# Serie 7

**1.** Zeigen Sie: Alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sind $\sigma$-kompakt.

**2.** Sei auf $X := \mathbb{R}^2$ die Funktion $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \begin{cases} |y_1 - y_2|, & x_1 = x_2, \\ 1 + |y_1 - y_2|, & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

definiert.

**a)** Zeigen Sie, dass $(X, d)$ ein lokal-kompakter, metrischer Raum ist.

**b)** Zeigen Sie, dass zu jeder Funktion $f \in C_c(X)$ eine endliche Menge $S_f \subset \mathbb{R}$ existiert mit $\mathrm{supp} f \subset S_f \times \mathbb{R}$.

**c)** Sei $\Lambda$ das durch

$$\Lambda f := \sum_{x \in S_f} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y, \quad f \in C_c(X),$$

definierte lineare Funktional. Sei $\mu$ ein Borelmass auf $(X, d)$, so dass

$$\Lambda f = \int_X f\, \mathrm{d}\mu, \quad \forall f \in C_c(X).$$

Zeigen Sie, dass jede einpunktige Teilmenge von $X$ Mass $0$ hat.

**d)** Sei $\mu$ wie in Teil c) und $E$ die $x$-Achse. Zeigen Sie, dass falls $\mu$ von innen regulär ist, $\mu(E) = 0$ und falls $\mu$ von aussen regulär ist, $\mu(E) = \infty$ gilt.

**3.** Def.: Die **Sorgenfrey-Gerade** ist der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U} \subset 2^{\mathbb{R}}$ die kleinste Topologie ist, welche alle rechts-halboffenen Intervalle $[a, b), a < b$, enthält.

**a)** Zeigen Sie: Die Borel-$\sigma$-Algebra von $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ stimmt mit der Borel-$\sigma$-Algebra der Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ überein.

**Bitte wenden!**

**b)** Bestimmen Sie die Borel-$\sigma$-Algebra des Alexandrov Double Arrow Spaces.

**4.** Sei $(X, \preccurlyeq)$ eine überabzählbare, wohlgeordnete Menge mit Maximalelement $m \in X$, so dass jedes Element $x \in X \setminus \{m\}$ nur abzählbar viele Vorgänger hat.
Sei $\prec$ die Relation auf $X$, definiert durch

$$x \prec y :\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y.$$

Für alle $x \in X$ seien

$$S_x := \{y \in X \mid x \prec y\}, \qquad \textbf{(Menge der Nachfolger von } x\textbf{)},$$

$$P_x := \{y \in X \mid y \prec x\}, \qquad \textbf{(Menge der Vorgänger von } x\textbf{)}.$$

Sei $(X, \mathcal{U})$ der kompakte Hausdorff-Raum mit $\mathcal{U} \subset 2^X$ die kleinste Topologie, welche die Mengen $P_x$ und $S_x, \forall x \in X$, enthält.

**a)** Zeigen Sie:
Jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ muss in einer Umgebung von $m$ konstant sein.

<u>Hinweis:</u> Der Durchschnitt abzählbar vieler Umgebungen des Punktes $m$ ist immer noch eine Umgebung von $m$.

**b)** Sei $\mathcal{A}$ die $\sigma$-Algebra

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \cup \{m\} &\text{ enthält eine überabzählbare, kompakte Menge} \\ &\text{oder } A^c \cup \{m\} \text{ enthält eine überabzählbare, kompakte Menge.}\},\end{aligned}$$

welche die Borelsche $\sigma$-Algebra enthält. Weiter sei das Mass $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } A \cup \{m\} \text{ eine überabzählbare, kompakte Menge enthält} \\ 0, & \text{wenn } A^c \cup \{m\} \text{ eine überabzählbare, kompakte Menge enthält.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das Borelmass $\mu\big|_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ weder von innen noch von aussen regulär ist.

**c)** Zeigen Sie:
Für jede stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = f(m).$$

Abgabe: in der jeweiligen Übungsstunde oder bis Freitag 11.04.2014 im Fach der/s jeweiligen Assistierenden.