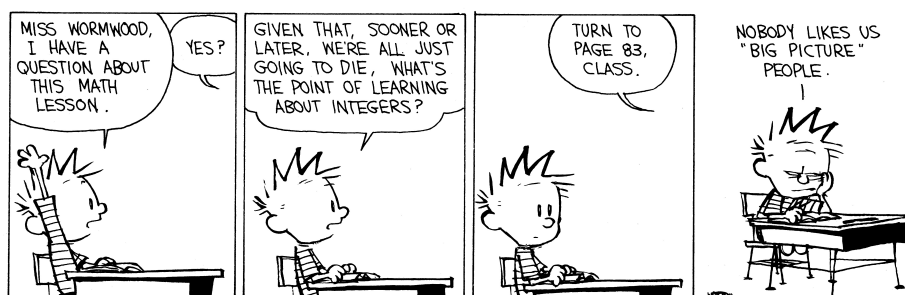


Repetitionskurs Vektoren

zur Vorlesung Mathematisches Denken
Studiengang Architektur 2009/2010

von Dr. M. Leupp



Zielpublikum: Studienanfängerinnen und -anfänger der Architektur

Bearbeitungsdauer: ca. 1-2 Stunden, je nach Vorkenntnissen

Nutzen: Sowohl die Lehrveranstaltung „Mathematisches Denken“ als auch „Tragkonstruktionen“ setzen eine gewisse Vertrautheit im Umgang mit Vektoren voraus. In diesem Repetitionskurs werden die grundlegendsten Aspekte kurz zusammengestellt. Dabei wird weniger auf mathematische Strenge als vielmehr auf Einfachheit und Anschaulichkeit Wert gelegt. Auch wenn Ihnen dieser Repetitionskurs relativ einfach erscheinen sollte, legen Sie ihn nicht vorschnell aus den Händen. Investieren Sie in einen möglichst reibungslosen Start in die Vorlesung! *Um optimal profitieren zu können, haben Sie den Repetitionskurs auf den Beginn der ersten Vorlesung sorgfältig durchgearbeitet.*

1 Was sind Vektoren

In diesem Kapitel lernen Sie den Begriff des Vektors kennen. Sie werden feststellen, dass die *Vektoren* ein äusserst praktisches Hilfsmittel sind, um Punkte, Verschiebungen oder physikalische Kräfte zu beschreiben.

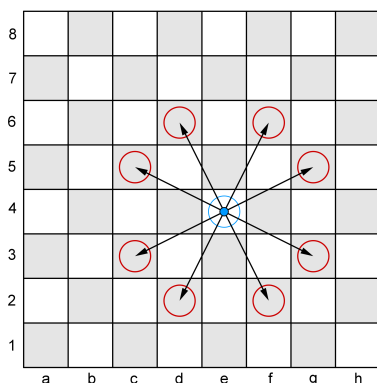
LERNZIELE: Wenn Sie dieses Kapitel bearbeitet haben, wissen Sie

- was man unter einem **Vektor** versteht und wie Vektoren **graphisch dargestellt** werden.
- was der **Nullvektor**, der **Gegenvektor** zu einem Vektor und **Einheitsvektoren** sind.
- dass Verschiebungsvektoren **freie** und Orts-, Kraftvektoren **gebundene Vektoren** sind.

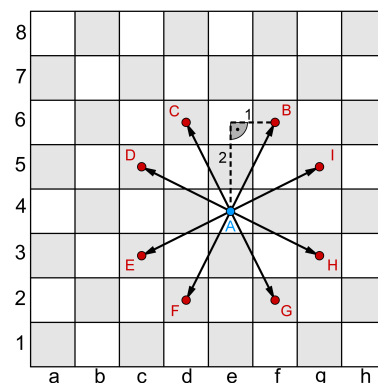
Sie können

- Vektoren **einzeichnen** bzw. herauslesen.
- den **Betrag** eines Vektors berechnen bzw. herauslesen.
- physikalische **Kräfte** quantitativ korrekt graphisch darstellen bzw. herauslesen.

Sie haben sicher schon einmal Schach gespielt und dabei den halbschrägen Spielzug des Springers, den Rösselsprung, kennen gelernt. Auf einem Schachbrett steht der schwarze Springer auf dem Ausgangsfeld e4. Was für Rösselsprünge sind möglich?



Figur 1.1. Mögliche Rösselsprünge



Figur 1.2. Zugehörige Verschiebungsvektoren

Der Springer kann sich in acht mögliche Richtungen bewegen und dadurch die in Figur 1.1 markierten Zielfelder erreichen. Jeder Rösselsprung lässt sich durch einen so genannten **Verschiebungsvektor** beschreiben. Der Verschiebungsvektor wird graphisch durch einen Pfeil repräsentiert, welcher vom Ausgangsfeld zum Zielfeld zeigt (siehe Figur 1.1). Werden für die Spielfeldmitten die Bezeichnungen aus Figur 1.2 verwendet, gilt:

Die acht möglichen Rösselsprünge sind: \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} , \vec{AF} , \vec{AG} , \vec{AH} , \vec{AI}

Dabei bezeichnet \vec{AB} den Verschiebungsvektor, der von A nach B geht, \vec{AC} von A nach C usw. Jeder Rösselsprung und damit der zugehörige Verschiebungsvektor ist durch die Richtung und die Länge der Verschiebungsstrecke eindeutig bestimmt. Die Länge der Verschiebungsstrecke wird auch als **Betrag** des Verschiebungsvektors bezeichnet. Beim Rösselsprung \vec{AB} ergibt sich mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS (siehe Figur 1.2):

Betrag des Verschiebungsvektors: $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ [Längeneinheiten]

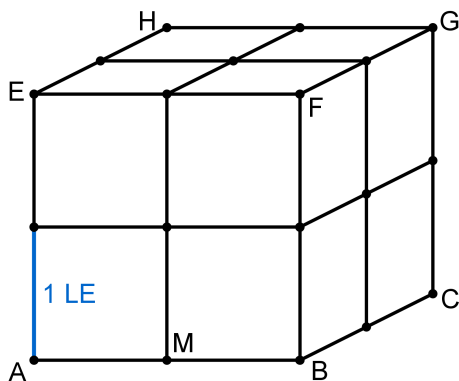
Dabei wurde die Breite eines Spielfelds auf dem Schachbrett als eine Längeneinheit aufgefasst.

Wir definieren Vektoren nun allgemein und fassen die neuen Begriffe zusammen:

Unter einem **Vektor** \vec{a} verstehen wir eine Grösse, die sowohl eine *Richtung* als auch einen *Betrag* aufweist. Ein Vektor wird graphisch durch einen Pfeil repräsentiert, dessen Richtung derjenigen des Vektors entspricht und dessen Länge in geeignet gewählten Einheiten gleich dem Betrag $|\vec{a}|$ des Vektors ist.

Oft werden Vektoren auch mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Der Verschiebungsvektor \vec{a} kann auch als „gerichtete“ **Strecke** $a = AB$ aufgefasst werden.

Aufgabe 1.1. *Verbindungsvektoren im Raum*



Die Kantenlänge eines Würfelchens im abgebildeten Würfelgitter beträgt 1 LE (1 Längeneinheit).

- Wie lautet der Vektor mit Anfangspunkt M , Betrag 1 LE und richtungsgleich zum Vektor \vec{AB} ?
- Wie lautet der Vektor mit Endpunkt F , Betrag 2 LE und parallel zur Strecke EH ?
- Bestimmen Sie $|\vec{BF}|$, $|\vec{FB}|$, $|\vec{FC}|$, $|\vec{AA}|$.

Die Lösung zu dieser wie zu allen anderen Aufgaben finden Sie im Lösungsteil am Ende des Repetitionskurses.

In Aufgabe 1.1 sind 2 spezielle Vektoren vorgekommen. Der so genannte **Nullvektor** \vec{AA} und der **Gegenvektor** \vec{FB} zum Vektor \vec{BF} . Beim Vektor \vec{AA} fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen. Er hat Länge 0, seine Richtung ist daher unwichtig. Sie ist unbestimmt. (Der Begriff der Richtung verliert bei einem Verschiebungsvektor von A nach A , d.h. der Springer bleibt auf e_4 , seinen Sinn.) Der Gegenvektor \vec{FB} zum Vektor \vec{BF} hat dieselbe Länge wie \vec{BF} , zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Ferner werden Vektoren mit der Länge 1 LE, wie z. B. \vec{MB} in Aufgabe 1.1, als **Einheitsvektoren** bezeichnet.

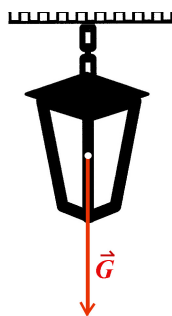
Wir halten dies allgemein fest:

Der **Nullvektor** $\vec{0}$ ist ein Vektor mit Betrag 0 und unbestimmter Richtung.
 Der **Gegenvektor** zu einem Vektor ist jener Vektor, der denselben Betrag aber die entgegengesetzte Richtung hat.
 Ein **Einheitsvektor** hat die Länge 1 LE.

In Ihrer Physikausbildung haben Sie den Kraftbegriff kennen gelernt. **Kräfte** haben eine Richtung und einen Betrag (die Stärke der Kraftwirkung). Deshalb lassen sich Kräfte durch Vektoren beschreiben. Die Stärke einer Kraft wird durch die Länge (den Betrag) des Vektors repräsentiert, die Richtung des Vektors entspricht der Richtung der Kraftwirkung. Die Stärke von Kräften gibt man in N (*Newton*) an. Dabei gilt: Die Gewichtskraft auf die Masse 1 kg hat die Stärke 9.81 N. Sie zeigt vertikal nach unten (zum Erdmittelpunkt) und greift im Schwerpunkt des Körpers an.

Bemerkung: Die Formel zur Berechnung der Gewichtskraft lautet $G = mg$, wobei m die Masse des Körpers in kg und $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ die Fallbeschleunigung (in Mitteleuropa, nahe der Erdoberfläche) bezeichnen. Um eine Kraft quantitativ korrekt graphisch darzustellen, wird eine **geeignete Einheit** für die Länge des Vektors **gewählt**.

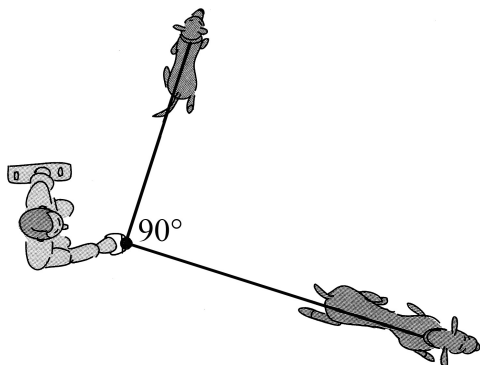
Beispiel 1.1. Gewichtskraft auf eine Laterne der Masse 4.3 kg



Wahl der Einheit für die graphische Darstellung: $1 \text{ cm} \hat{=} 20 \text{ N}$
 Die abgebildete Laterne hat eine Masse von 4.3 kg und erfährt deshalb eine Gewichtskraft von $4.3 \cdot 9.81 \text{ N} \approx 42 \text{ N}$. Entspricht 1 cm einer Stärke von 20 N wird die Gewichtskraft \vec{G} auf die Laterne durch einen Vektor der Länge 2.1 cm dargestellt.

In der Physik ist es üblich für die Stärke (den Betrag) einer Kraft \vec{F} die Schreibweise F anstelle von $|\vec{F}|$ zu verwenden. Im obigen Beispiel bedeutet dies: $G = |\vec{G}| = 42 \text{ N}$. Ferner verwendet man für grosse Kräfte die Einheit kN (*kilonewton*). Dabei gilt: $1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$.

Aufgabe 1.2. Hunde an der Leine



Der grosse Hund zieht mit 20 N, der kleine Hund mit 15 N. Einheit: $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ N}$.

(a) Zeichnen Sie die Kraft \vec{F}_1 des grossen Hundes und \vec{F}_2 des kleinen Hundes in die Abbildung.

(Anfangspunkt der Kraftvektoren = markierter Punkt)

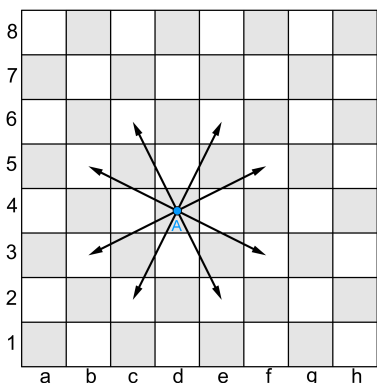
(b) Darf man schreiben $\vec{F}_1 = 20 \text{ N}$? (Begründen Sie Ihre Antwort und schreiben Sie $\dots = 20 \text{ N}$ korrekt.)

Beachten Sie: Die Länge der Leine hat keinen Zusammenhang mit der Grösse der Kraft. Wenn Sie Ihre Leine verlängern, erhöht sich dadurch nicht die Kraft Ihres Hundes.

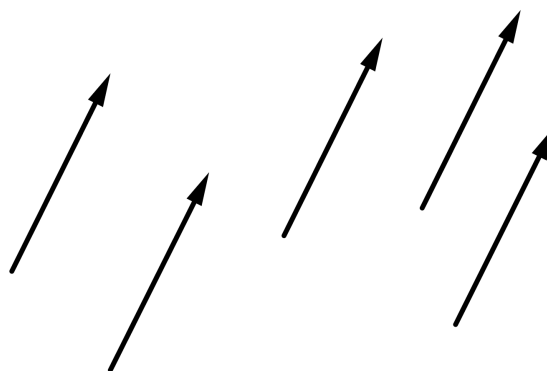
Wir fassen die wichtigsten Aspekte über Kraftvektoren zusammen:

Kräfte sind Vektoren. Die Stärke der Kraft \vec{F} wird durch den Betrag des Vektors beschrieben, die Richtung des Vektors entspricht der Richtung der Kraftwirkung. Für den Betrag $|\vec{F}|$ der Kraft wird kurz F geschrieben. In der quantitativ korrekten **graphischen Darstellung** ergibt sich die Länge des Vektors durch die gewählte **Einheit** ($\dots \hat{=} 1 \text{ N}$).

Kehren wir zum Beispiel des Rösselsprungs zurück. Die in Figur 1.2 dargestellten Rösselsprünge lassen sich auch von andern Spielfeldern des Schachbretts ausführen. Entsprechend können die Pfeile z. B. auch an den Mittelpunkt von d4 **angetragen** werden. Die möglichen Rösselsprünge (Verschiebungsvektoren) sind die gleichen.



Figur 1.3. Mögliche Rösselsprünge von d4 aus



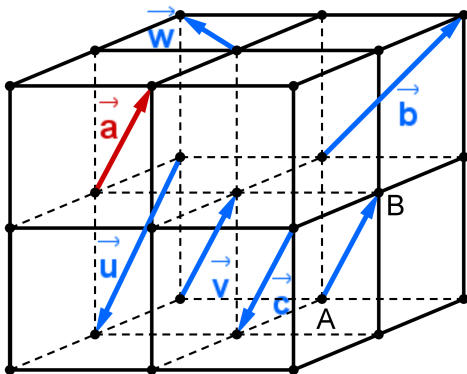
Figur 1.4. Gleiche Vektoren

Gemäss Definition sind Vektoren allein durch Betrag und Richtung vollständig bestimmt. Zwei Vektoren sind also gleich, wenn sie denselben Betrag und dieselbe Richtung haben, unabhängig von der Lage ihrer Anfangspunkte (siehe Figur 1.4). Wir halten fest:

Zwei Vektoren sind **gleich**, wenn sie den gleichen Betrag haben und richtungsgleich sind.

Wir haben im Vorangehenden einen einzelnen „Pfeil“ als Vektor bezeichnet. Streng genommen versteht man jedoch unter einem Vektor *die Menge aller „Pfeile“ mit gleicher Länge und gleicher Richtung*. Ein einzelner Pfeil ist dann ein Repräsentant (Vertreter) dieser Gesamtheit, des so genannten Vektors.

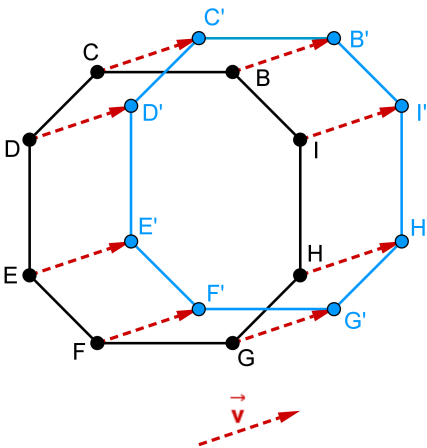
Aufgabe 1.3. Gleiche Vektoren



- (a) Bei welchen Vektoren handelt es sich um den gleichen Vektor wie \vec{a} ?
- (b) Welche Vektoren sind Gegenvektoren von \vec{a} ?
- (c) Gibt es einen Vektor (ev. in der Figur nicht abgebildet), der gleich seinem Gegenvektor ist?

Vorsicht: Ein Vektor besitzt einen Betrag **und** eine Richtung. Beispielsweise haben alle Einheitsvektoren den Betrag 1 LE, sind aber nur gleich, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen.

Beispiel 1.2. Parallelverschiebung (Translation)



An jeden Punkt des Achtecks $B \dots I$ ist der Verschiebungsvektor \vec{v} angetragen worden. Die entsprechenden Pfeilendpunkte bilden ein um \vec{v} **parallel verschobenes** Achteck $B' \dots I'$.

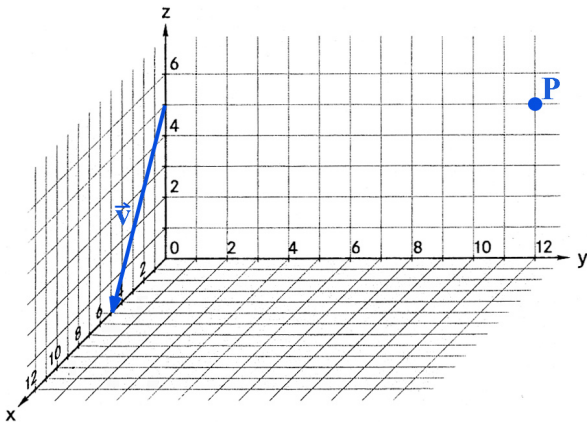
Das Fachwort für Parallelverschiebung heisst Translation und bedeutet im Lateinischen so viel wie „etwas von einem Ort zu einem anderen schaffen“, während der „Träger“ oder „Überbringer“ „vector“ genannt wird, abgeleitet von vehere: tragen, bringen, fahren.

Ein Verschiebungsvektor \vec{v} ist Stifter einer **Translation** (Parallelverschiebung). Bei der Translation wird jedem Punkt P der um den Vektor \vec{v} verschobene Punkt P' zugeordnet.

Verschiebungsvektoren dürfen an jeden Raumpunkt angetragen werden. Man spricht von so genannten **freien Vektoren**. In gewissen Fällen macht es aber Sinn, Vektoren nur an einen bestimmten Punkt anzutragen, z. B. an den Ursprung O (Origin) eines Koordinatensystems. In diesem Fall sind die Vektoren an einen festen Ort **gebunden**.

Der **Ortsvektor** \vec{OP} eines Punktes P stellt den Ort des Punktes P **relativ zum Ursprung** O des Koordinatensystems dar. Der Ortsvektor wird stets an den Ursprung O angetragen, demzufolge gibt seine Pfeilspitze den Ort des entsprechenden Punktes an.

Aufgabe 1.4. Ortsvektor eines Punktes



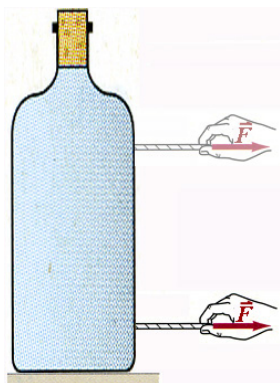
- (a) Zeichnen Sie den Ortsvektor des Punktes P ein. Wie gross ist sein Betrag?
- (b) Tragen Sie in P den Vektor \vec{v} an. Der Endpunkt des angetragenen Vektors gibt den Ort des Punktes Q an. Zeichnen Sie den Ortsvektor des Punktes Q ein. Wie gross ist sein Betrag?
- (c) M ist die Mitte von P und Q . Zeichnen Sie den Ortsvektor des Punktes M ein.

Beachten Sie: \vec{PM} stellt den Ort des Punktes M relativ zum Punkt P dar. Der Ortsvektor \vec{OM} von M stellt den Punkt M relativ zum Ursprung O dar.

Wir halten fest:

Der **Ortsvektor** $\vec{r} = \vec{OP}$ eines Punktes P stellt den Ort des Punktes P relativ zum Ursprung O dar. Ortsvektoren werden stets an den Ursprung O angetragen.

Beispiel 1.3. Kraft als gebundener Vektor



Eine Flasche erfährt die waagrechte Zugkraft \vec{F} . Greift die Zugkraft \vec{F} relativ weit unten an, wird die Flasche aufrecht verschoben. Greift die Zugkraft \vec{F} relativ weit oben an, wird die Flasche umkippen. Obwohl die Flasche in beiden Fällen mit gleicher Stärke in die gleiche Richtung gezogen wird, ist die Wirkung völlig verschieden. Der **Angriffspunkt** der Kraft ist wesentlich!

Beachten Sie: Der Angriffspunkt und die Richtung der Kraft definieren eindeutig eine Gerade, die so genannte **Wirkungslinie**. Wird die Kraft entlang dieser Wirkungslinie verschoben, ändert sich ihre Wirkung nicht.

Wir schliessen daraus:

Kräfte, die an einem Festkörper angreifen, sind **gebundene Vektoren**. Die Wirkung der Kraft hängt nicht nur von Stärke und Richtung, sondern auch vom **Angriffspunkt** ab.

Während die Angabe einer Masseinheit wie beispielsweise N (Newton), kN (kilonewton) oder m (Meter) unverzichtbar ist, kann die Angabe LE (Längeneinheit) in der Regel ohne Fehlinterpretationen zu erzeugen weggelassen werden. So werden wir in Zukunft auf die Angabe LE verzichten und schreiben beispielsweise für die Stärke einer Gewichtskraft $G = 2 \text{ kN}$, hingegen für die Länge eines Ortsvektors $|\vec{OP}| = 5$.

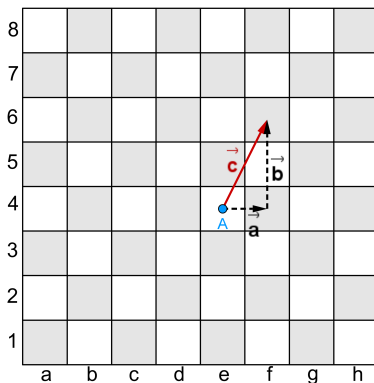
2 Rechnen mit Vektoren

In diesem Kapitel lernen Sie die wohl wichtigste Eigenschaft von Vektoren kennen: Mit Vektoren kann man „rechnen“ wie mit Zahlen. Sie lernen Vektoren zu addieren, subtrahieren und vervielfachen.

LERNZIELE: Sie

- können Vektoren graphisch **addieren**, **subtrahieren** und **vervielfachen**.
- können die **Resultierende** (Ersatzkraft) zweier Kräfte graphisch bestimmen.
- wissen, dass im Allgemeinen $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ist. (Gleichheit gilt nur falls \vec{a}, \vec{b} richtungsgleich sind.)

Erinnern Sie sich an den Rösselsprung in Kapitel 1? In der Praxis kann der halbschräge Spielzug des Springers, z. B. von e4 nach f6, am leichtesten wie folgt durchgeführt werden:



Figur 2.1. Rösselsprung von e4 nach f6

Verschiebung des Springers von e4 nach f4 (Vektor \vec{a}) **und** anschliessend Verschiebung des Springers von f4 nach f6 (Vektor \vec{b}).

Die Verschiebung des Springers von e4 nach f6 (Vektor \vec{c}) ist also das Resultat (die Summe) der **Hintereinanderausführungen** der Verschiebungen mit \vec{a} und mit \vec{b} .

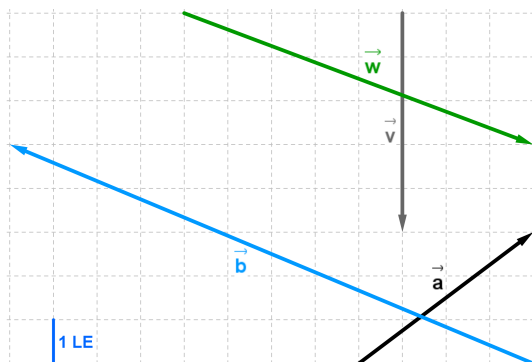
Man schreibt: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Allgemein definieren wir die Addition zweier Vektoren (mit denselben Einheiten) wie folgt:

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} werden **addiert**, indem man den Anfang des zweiten Vektors an die Spitze des ersten Vektors ansetzt. Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ erstreckt sich dann vom Anfang des ersten Vektors bis zur Spitze des zweiten Vektors.

Die Verschiebung des Springers von e4 nach f6 (siehe Figur 2.1) ist **auch** das Resultat der Hintereinanderausführungen der Verschiebungen von e4 nach e6 mit \vec{b} und dann von e6 nach f6 mit \vec{a} . Also gilt: $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Diese (und weitere) Rechenregeln einer *Addition* gelten allgemein, so dass der Name **Vektoraddition** gerechtfertigt ist, und mit Vektoren wie mit Zahlen gerechnet werden darf.

Aufgabe 2.1. Vektoraddition



- Zeichnen Sie den Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ein.
- Berechnen Sie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$. Ist $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
- Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{v}$ (d.h. $\vec{c} + \vec{v}$) und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{v} + \vec{w}$ ein. Kommentar?

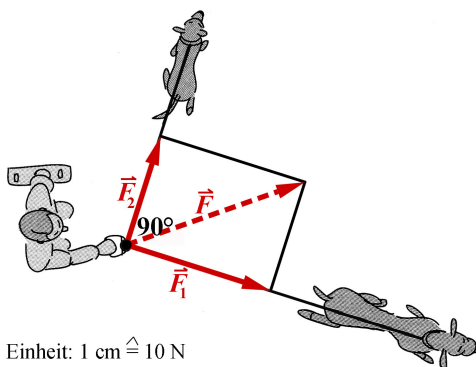
Beachten Sie: Die Länge von \vec{c} ist ungleich der Summe der Längen von \vec{a} und \vec{b} . Es gilt im Allg: $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, nur bei richtungsgleichen Vektoren ist $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

In Aufgabe 2.1 ergibt sich die Summe $\vec{a} + \vec{b} + \vec{v} + \vec{w}$ durch Aneinanderreihung der Einzelvektoren. Es entsteht eine **Vektorkette**. Der Summenvektor zeigt vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Endpunkt des letzten Vektors. Stimmen diese Punkte überein, so heisst die Vektorkette **geschlossen** und es ist $\vec{a} + \vec{b} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Ferner halten wir fest:

Im Allg. ist: $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Nur bei **richtungsgleichen** Vektoren gilt: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

In der Physik kommt häufig der Fall vor, dass an einem Festkörper **zwei Kräfte** \vec{F}_1 und \vec{F}_2 angreifen, deren Angriffspunkte zusammenfallen (siehe das nächste Beispiel 2.1). Man kann die gleiche Wirkung auch durch eine **einzige** Kraft von passender Richtung und Stärke erzielen. Diese Ersatzkraft \vec{F} bezeichnet man als **Resultierende** der beiden Kräfte. Man findet sie als **Diagonale eines Parallelogramms**, dessen Seiten die beiden angreifenden Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 sind. D.h. die Resultierende (Ersatzkraft) ist die Vektorsumme der beiden Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 mit dem selben Angriffspunkt wie \vec{F}_1 bzw. \vec{F}_2 .

Beispiel 2.1. Resultierende zweier Kräfte



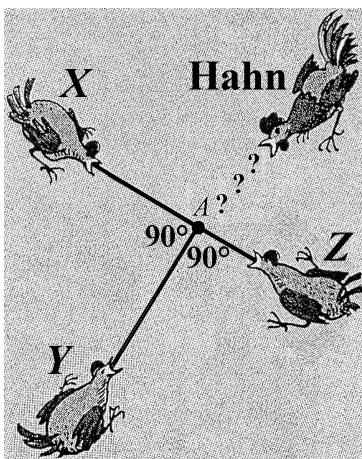
Der grosse Hund zieht mit der Kraft \vec{F}_1 (Stärke $F_1 = 20\text{N}$), der kleine mit \vec{F}_2 (Stärke $F_2 = 15\text{N}$). \vec{F}_1 und \vec{F}_2 können durch die Resultierende $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ **ersetzt** werden. \vec{F} ergibt sich aus der Diagonalen des Parallelogramms (hier ein Rechteck). Die Stärke von \vec{F} lässt sich mit PYTHAGORAS berechnen:
 $F = \sqrt{(20\text{N})^2 + (15\text{N})^2} = 25\text{N}$.

Beachten Sie: Die Stärke von \vec{F} ist nicht gleich der Summe der Stärken von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 : $F \neq F_1 + F_2$. Nur bei gleichgerichteten Kräften können die Stärken einfach addiert werden.

Zwei auf einen Körper im selben Angriffspunkt angreifende Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 lassen sich durch $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ **ersetzen**. \vec{F} heisst **Resultierende** (Ersatzkraft) von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Die Resultierende mehrerer Kräfte ergibt sich durch die Vektorsumme aller Einzelkräfte (Aneinanderreihung der Kraftvektoren). Es entsteht eine „Kraftvektorkette“. Ist diese geschlossen, d.h. die Kraftvektoren addieren sich zu $\vec{0}$, redet man von **Kräftegleichgewicht**: Die Kraftwirkungen gleichen sich aus.

Aufgabe 2.2. Hühner und Hahn



Huhn X zieht mit 10 N, Y mit 12 N und Huhn Z mit 15 N. Einheit: 1 cm $\hat{=}$ 5 N. A: Angriffspunkt der Kraftvektoren

- (a) Zeichnen Sie die Kräfte $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ von X, Y, Z ein.
- (b) Zeichnen Sie die Resultierende \vec{F}_{xz} von \vec{F}_x und \vec{F}_z ein.
- (c) Zeichnen Sie die Resultierende \vec{F} von $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ (d.h. die Resultierende von \vec{F}_{xz}, \vec{F}_y) ein und berechnen Sie F .
- (d) Mit welcher Kraft \vec{H} muss der Hahn ziehen, dass am Knoten Kräftegleichgewicht herrscht?

Beachten Sie: \vec{F}_{xz} **ersetzt** \vec{F}_x und \vec{F}_z . Zur Bestimmung von \vec{F} werden nur noch \vec{F}_{xz} und \vec{F}_y verwendet, denn: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = \vec{F}_{xz} + \vec{F}_y$

Zu jedem Vektor \vec{AB} existiert der zugehörige Gegenvektor \vec{BA} . Für die Summe von Vektor und Gegenvektor gilt stets: $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$. In Analogie zu $a + x = 0 \leftrightarrow x = -a$ bei Zahlen führen wir die **Schreibweise** $\vec{BA} = -\vec{AB}$ ein. Damit gilt dann:

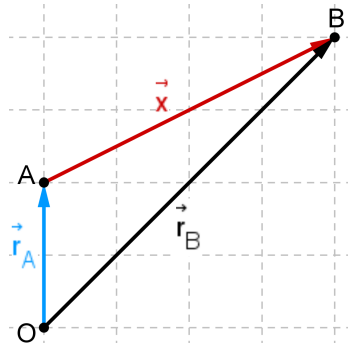
$$\vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}.$$

Beschreibt der Vektor \vec{AB} beim Schach die Verschiebung des Springers von e4 nach f6, dann beschreibt der Gegenvektor \vec{BA} die Verschiebung von f6 nach e4 **zurück**. Der Springer bleibt durch die Hintereinanderausführung von Zug und Retour-Zug an Ort. Dem entspricht der Verschiebungsvektor $\vec{AA} = \vec{0}$. Die Verschiebung von f6 **zurück** nach e4 kann als Verschiebung um $-\vec{AB}$ aufgefasst werden.

Statt $\vec{AB} + (-\vec{AB})$ schreiben wir kurz $\vec{AB} - \vec{AB}$ und definieren dadurch die **Subtraktion von Vektoren**, indem wir sie auf die Addition zurückführen. Allgemein gilt:

Ein Vektor wird **subtrahiert**, indem man seinen Gegenvektor addiert: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Beispiel 2.2. Verbindungsvektor



Bezeichnen $\vec{r}_A = \vec{OA}$, $\vec{r}_B = \vec{OB}$ die Ortsvektoren von A bzw. B, gilt für den Verbindungsvektor $\vec{x} = \vec{AB}$:

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \text{ d.h.}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Beachten Sie: Das obige Resultat ergibt sich auch durch Umformen der vektoriellen Gleichung: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad || \quad -\vec{OA}$
 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

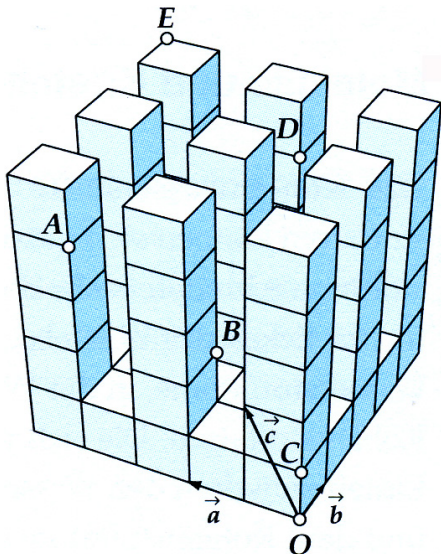
Wird derselbe Vektor mehrmals addiert, z. B. $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$, schreiben wir dafür $3 \cdot \vec{a}$ oder kurz $3\vec{a}$. Der Vektor $3\vec{a}$ ist dreimal so lang wie \vec{a} und hat dieselbe Richtung wie \vec{a} .

Allgemein definieren wir die **Vervielfachung** eines Vektors wie folgt:

Der **Vektor** $k\vec{a}$ mit $k \in \mathbb{R}$ ist $|k|$ -mal so lang wie der Vektor \vec{a} . Für $k > 0$ hat er dieselbe Richtung wie \vec{a} , für $k < 0$ hat er die Gegenrichtung von \vec{a} .

Speziell gilt: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$. Wiederum gelten naheliegende Rechenregeln, wie z. B. $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, so dass in diesem Sinne mit Vektoren wie mit Zahlen gerechnet werden darf.

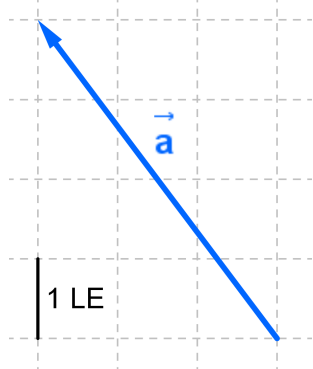
Aufgabe 2.3. Turmskulptur



Die abgebildete Skulptur ist aus lauter kleinen Würfeln aufgebaut. Drücken Sie die folgenden Vektoren als *Summe von Vielfachen* der drei gegebenen Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aus.

- (a) \vec{OA} , (b) \vec{OB} , (c) \vec{DA} , (d) \vec{EC}

Aufgabe 2.4. Einheitsvektor



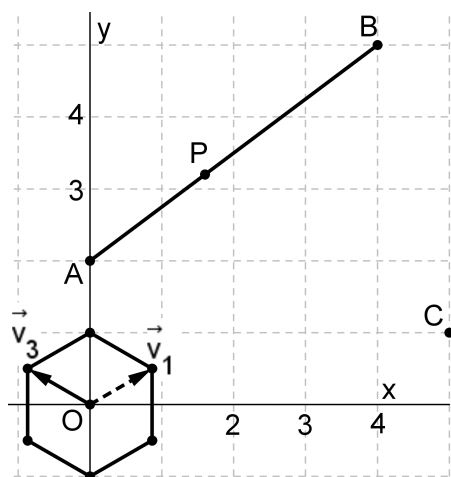
- (a) Berechnen Sie $|\vec{a}|$.
- (b) Zeichnen Sie den Vektor $\frac{1}{5}\vec{a}$ ein.
- (c) Berechnen Sie $|\frac{1}{5}\vec{a}|$. Kommentar?

Beachten Sie: Ist \vec{e} der Einheitsvektor in Richtung \vec{a} , dann gilt:
 $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$ bzw. $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

Wir halten fest:

Man erhält den **Einheitsvektor** \vec{e} in Richtung \vec{a} , indem man den Vektor \vec{a} mit dem Kehrwert seiner Länge (bzw. seines Betrages) vervielfacht: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

Aufgabe 2.5. Punkt P auf Strecke AB



- (a) Der Punkt P liegt 2 LE von A entfernt in Richtung B . Bestimmen Sie den Ortsvektor von P ausgedrückt mit Hilfe der Ortsvektoren von A, B und dem Verbindungsvektor von A nach B .
 Beachten Sie: Der Ausdruck $\vec{OA} + 2\text{LE}$ ergibt keinen Sinn. Der erste Summand ist ein Vektor, der zweite eine Zahl!
- (b) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6$ sind die Vektoren vom Ursprung O zu den 6 Ecken des abgebildeten Sechsecks mit Mitte O . Das Sechseck wird parallel verschoben, so dass der Mittelpunkt in die Mitte von O und C zu liegen kommt. Bestimmen Sie die Ortsvektoren der Eckpunkte des verschobenen Sechsecks.

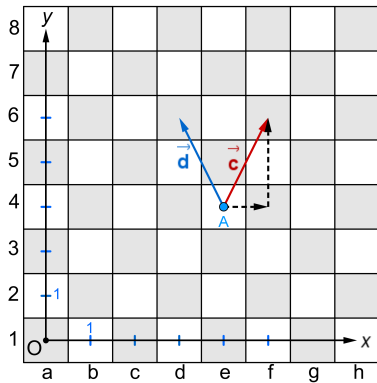
3 Vektoren in Komponenten

Zur Beschreibung von Punkten in der Ebene bzw. im Raum wird üblicherweise ein Koordinatensystem verwendet. Die Darstellung der Vektoren bezüglich einem solchen Koordinatensystem erfolgt mit Hilfe von Zahlenpaaren bzw. Zahlentripeln. Wie Sie sehen werden, erleichtert diese Art der Darstellung den rechnerischen Umgang mit Vektoren enorm.

LERNZIELE: Sie können

- Vektoren in Komponentendarstellung einzeichnen bzw. aus einer Zeichnung herauslesen.
- den Betrag eines Vektors in Komponentendarstellung berechnen.
- Vektoren in Komponentendarstellung **addieren, subtrahieren** und **vervielfachen**.

Kehren wir ein letztes Mal zum Beispiel des Rösselsprungs zurück.



Figur 3.1. Rösselsprünge e4-f6, e4-d6

Der Rösselsprung von e4 nach f6 (Verschiebungsvektor \vec{c}) kann auch wie folgt beschrieben werden:

1 Einheit nach rechts,
2 Einheiten nach oben wir schreiben: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für den Rösselsprung von e4 nach d6 (Verschiebungsvektor \vec{d}) gilt entsprechend:

-1 Einheit nach rechts,
2 Einheiten nach oben $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Beschreibung der Vektoren \vec{c} und \vec{d} erfolgt aufgrund von den zwei **Richtungen eines Koordinatensystems**, welches dem Schachbrett zugrunde gelegt wird: Die Rechts-Richtung (x -Richtung) und die Aufwärts-Richtung (y -Richtung). Der Ursprung kann in der linken unteren Spielfeldmitte angenommen werden. Die Zahlen geben an, wieviele Einheiten man in die x - bzw. in die y -Richtung gehen muss, um vom Anfangspunkt zum Endpunkt des Vektors zu gelangen. Allgemein halten wir fest:

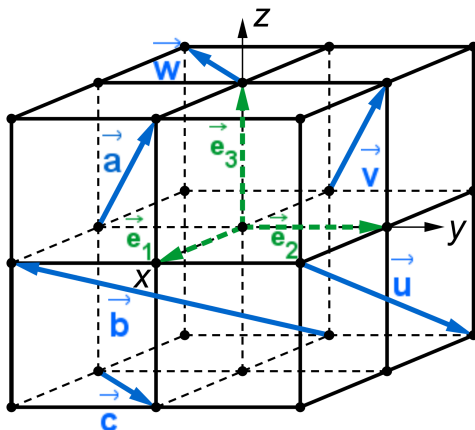
Bezeichnet \vec{a} einen Vektor bezüglich eines ebenen bzw. räumlichen Koordinatensystems entspricht im eindeutig ein Zahlenpaar bzw. Zahlentripel und umgekehrt. Dabei gilt:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ D.h. der Vektor weist
 a_1 -Einheiten in x -Richtung
 a_2 -Einheiten in y -Richtung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ a_1 -Einheiten in x -Richtung
 a_2 -Einheiten in y -Richtung
 a_3 -Einheiten in z -Richtung

Die Zahlen a_1, a_2, a_3 heissen **Komponenten** des Vektors \vec{a} .

Aufgabe 3.1. Vektoren in Komponenten



Die Würfelchen im Würfelgitter haben Kantenlänge 1 LE. Bestimmen Sie die Komponentendarstellungen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$ und \vec{w} .

Beachten Sie: Zwei Vektoren sind **gleich**, wenn sie die gleichen Komponenten besitzen. Z. B. $\vec{a} = \vec{v}$

Verläuft ein Vektor **parallel** zur (x, y) -Ebene (d.h. 0 LE in z -Richtung), dann ist seine z -Komponente null. Z. B. \vec{c}, \vec{w} . Ist umgekehrt die z -Komponente eines Vektors **null**, dann verläuft er parallel zur (x, y) -Ebene. Z. B. \vec{c}, \vec{w} .

Entsprechendes gilt für die anderen Komponenten!

Von besonderer Bedeutung sind die drei **Basisvektoren** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (siehe Figur oben), die durch die Achsenrichtungen des verwendeten Koordinatensystems festgelegt werden:

\vec{e}_1 ist der Einheitsvektor in x -Richtung
 \vec{e}_2 ist der Einheitsvektor in y -Richtung
 \vec{e}_3 ist der Einheitsvektor in z -Richtung

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Komponentendarstellung eines Vektors stützt sich auf die wichtige Tatsache, dass jeder Vektor des Raumes sich eindeutig darstellen lässt als Summe von Vielfachen der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: Zum Beispiel (siehe Figur oben)

$$\vec{b} = 2 \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{abgekürzte Schreibweise in Spaltenform})$$

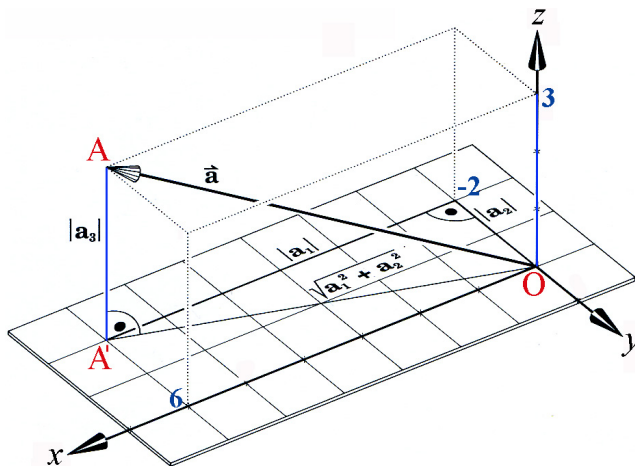
Für die beiden speziellen Vektoren, den räumlichen **Nullvektor** und den **Gegenvektor** finden wir die folgenden Komponentendarstellungen:

$$\text{Nullvektor } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \quad \text{Gegenvektor von } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Erinnern Sie sich? Ortsvektoren sind gebundene Vektoren. Sie werden stets an den Ursprung O angetragen. Ihre Pfeilspitze gibt den Ort des entsprechenden Punktes an (siehe das nächste Beispiel 3.1). Daraus folgt: Die Vektorkomponenten des Ortsvektors \vec{OA} eines Punktes $A = (a_1, a_2, a_3)$ stimmen mit den Punktkoordinaten von A überein. Wir halten fest:

Zu dem Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ gehört der **Ortsvektor** $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und umgekehrt.

Beispiel 3.1. Ortsvektor und Betrag



Der Punkt A hat den Ortsvektor \vec{OA} :

$$A = (6, -2, 3) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für die Länge des Vektors $\vec{a} = \vec{OA}$ mit $a_1 = 6$, $a_2 = -2$ und $a_3 = 3$ finden wir mit Pythagoras in zwei Schritten:

$$\begin{aligned} |\vec{OA}'| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\ |\vec{OA}| &= \sqrt{|\vec{OA}'|^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7 \end{aligned}$$

Allgemein halten wir fest:

Betrag des Vektors \vec{a} : $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

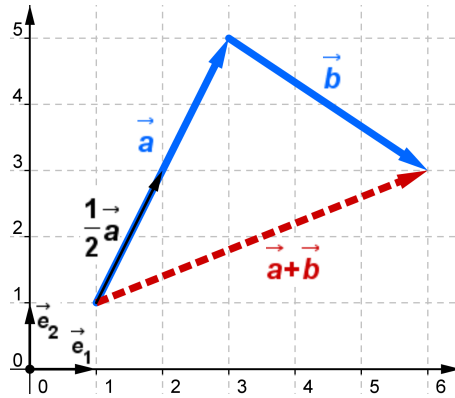
Aufgabe 3.2. Beträge von Vektoren

Berechnen Sie die Beträge der folgenden Vektoren:

$$(a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (b) \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (c) \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (d) \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad (e) \vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \text{ N} \\ 3 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} werden addiert, indem man den Anfang des zweiten Vektors an die Spitze des ersten Vektors ansetzt. Das nächste Beispiel 3.2 zeigt, dass dies auf die „zeilenweise Addition“ der Vektoren in der Komponentendarstellung führt.

Beispiel 3.2. *Vektoraddition und Vektorvervielfachung*



Für den Vektor \vec{a} bzw. \vec{b} gilt:

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + (-2)\vec{e}_2$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für den Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ bzw. das Vielfache $\frac{1}{2}\vec{a}$ ergibt sich daraus:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) + (3\vec{e}_1 + (-2)\vec{e}_2) = (2+3)\vec{e}_1 + (4+(-2))\vec{e}_2$$

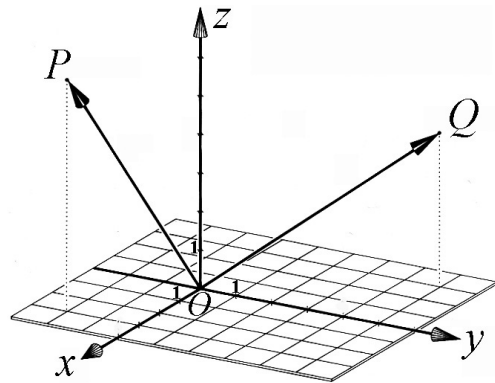
$$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)\vec{e}_2$$

$$\text{D.h. } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für die **Addition**, **Subtraktion** und **Vervielfachung** von räumlichen Vektoren in der Komponentendarstellung:

Addition:	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$	Vervielfachung:	$k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$
-----------	---	-----------------	--

Aufgabe 3.3. *Orts-, Einheits- und Verbindungsvektor*

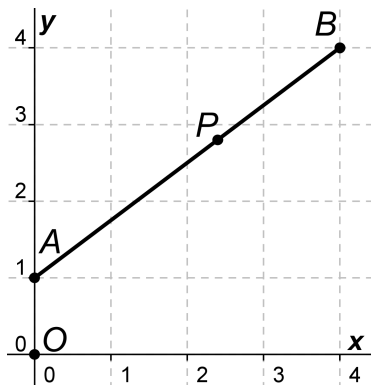


$$P = (3, -2, 6), \quad Q = (-3, 5, 4)$$

Bestimmen Sie in der Komponentendarstellung

- (a) den Ortsvektor des Punktes Q .
- (b) den Einheitsvektor von O in Richtung P .
- (c) den Verbindungsvektor \vec{PQ} .

Aufgabe 3.4. *Punkt P auf Strecke AB*



Der Punkt P liegt 3 LE von A entfernt in Richtung B . Bestimmen Sie die Komponenten des Ortsvektors von P .

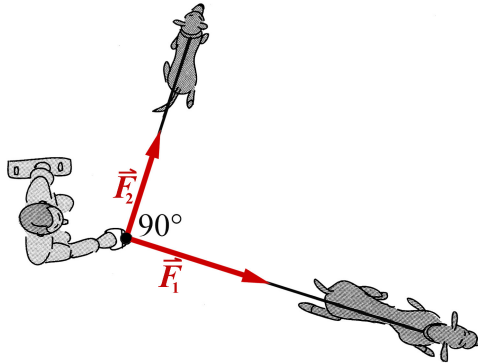
Beachten Sie: Der Ausdruck $A+3\text{LE}$ ergibt keinen Sinn. Der erste Summand ist ein Punkt, der zweite eine Zahl!

Lösungen aller Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1.1

(a) \vec{MB} (b) \vec{GF} (c) $|\vec{BF}| = 2 \text{ LE}$, $|\vec{FB}| = 2 \text{ LE}$, $|\vec{FC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \text{ LE}$, $|\vec{AA}| = 0$

Lösung zu Aufgabe 1.2



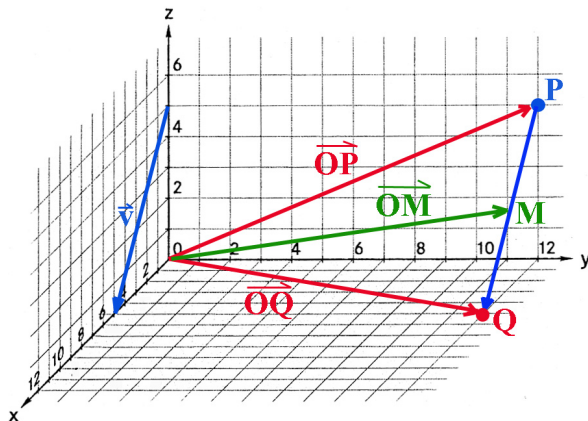
(a) Siehe Figur.

(b) Nein, $\vec{F}_1 = 20 \text{ N}$ darf man nicht schreiben. \vec{F}_1 ist ein Vektor und beinhaltet Betrag (Stärke) und Richtung. 20 N ist nur die Stärke. Man muss schreiben: $F_1 = 20 \text{ N}$. (F_1 ist die Bezeichnung für die Stärke des Kraftvektors \vec{F}_1 .)

Lösung zu Aufgabe 1.3

(a) $\vec{a} = \vec{v} = \vec{AB}$ (b) \vec{c} ist Gegenvektor von \vec{a} (c) Der Nullvektor $\vec{0} = \vec{AA}$. Er hat Betrag 0 und unbestimmte Richtung. Sein Gegenvektor ist wiederum $\vec{AA} = \vec{0}$

Lösung zu Aufgabe 1.4

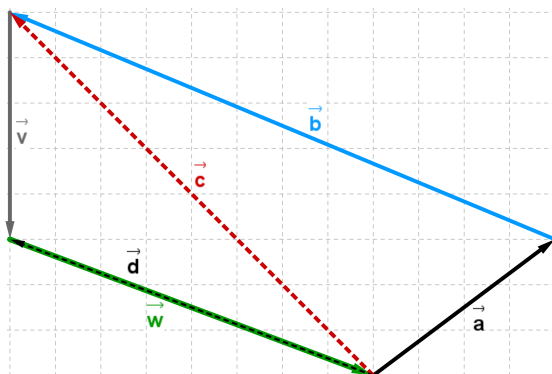


(a) Siehe Figur. $|\vec{OP}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ LE}$

(b) Siehe Figur. $|\vec{OQ}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ LE}$

(c) Siehe Figur.

Lösung zu Aufgabe 2.1



(a) Siehe Figur.

(b) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

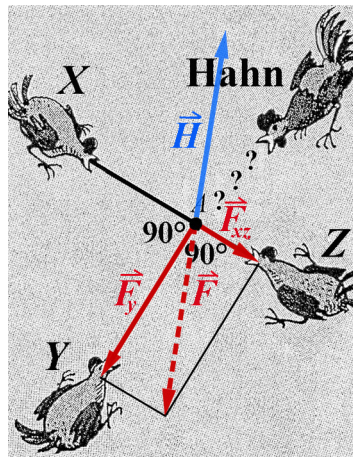
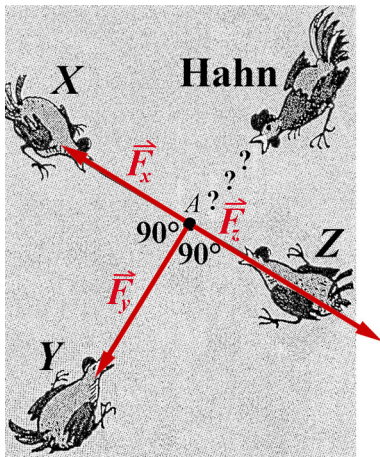
$|\vec{b}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$|\vec{c}| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$

Es ist $11.3 \approx |\vec{c}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}| = 5 + 13 = 18$

(c) Siehe Figur. \vec{d} ist Gegenvektor von \vec{w} .
 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ Nullvektor!

Lösung zu Aufgabe 2.2

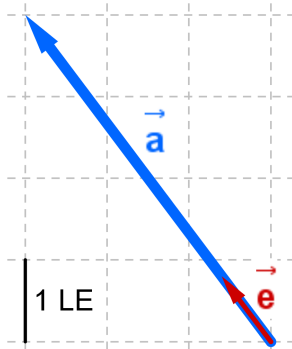


- (a) Siehe Figur links.
- (b) Siehe Figur rechts.
- $F_{xz} = F_z - F_x = 15\text{N} - 10\text{N} = 5\text{N}$
- (c) Siehe Figur rechts.
- $F = \sqrt{(12\text{N})^2 + (5\text{N})^2} = 13\text{N}$
- (d) Der Hahn muss die Kraft \vec{F} vektoriell ausgleichen: Die Kraft \vec{H} des Hahns zeigt in die entgegengesetzte Richtung von \vec{F} und hat gleiche Stärke $H = F = 13\text{N}$

Lösung zu Aufgabe 2.3

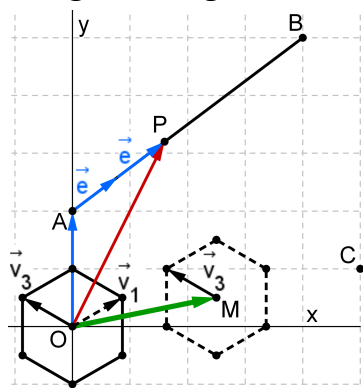
- (a) $\vec{OA} = \vec{a} + 2\vec{c}$ (b) $\vec{OB} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (c) $\vec{DA} = -4\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - 4\vec{b}$
- (d) $\vec{EC} = -5\vec{b} - 2\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} - 5\vec{b} - 2\vec{c}$

Lösung zu Aufgabe 2.4



- (a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- (b) Siehe Vektor $\vec{e} = \frac{1}{5}\vec{a}$ Figur links.
- (c) $|\frac{1}{5}\vec{a}| = \frac{1}{5}|\vec{a}| = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ Einheitsvektor!

Lösung zu Aufgabe 2.5



- (a) Es ist $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Für den Einheitsvektor \vec{e} in Richtung \vec{AB} ergibt sich: $\vec{e} = \frac{1}{5}\vec{AB}$, da $|\vec{AB}| = 5$. Also gilt gemäss Figur:
 $\vec{OP} = \vec{OA} + 2\vec{e} = \vec{OA} + 2 \cdot \frac{1}{5}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{AB}$
- (b) Es ist $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OC}$. Die Ortsvektoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_6$ zu den Eckpunkten des Sechsecks lauten (siehe Figur):
 $\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{OC} + \vec{v}_1, \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{OC} + \vec{v}_2, \dots, \vec{r}_6 = \frac{1}{2}\vec{OC} + \vec{v}_6$

Lösung zu Aufgabe 3.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3.2

- (a) $|\vec{a}| = 9$ (b) $|\vec{b}| = 9$ (c) $|\vec{c}| = 3$ (d) $|\vec{d}| = 13$ (e) $|\vec{F}| = F = 5\text{N}$

Lösung zu Aufgabe 3.3

$$(a) \vec{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (b) \text{ Es ist } |\vec{OP}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = 7$$

Für den Einheitsvektor \vec{e} von O in Richtung P ergibt sich somit $\vec{e} = \frac{1}{7} \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$

$$(c) \vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3.4

$$\text{Es ist } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Für den Einheitsvektor \vec{e} in Richtung \vec{AB} ergibt sich: $\vec{e} = \frac{1}{5} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$

$$\text{Also ist: } \vec{OP} = \vec{OA} + 3\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$