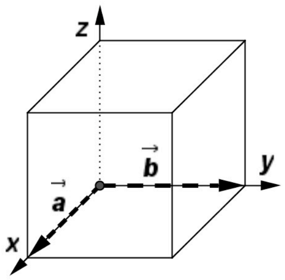
Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 16. November 2007** in der Vorlesung

1. Gegeben ist der nebenan abgebildete **Würfel** mit der Kantenlänge 1.
   a) Übertragen Sie die Abbildung in Ihre Unterlagen und zeichnen Sie die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{w} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ ein. (Längen beachten!)

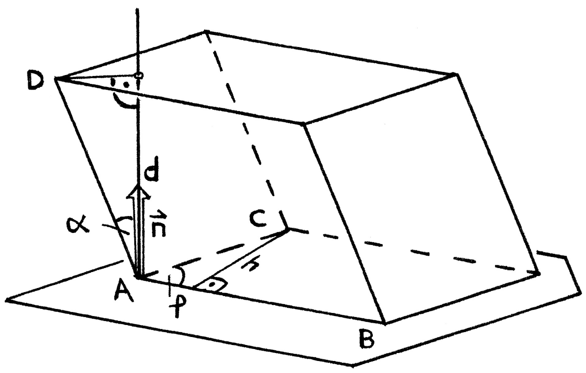


   b) Um den Würfel wirklichkeitsgetreuer darzustellen, denken wir ihn uns von parallelen Sonnenstrahlen beleuchtet. Nach dem so genannten LAMBERTschen Gesetz ist die **Helligkeit** H einer beleuchteten Fläche proportional zum Kosinus des Licht-Einfallswinkels (gemessen bezüglich dem Einfallslot): $0 \leq H \leq 1 = 100\ \%$

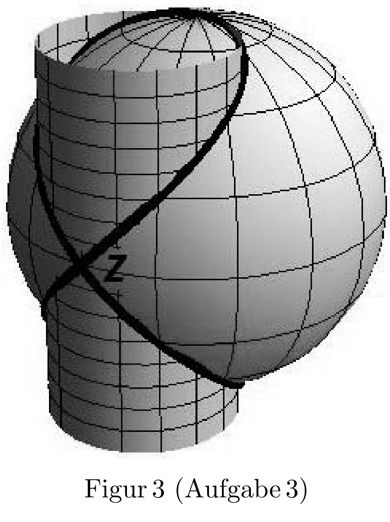
   100 % $\hat{=}$ senkrechtes Auftreffen Mit dieser einfachen Methode lassen sich erstaunlich gute Bilder erstellen. Für realistischere Darstellungen müssen auch Oberflächenbeschaffenheit, Farbe, ... berücksichtigt werden.
   Die Lichtrichtung sei $\vec{v} = (-2; -1; -2)$. Berechnen Sie die Helligkeit der drei direkt beleuchteten Würfelflächen in Prozent.

2. Das räumliche Analogon des Parallelogramms heisst **Parallelepiped** oder Spat (Figur 2). Zeigen Sie durch geometr. Interpretation des Skalar- und Vektorprodukts, dass für das Volumen V des durch die Punkte A, B, C, D gegebenen Parallelepipeds gilt: $V = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$
   Allgemein gilt: $V = |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$. Der Ausdruck $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$ heisst Spatprodukt.

3. Figur 3 zeigt die **Viviani-Kurve** benannt nach ihrem Entdecker VINCENZO VIVIANI (ital. Mathematiker, 1622-1703). Sie ist gegeben durch $\gamma:\ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
   a) 'Erraten' Sie die t-Werte und den Punkt Z, in dem sich die Kurve selbst durchdringt.
   b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ vom Koordinatenursprung den Abstand 1 hat. (D.h. der Kurvenpunkt liegt auf der abgebildeten Einheitskugel K! Ähnlich lässt sich zeigen, dass der Kurvenpunkt auch auf dem abgebildeten Zylinder mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt. Damit ist gezeigt, dass die oben gegebene Viviani-Kurve als Schnittkurve von Kugel K und Zylinder aufgefasst werden kann.)
   c) Skizzieren Sie sorgfältig Grundriss γ' und Seitenriss $\tilde{\gamma}$ (Projektion auf die (x, z)-Ebene) der Kurve γ. (Umriss der Einheitskugel K und jeweilige Koordinatenachsen als Orientierungshilfe eintragen) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\tilde{\gamma}$? (Rechnerische Begründung)
   d) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Punkt Z rechtwinklig durchdringt.



Figur 2 (Aufgabe 2)



Figur 3 (Aufgabe 3)

Übungsserie 2

4. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \; (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} t + \cos\varphi \\ t + \sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < t < \infty)$$

   a) Übertragen Sie Figur 4 in Ihre Unterlagen und skizzieren Sie die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?

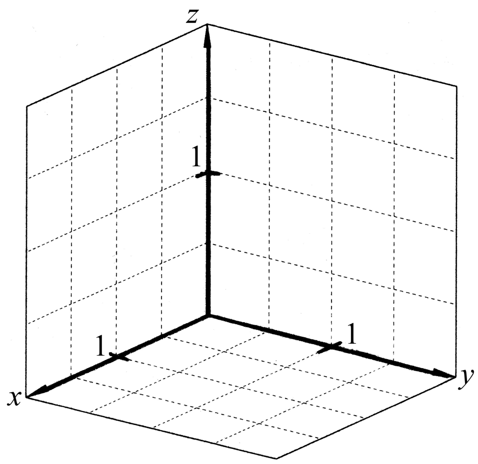
   b) Welchen Winkel schliesst die t-Linie zu $\varphi = 0$ mit der z-Richtung ein?

   c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

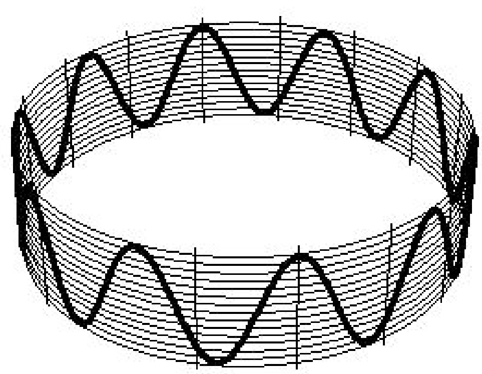
5. Figur 5 zeigt einen **Ring** von 6 [mm] Breite und 20 [mm] Durchmesser mit einer „Lebenslinie“.

   a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine mögliche Parameterdarstellung der hervorgehobenen Lebenslinie.

   b) Wird eine Strecke variierbarer Länge, welche mit dem einen Endpunkt fest im Ringzentrum ruht, mit ihrem anderen Endpunkt der Lebenslinie entlanggeführt, überstreicht sie eine Fläche S. Bestimmen Sie eine mögliche Parameterdarstellung dieser „Kronenfläche“ S.

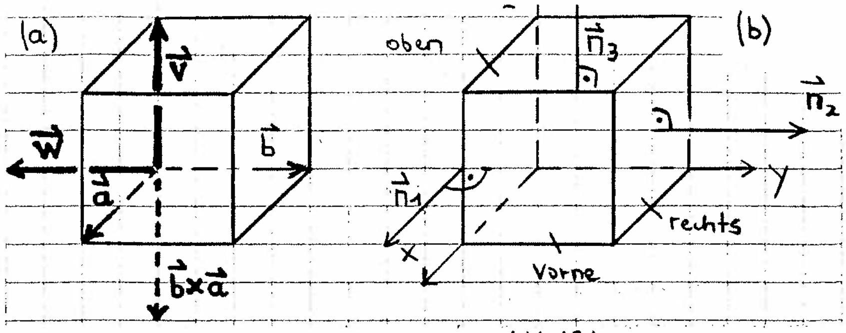


Figur 4 (Aufgabe 4)


Figur 5 (Aufgabe 5)

6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Berechnen Sie ferner $\vec{s} \times \vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}(\varphi, t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}(\varphi, t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} t + \cos\varphi \\ t + \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos t \\ R\cos\varphi\sin t \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$



1 (a) $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$; Richtung 3-Finger Regel

Länge: $|\vec{v}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$

$\vec{w} \perp \underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})}, \vec{a}$; Richtung gemäss 3-F-R

$= -\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{v}$

Länge: $|\vec{w}| = |-\vec{v}|\cdot|\vec{a}|\sin 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$

(oder $\vec{v}, \vec{w}$ mithilfe Komponenten ausrechnen)

(b) Direkt beleuchtet werden die Flächen (vgl. Figur) vorne, rechts, oben. Das Einfallslot hat dann die Richtung von $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Vorne: $\cos(\alpha_1) = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{v}}{|\vec{n}_1||\vec{v}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3} \approx 0.67$, $\underline{\underline{67\%}}$

analog rechts: $\underline{\underline{33\%}}$, analog oben: $\underline{\underline{67\%}}$

---

2 $$V \overset{?}{=} \underbrace{(\vec{AB}\times\vec{AC})}_{\substack{\text{Vektor mit}\\ \text{Richtung } \vec{n}:\\ \sim\vec{n}}} \underset{\substack{\text{Skalar-}\\ \text{prod}}}{\cdot} \vec{AD} \overset{\text{geom. Interpret.}}{=} \underbrace{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}_{\sim\vec{n}} \cdot \overbrace{\underbrace{|\vec{AD}|\cos\alpha}_{\substack{=d \text{ (Höhe Spat)}\\ \text{im } \perp \Delta DAH}}}^{\text{Winkel zw } \vec{n}, \vec{AD}} = \underset{\substack{\text{Vektor-}\\ \text{prod}}}{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}\cdot d \overset{\text{geom. Interpret.}}{=} \underbrace{F_{\#}}_{\substack{\text{Flächeninhalt des } \#\\ \text{von } \vec{AB} \text{ und } \vec{AC}}}\cdot d = \text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe} = \underline{\underline{V}}$$

---

3 (a) Vermutung $\underline{\underline{z = (1,0,0)}}$: $\underline{t=0} \rightsquigarrow \vec{r}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{t=\pi} \rightsquigarrow \vec{r}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ✓

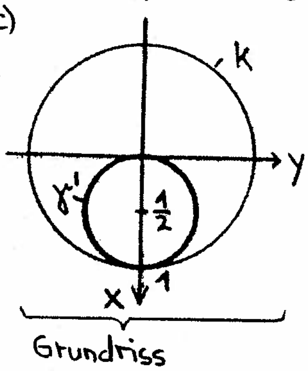
$x(t) = \cos^2(t)$
$y(t) = \sin t\cos t$
$z(t) = \sin t$

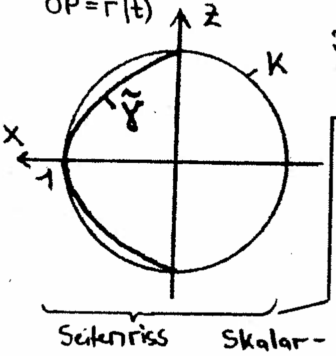
(Idee: Kurve scheint symmetrisch, $z(t) = \sin t$ von -1 (unten?) bis 1 (oben?) $\to$ Mitte: $\underline{\underline{z=0}}$)

(b) Abstand von $(0,0,0)$:

$$\left|\underbrace{\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{\vec{P}} - \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{O}}\right| = \left|\underbrace{\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{\vec{OP} = \vec{r}(t)}\right| = \sqrt{\cos^4 t + \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t + \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}} = \sqrt{\cos^4 t + \cos^2 t - \cos^4 t + 1 - \cos^2 t} = \underline{\underline{1}}$$

(c)





$\tilde{\gamma}$ ist eine $\underline{\underline{\text{Parabel}}}$: $x(t) = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - z(t)^2$

$\underline{x = 1 - z^2}$

(d) $$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix}2\cos t(-\sin t)\\ \cos t\cos t + \sin t(-\sin t)\\ \cos t\end{pmatrix} \begin{matrix}\leftarrow \text{Kettenregel}\\ \leftarrow \text{Produktregel}\\ \\ \end{matrix}$$

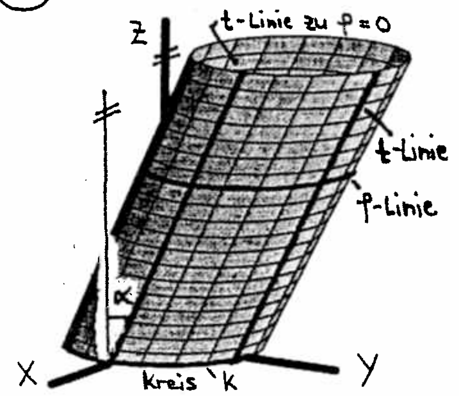
$t = 0 \longrightarrow \vec{r}'(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $t = \pi \longrightarrow \vec{r}'(\pi) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ Tangentialvektoren in z für $t = 0$ und π

Skalarprodukt: $\underbrace{\vec{r}'(0)}_{\neq\vec{0}}\cdot\underbrace{\vec{r}'(\pi)}_{\neq\vec{0}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 + 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$

$\rightsquigarrow \vec{r}'(0) \perp \vec{r}'(\pi)$

---

4 (a) Schiefer Zylinder: t-Linien: Geraden, φ-Linien: (horizontale) Kreise



(b) t-Linie zu $\varphi = 0$: $t \longmapsto \vec{r}(0,t) = \begin{pmatrix}t + \cos 0\\ t + \sin 0\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+1\\ t\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \leftarrow$ Richtung

z-Richtung: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot 1} \approx 0.57735 \rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha \approx 54.7356^\circ}}$

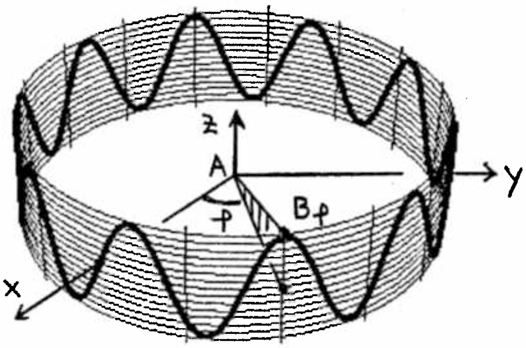
(c) $x = t + \cos\varphi$, $y = t + \sin\varphi$; $z = t$ in x und y einsetzen

$x - z = \cos\varphi$, $y - z = \sin\varphi$ $\rightsquigarrow \underline{\underline{(x-z)^2 + (y-z)^2}} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \underline{\underline{1}}$

5 (a) Koordinatensystem: z-Achse = Ringachse, Ursprung im Ringzentrum, Lebenslinie "beginnt" auf x-Achse

Der Grundriss der Linie ist ein Kreis mit Radius 10 [mm]

$$\rightsquigarrow \quad \varphi \longmapsto \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}10\cos\varphi\\10\sin\varphi\\z(\varphi)\end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ \text{(Drehwinkel)}$$



$z(\varphi)$ oszilliert sinusförmig zw. -3 [mm] und $+3$ [mm], und zwar 10-mal für φ von 0 bis 2π: $z(\varphi) = 3\sin(10\varphi)$

$$\text{Leb'linie: } [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}10\cos\varphi\\10\sin\varphi\\3\sin(10\varphi)\end{pmatrix}$$

(b) A ist fest. Um eine Linie AB_φ zu "zeichnen" ist ein Parameter t nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec r$ auf der Linie AB_φ gilt: $\vec r = \vec{OA} + t\,\vec{AB_\varphi} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\cos\varphi - 0\\10\sin\varphi - 0\\3\sin(10\varphi) - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10t\cos\varphi\\10t\sin\varphi\\3t\sin(10\varphi)\end{pmatrix}$

$$\text{Also:} \quad (\varphi, t) \longmapsto \vec r(\varphi,t) = \begin{pmatrix}10t\cos\varphi\\10t\sin\varphi\\3t\sin(10\varphi)\end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1)$$

---

6 (a)

$$\begin{pmatrix}\cancel{-\frac12 R}\\0\\h/2\pi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{0}\\R\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 - R\cdot h/2\pi\\0-0\\-\frac12 R\cdot R - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2\pi}Rh\\0\\-\frac12 R^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}-\frac12 R & \quad 0\\0 & \quad R\end{matrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix}\cancel{-R\sin\varphi_0}\\R\cos\varphi_0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{0}\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\varphi_0\cdot 1 - 0\\0 - 1\cdot(-R\sin\varphi_0)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos\varphi_0\\R\sin\varphi_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}-R\sin\varphi_0 & \quad 0\\R\cos\varphi_0 & \quad 0\end{matrix}$$

(c) $\vec s = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix}$, $\vec t = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec s \times \vec t = \begin{pmatrix}\cancel{-\sin\varphi}\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{1}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi - 0\\0-(-\sin\varphi)\\-\sin\varphi - \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\-\sin\varphi - \cos\varphi\end{pmatrix}$

$$\begin{matrix}-\sin\varphi & \quad 1\\\cos\varphi & \quad 1\end{matrix}$$

(d) $\vec s = \begin{pmatrix}-R\sin\varphi\cos t\\-R\sin\varphi\sin t\\R\cos\varphi\end{pmatrix}$, $\vec t = \begin{pmatrix}-R\cos\varphi\sin t\\R\cos\varphi\cos t\\0\end{pmatrix}$, $\vec s \times \vec t = \begin{pmatrix}\cancel{-R\sin\varphi\cos t}\\-R\sin\varphi\sin t\\R\cos\varphi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{-R\cos\varphi\sin t}\\R\cos\varphi\cos t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R^2\cos^2\varphi\cos t\\-R^2\cos^2\varphi\sin t\\ * \ -R^2\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}$

$$\begin{matrix}-R\sin\varphi\cos t & \quad -R\cos\varphi\sin t\\-R\sin\varphi\sin t & \quad R\cos\varphi\cos t\end{matrix}$$

$$* \quad -R^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2 t - R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2 t = -R^2\sin\varphi\cos\varphi\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}$$