche Primzahlen, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{ n\prod_{i=1}^{m} p_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{(n\prod_{i=1}^{m} p_i)^s}$$
$$= \frac{1}{(\prod_{i=1}^{m} p_i)^s}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} p_i^s} = \prod_{i=1}^{m}\mathbb{P}(N_{p_i}).$$

[1] Für $G := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) < \infty$ setze man einfach $\tilde{f}(n) := \frac{f(n)}{G}$.

d) Mit der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(N_{p_i})) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right)$$

Die Folge $B_n := \bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine monoton fallende Folge von Ereignissen die gegen $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_{p_i}^c = \{1\}$ konvergiert, die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass 1 die einzige Zahl ist, die durch keine Primzahl teilbar ist. Aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt nun

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right) = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

und somit

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)}.$$

2. Aus der Stirling-Formel

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

folgt

$$\begin{aligned} p_\lambda(k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} &\sim \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp(-\lambda + k)\left(\frac{\lambda}{k}\right)^k \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left(\lambda \cdot\ g_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei die Funktion g_λ folgendermassen definiert ist

$$g_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right) := \frac{k}{\lambda} - 1 + \frac{k}{\lambda}\log\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

Wir entwickeln als nächstes $g_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right)$ in eine Taylorreihe an der Stelle $\frac{k}{\lambda} = 1$. Man erhält $g_\lambda(1) = 0$, $g_\lambda'(1) = 0$, und $g_\lambda''(1) = -1$. Daraus folgt, dass für $\lambda \to \infty$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left(\lambda \cdot\ g_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right) \\ =&\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left(\lambda \cdot\ \left(\frac{1}{2}g''(1)\left(\tfrac{k}{\lambda} - 1\right)^2 + R_2\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right)\ \right), \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei $R_2\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{6}\left(\frac{k}{\lambda}-1\right)^3$ für ein[2] $\xi \in [1, \frac{k}{\lambda}]$ das Restglied bezeichnet. Es gibt eine Konstante $R < \infty$, sodass $R_2\left(\frac{k}{\lambda}\right) \leq R \cdot \left(\frac{k}{\lambda}-1\right)^3$. Daher gilt für $\lambda \to \infty$:

$$\begin{aligned} p_\lambda(k) &= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(\lambda \cdot \ g_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right), \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}\right)(1 + r_\lambda(k)), \end{aligned}$$

mit

$$\sup\{|r_\lambda(k)|\,;\,|k-\lambda| \leq A\sqrt{\lambda}\} \to 0. \quad \forall A > 0, \quad (\lambda \to \infty).$$

3. **a)** Wir wollen zeigen, dass für beliebige $N \in \mathbb{N}$ gilt, dass wenn $\bigcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{F}$ sodass $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, N\}$, dann ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) \qquad (\dagger)$$

Die Behauptung (†) ist bewiesen falls alle der folgenden drei Punkte *i)-iii)* erfüllt sind:

i) Falls $\mathbb{P}(A_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$, dann ist $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = 0$.

Dies ist klar, da nach definition $\mathbb{P}(A_i) = 0$ bedeutet alle A_i endlich sind. Dann ist auch $\bigcup_{i=1}^N A_i$ als endliche Vereinigung endlicher Mengen endlich.

ii) Falls $\exists!\, j$, sodass $\mathbb{P}(A_j) = 1$, dann ist auch $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = 1$.

Nach Definition ist $\mathbb{P}(A_j) = 1$ wenn A_j^c endlich ist. Andererseits ist $\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^N A_i^c \subset A_j^c$ und damit endlich, deshalb $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = 1$.

iii) Die Behauptung $\exists\, i \neq j$, sodass $\mathbb{P}(A_i) = 1 = \mathbb{P}(A_j)$ führt zum Widerspruch.

Sei A_j^c endlich. Aus $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt, dass $A_i \subset A_j^c$ ist, und damit auch endlich. Aber dies ist ein Widerspruch zu $\mathbb{P}(A_i) = 1$, da Ω unendlich ist, und somit kann A_i und A_i^c nicht gleichzeitig endlich sein.

b) Sei $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die abzählbare Familie von einelementigen Teilmengen von Ω. Dann führt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{\omega_i\}) \overset{?}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0$$

zum Widerspruch.

[2] oder $\xi \in [\frac{k}{\lambda}, 1]$ falls $\frac{k}{\lambda} < 1$.

Bitte wenden!

c) Sei nun $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F}$ eine abzählbare Familie von paarweise disjunkten Elementen A_i von $\mathcal{F}$, wobei der Grundraum Ω überabzählbar ist. Wir wollen zeigen, dass für beliebige abzählbare Familien I gilt, dass wenn $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, wobei $A_i \in \mathcal{F}$ sind, sodass $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, N\}$, dann ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

i) Falls $\mathbb{P}(A_i) = 0$ für alle $i \in I$, dann sind alle ausser endlich viele A_i leer, sonst wäre $\underset{i\in I}{\cup} A_i \notin \mathcal{F}$. Dann ist aber $\bigcup_{i\in I} A_i$ endlich und deshalb auch $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 0$.

ii) Falls $\exists!\ j \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{P}(A_j) = 1$, dann ist A_j^c endlich und somit ist auch $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \subset A_j^c$ endlich, deshalb $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$. Insbesondere sind wegen $A_i \cap A_j = \emptyset$ auch in diesem Fall nur endlich viele A_i nicht leer, d.h. wir sind in einer Situation, die vergleichbar mit a) ist.

iii) Die Annahme $\exists\ i \neq j$, sodass $\mathbb{P}(A_i) = 1 = \mathbb{P}(A_j)$ führt zum Widerspruch, wie in a): Sei A_j^c endlich. Aus $A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt, dass $A_i \subset A_j^c$ ist, und damit auch endlich. Aber dies ist ein Widerspruch zu $\mathbb{P}(A_i) = 1$, da Ω unendlich ist, und somit kann A_i und A_i^c nicht gleichzeitig endlich sein.

d) i) Falls $\mathbb{P}(A_i) = 0$ für alle $i \in I$, d.h. alle A_i sind abzählbar, dann ist auch $\underset{i\in I}{\cup} A_i$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar. Deshalb ist

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 0 = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

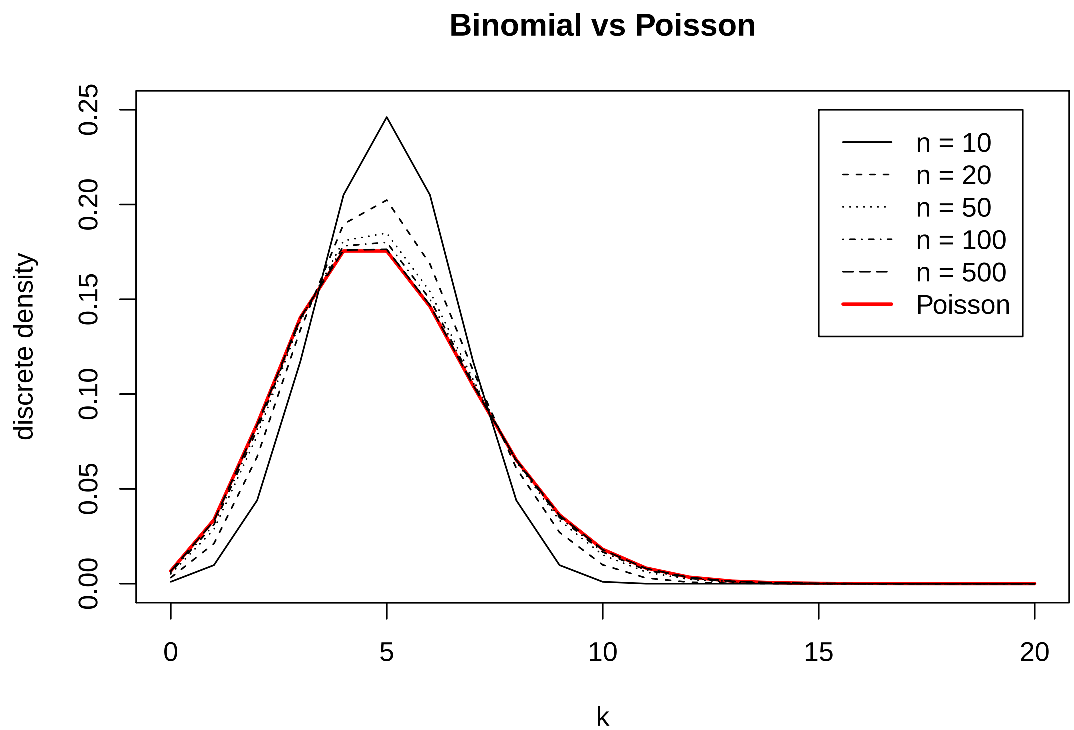
ii) & iii) Falls $\exists j \in I$ sodass A_j überabzählbar, dann ist wegen $A_j \in \mathcal{F}$ das Komplement A_j^c abzählbar und wegen $A_i \cap A_j = \emptyset$ ist für jedes $i \in I$ mit $i \neq j$ $A_i \subset A_j^c$, und somit abzählbar. Dies bedeutet insbesondere, dass es höchstens ein j geben kann, sodass A_j überabzählbar ist. Die Abzählbarkeit von $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$ ergibt sich wieder aus $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \subset A_j^c$.

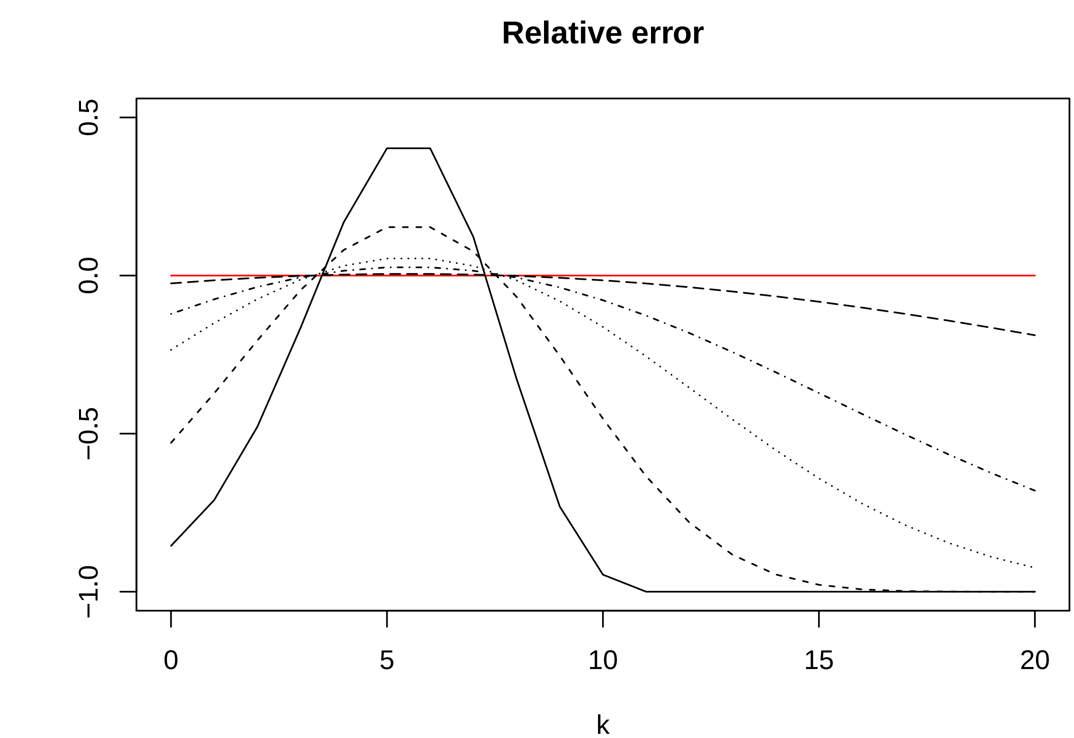
Siehe nächstes Blatt!

4. Die Aufgabe kann mit folgendem Code realisiert werden:

```
k<-0:20
lambda<-5

pdf(file='binomial_poiss.pdf',height=10,width=7)

par(mfrow=c(2,1))  # separates page in two rows

plot(k,dpois(k,lambda), type='l',ylim=c(0,0.25),col='red',lwd=2,
   main='Binomial vs Poisson',ylab='discrete density')
n<-c(10,20,50,100,500)
N<-length(n)
for(i in 1:N){
   lines(k,dbinom(k,n[i],lambda/n[i]),lty=i)
}
legend(15,.25,c(paste('n =',n),"Poisson"),
   lty=1:N,lwd=c(rep(1,N),2),col=c(rep(1,N),2))

plot(k,rep(0,length(k)),type='l',
   main='Relative error',ylim=c(-1,.5),ylab='',col='red')
for(i in 1:N){
   lines(k,(dbinom(k,n[i],lambda/n[i])/dpois(k,lambda)-1),lty=i)
}

dev.off()
```

Bitte wenden!


Binomial vs Poisson
discrete density
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
5
10
15
20
k
n = 10
n = 20
n = 50
n = 100
n = 500
Poisson


Relative error
−1.0
−0.5
0.0
0.5
0
5
10
15
20
k