Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 26. November 2010** in der Vorlesung

1. Gegeben sind die drei Punkte $A = (-5, 3, 3)$, $B = (1, 5, 8)$ und $C = (7, 11, 9)$.

   a) Berechnen Sie $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{AB} \times \vec{BC}$, $\vec{w} = \vec{AC} \times \vec{BC}$

   b) Zeigen Sie, dass $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{AC} = 0$ gilt.

   c) Berechnen Sie die Längen der drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und interpretieren Sie das Ergebnis **geometrisch**.

2. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt eine **Lissajous-Kurve** γ (Figur 1):

$$\gamma : \; [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

   (Die nach dem frz. Physiker J. A. Lissajous benannten Figuren entstehen z. B. durch ein Pendel, das gleichzeitig in zwei zueinander senkrechte Richtungen schwingt. Die über den Sand streichende Pendelspitze zeichnet dann eine für das Frequenzverhältnis charakteristische Lissajous-Figur.)

   a) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Ursprung durchdringt.

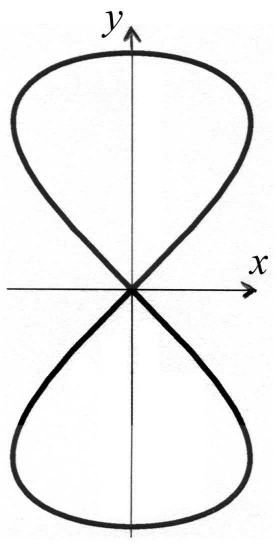
   b) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sie sich im Ursprung durchdringt.

   c) Berechnen Sie die Abszisse (den x-Wert) der beiden Punkte, die am weitesten rechts liegen. (Tipp: Welche Form hat dort der Tangentialvektor?)

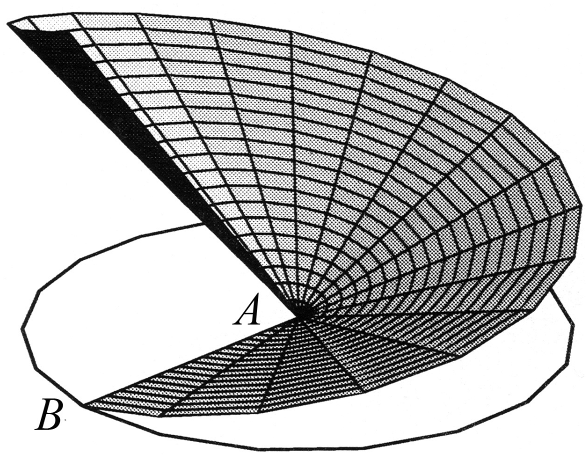
3. Figur 2 zeigt eine **kegelähnliche Fläche** S mit 'Spitze' A. Sie entsteht, wenn man eine (ausziehbare) Stange, welche stets durch die Spitze A geht, an einer Schraubenlinie entlangführt. Der Grundriss der Fläche ist ein Kreis vom Radius R, der Höhenunterschied ist h.

   a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche mit den Parametern φ und t.

   b) Was für Kurven sind die φ-Linien bzw. die t-Linien?



Figur 1 (Aufgabe 2)



Figur 2 (Aufgabe 3)

Übungsserie 2

4. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} 2t\cos\varphi \\ t \\ 2t\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -1.5 \le t \le 1.5)$$

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t=-1$, $t=1$, $t=0$ (Sonderfall). Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien?

   c) Skizzieren oder beschreiben Sie diejenige Kurve γ auf der Fläche S, für die $t=\varphi$ gilt $(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \approx 1.5)$ Berechnen Sie den Richtungsvektor, unter welchem γ durch den Ursprung $(0,0,0)$ geht.

5. Laut Agrarforschern liegt die Zukunft der Ernährung nicht im Boden, sondern im **Skyfarming**. In Gewächshochhäusern (Figur 3) soll dereinst über 20 Etagen Reis wachsen. Vorgesehen ist ein Transportband, in dessen kleinen Öffnungen Reisssämlinge wachsen. In 120 Tagen wandert die Pflanze auf einer Schraubenlinie im Uhrzeigersinn durch alle 20 Etagen auf 54 m Höhe.

   a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung, die der Fusspunkt einer Reisspflanze auf dem Transportband (mit 6 m Schraubenradius) beschreibt.

   b) Welche Strecke legt der Fusspunkt in 120 Tagen zurück?

6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Berechnen Sie ferner $\vec{s} \times \vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi, t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi, t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}\,(\varphi, t) = \begin{pmatrix} t+\cos\varphi \\ t+\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}\,(\varphi, t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos t \\ R\cos\varphi\sin t \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$

Figur 3 (Aufgabe 5)

1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ 5-3 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7-(-5) \\ 11-3 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 11-5 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-40 \\ 60-36 \\ 48-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-30 \\ 30-6 \\ 36-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 12 \\ 2 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & 6 \\ 2 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 12 & 6 \\ 8 & 6 \end{matrix}$$

(b) $$\vec{u} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -168 + 48 + 120 = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -336 + 192 + 144 = 0$$

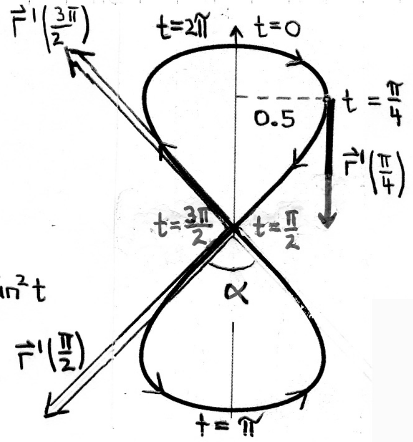
(c) $$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{(-28)^2 + 24^2 + 24^2} = \underline{\underline{44}}$$ Flächeninhalt des von $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ aufgespannten Parallelogramms

2

(a) $$\begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ oder } t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

in $x(t) = \sin t \cos t$: $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = 0$

d.h. $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Selbstdurchdringung!



(b) $x(t) = \underset{f}{\sin t}\,\underset{g}{\cos t}$, $\quad x'(t) = \underset{f'}{\cos t} \cdot \underset{g}{\cos t} + \underset{f}{\sin t}\,\underset{g'}{(-\sin t)} = \cos^2 t - \sin^2 t$

$y(t) = \cos t \qquad y'(t) = -\sin t$

Tangentialvektor: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei $t_1 = \frac{\pi}{2}$: $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, bei $t_2 = \frac{3\pi}{2}$: $\vec{r}\,'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Zwischenwinkel α:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0$$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$

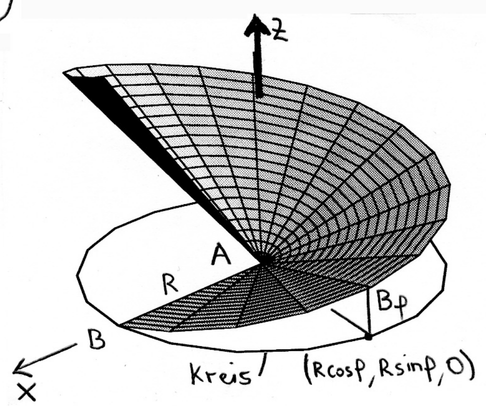
(c) $$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ -\sin t \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$ vertikal!

z.B. $\cos t = \sin t$

$\rightsquigarrow t = \frac{\pi}{4}$ (erraten oder $\| : \cos t \rightarrow 1 = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$)

$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

3



(a) x-Achse: durch A und B verlaufend, Ursprung in A

z-Achse: Schraubachse der Schraubenlinie

Dreht sich "B" einmal rundherum um die z-Achse, betragen die Verschiebung h und der Drehwinkel 2π; dementsprechend entspricht dem Drehwinkel ρ eine Verschiebung um $\frac{h}{2\pi}\rho$. Also gilt:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi &\;\hat{=}\; h \\ 1 &\;\hat{=}\; \frac{h}{2\pi} \\ \rho &\;\hat{=}\; \frac{h}{2\pi} \cdot \rho \end{aligned}\right.$$

$$B_\rho\left(R\cos\rho,\ R\sin\rho,\ \frac{h}{2\pi}\rho\right)$$

B_ρ beschreibt für $\rho = 0$ bis 2π eine Schraubenlinie!

Um eine Linie AB_ρ zu 'zeichnen' ist ein Parameter t nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec{r}$ auf der Linie AB_ρ gilt:

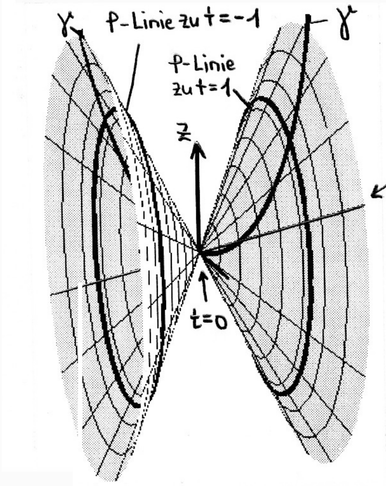
$$\vec{r} = \vec{OA} + t\,\vec{AB_\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} R\cos\rho - 0 \\ R\sin\rho - 0 \\ \frac{h}{2\pi}\rho - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tR\cos\rho \\ tR\sin\rho \\ t\,\frac{h}{2\pi}\rho \end{pmatrix}$$

Also: $$(\rho, t) \longmapsto \vec{r}(\rho, t) = \begin{pmatrix} tR\cos\rho \\ tR\sin\rho \\ \frac{h}{2\pi}\rho t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \rho \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1)$$

(b) ρ-Linien (t fest, ρ variiert): Schraubenlinien mit der z-Achse als Schraubachse, Radius t

t-Linien (ρ fest, t variiert): Geradenstücke (Mantellinien), durch A verlaufend

4 (a) ρ-Linie zu $t = \pm 1$: Kreis mit Mittelpt auf y-Achse bei $(0, \pm 1, 0)$ parallel zur (x,z)-Ebene mit Radius 2, ρ-Linie zu $t=0$: Punkt $(0,0,0)$



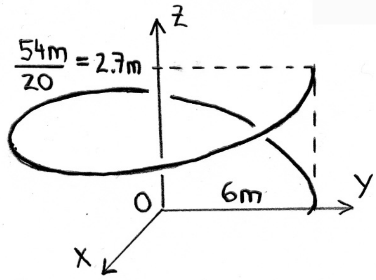
(b) t-Linien sind Geradenstücke durch $(0,0,0)$ verlaufend

(c) $\gamma: \vec{r}(\rho) \overset{t=\rho}{=} \begin{pmatrix} 2\rho\cos\rho \\ \rho \\ 2\rho\sin\rho \end{pmatrix} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad \vec{r}\,'(\rho) = \begin{pmatrix} 2\cos\rho + 2\rho(-\sin\rho) \\ 1 \\ 2\sin\rho + 2\rho\cos\rho \end{pmatrix}$

Schraubenlinie auf Kegeloberfläche!

$\vec{r}\,'(0) \underset{\rho=0}{=} \begin{pmatrix} 2+0 \\ 1 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5



In 120 Tagen 20 Etagen bzw. Umdrehungen $\rightarrow$ In 6 Tagen 1 Umdrehung

Winkel ρ bez. y-Achse: $\rho(t) = \frac{2\pi}{6d} t \quad (0 \leq t \leq 120\,d)$ $d \hat{=}$ days

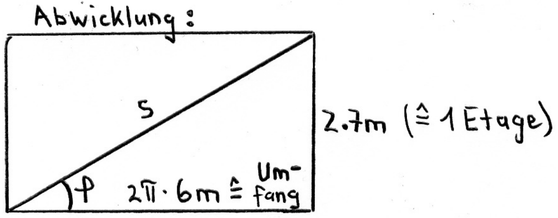
Höhe z bez. (x,y)-Ebene: $z(t) = \frac{54m}{120d} \cdot t = 0.45 \frac{m}{d} t$ (In 6 Tagen 2.7m $\hat{=}$ 1 Etage)

Der Radius ist konstant (Schraubenlinie!) sin $\leftrightarrow$ cos tauschen für Uhrzeigersinn:

(a) $\gamma: [0, 120d] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\rho(t) \\ r\cos\rho(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6d} t\right) \\ 6m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6d} t\right) \\ 0.45 \frac{m}{d} \cdot t \end{pmatrix}$

Abwicklung:

(b)



$s = \sqrt{2.7^2 + (2\pi \cdot 6)^2} = 37.8\,m$ pro Etage

Insgesamt $20 \cdot s = \underline{\underline{756\,m}}$

6 (a) $\begin{pmatrix} \cancel{-\frac{1}{2}R} \\ 0 \\ h/2\pi \\ -\frac{1}{2}R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ R \\ 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - R \cdot h/2\pi \\ 0 - 0 \\ -\frac{1}{2}R \cdot R - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi}Rh \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}}}$

(b) $\begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\rho_0} \\ R\cos\rho_0 \\ 0 \\ -R\sin\rho_0 \\ R\cos\rho_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\rho_0 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 1 \cdot (-R\sin\rho_0) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} R\cos\rho_0 \\ R\sin\rho_0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

(c) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -\sin\rho \\ \cos\rho \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-\sin\rho} \\ \cos\rho \\ 0 \\ -\sin\rho \\ \cos\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\rho - 0 \\ 0 - (-\sin\rho) \\ -\sin\rho - \cos\rho \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos\rho \\ \sin\rho \\ -\sin\rho - \cos\rho \end{pmatrix}}}$

(d) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -R\sin\rho\cos t \\ -R\sin\rho\sin t \\ R\cos\rho \end{pmatrix},\ \vec{t} = \begin{pmatrix} -R\cos\rho\sin t \\ R\cos\rho\cos t \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\rho\cos t} \\ -R\sin\rho\sin t \\ R\cos\rho \\ -R\sin\rho\cos t \\ -R\sin\rho\sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{-R\cos\rho\sin t} \\ R\cos\rho\cos t \\ 0 \\ -R\cos\rho\sin t \\ R\cos\rho\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\rho\cos t \\ -R^2\cos^2\rho\sin t \\ {*}\ -R^2\sin\rho\cos\rho \end{pmatrix}$

$*\ -R^2\sin\rho\cos\rho\cos^2 t - R^2\sin\rho\cos\rho\sin^2 t = -R^2\sin\rho\cos\rho\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}$