Serie 1

Abgabe: Bis Freitag, den 20. September, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68.

1. (a) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile sowie die Polarkoordinaten von

$$\frac{2\sqrt{2}i}{i-1}, \qquad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2009}, \qquad (1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \frac{6i-10}{4+i}.$$

2. Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

$$\frac{z^2+2iz-2+i}{z+i-1}, \qquad \frac{5z^3+(6-i)z^2+(1-2i)z+3-2i}{z+2iz+i}.$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$, $\lambda > 0$ sowie $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-b| = \lambda|z-a|\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass K genau dann einen Kreis beschreibt, wenn $\lambda \neq 1$ gilt. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius von K in diesem Fall.

   (b) Skizzieren Sie K im Fall $\lambda = 1$.

4. Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Kreisscheibe und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \qquad f(z) := i\frac{1+z}{1-z}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f wohldefiniert und bijektiv ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Formel für die inverse Funktion $f^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$.

   (c) Zeigen Sie, dass die gefundene Formel für f^{-1} aus (b) auch für alle reellen Zahlen wohldefiniert ist. Bestimmen Sie die Bildmenge $f^{-1}(\mathbb{R})$ der so auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion f^{-1}.

   (d) Schreiben Sie ein `Sage`-Skript, welches Ihre Aussage aus (c) für 100 zufällige reelle Zahlen aus dem Intervall $[-10^{-4}, 10^4)$ bis zu einer Präzision von 10^{-4} überprüft.

5. Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < 1\}$ und

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad g(z) := \frac{i - e^{\frac{\pi z}{2}}}{i + e^{\frac{\pi z}{2}}}.$$

   Bestimmen Sie die Bildmenge $g(\Omega)$.

6. Online-Fragen:

1. Sei z in der oberen Halbebene. Dann ist ...

(a) $\frac{1}{z}$ in der oberen Halbebene.

(b) $-\frac{1}{z}$ in der oberen Halbebene.

(c) $\overline{z}$ in der oberen Halbebene.

(d) $-\frac{1}{\overline{z}}$ in der oberen Halbebene.

2. Unter welcher Bedingung an ein komplexes Polynom P gilt, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$?

(a) Dies gilt immer.

(b) Dies gilt nie.

(c) Falls alle Koeffizienten von P reell sind.

(d) Falls P normiert ist, das heisst, dass der führende Koeffizient gleich 1 ist.

3. Die Folge $(z_n)_n$ mit $z_n = -1 + (-1)^n \frac{i}{n}$ konvergiert gegen -1. Sei φ_n das Argument von z_n mit $-\pi < \varphi_n < \pi$, und sei ψ_n das Argument von z_n mit $\frac{\pi}{2} < \psi_n < \frac{3\pi}{2}$. Welche der folgenden Aussagen über die Folgen (φ_n) und (ψ_n) ist korrekt?

(a) Beide Folgen (φ_n) und (ψ_n) konvergieren gegen π.

(b) Beide Folgen (φ_n) und (ψ_n) konvergieren nicht.

(c) Die Folge (φ_n) konvergiert nicht, aber (ψ_n) konvergiert gegen π.

(d) Die Folge (ψ_n) konvergiert nicht, aber (φ_n) konvergiert gegen π.