Musterlösungen zu Serie 9

1. Verwenden Sie folgende Facts aus der Vorlesung.

·) Eine (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$, wobei $ad - bc = \det(A)$ genau dem Wert der Determinante entspricht.

·) Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\det A)\ E_2.$$

·) Eine $(n \times m)$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A quadratisch ist (i.e. $n = m$) **und** der Gauss-Algorithmus bringt A auf obere Dreiecksform mit nicht trivialen Diagonaleinträgen (i.e. $\neq 0$).

a) Wir erhalten für $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{6+4} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

und für $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer $n \times n$-Matrix A für $n \geq 3$ berechnet sich am einfachsten wie folgt:

- Schreibe A und die $n \times n$-Einheitsmatrix E_n nebeneinander: $(A \mid E_n)$.
- Wende auf die resultierende $n \times 2n$-Matrix Zeilenoperationen an, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht: $(E_n \mid \cdots)$.

Bitte wenden!

- Auf der rechten Seite steht dann die Inverse A^{-1} von A: $(E_n \mid A^{-1})$

b) Mit obigem Schema erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Es sind

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-2+0 & -6+6+0 & -6+6+0 \\ -2+0+2 & 4+0-3 & 4+0-4 \\ 3-1-2 & -6+3+3 & -6+3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ AA^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+4-6 & 2+0-2 & 0-2+2 \\ -3-6+9 & -2+0+3 & 0+3-3 \\ 0-2+2 & 0+3-3 & 0-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Es gilt $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Verwenden Sie wieder die Facts aus Aufgabe 1.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass $ad - bc = 1$ und $A^{-1} = A$, das heisst

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $b = 0, c = 0$ und $a = d$.
Die Bedingung $ad - bc = a^2 = 1$ impliziert, dass entweder $a = d = 1$ oder $a = d = -1$.
Das heisst, es gibt genau zwei Möglichkeiten, entweder $A = E_2$ oder $A = -E_2$.
Überprüfen Sie, dass diese Matrizen die gewünschten Eigenschaften erfüllen.

b) Unterscheiden Sie die beiden Fälle $a \neq 0$ und $a = 0$. Sei zuerst $a \neq 0$ und wenden Sie den Gauss-Algorithmus an.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I:(-a)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{III+b\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & a & b \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \overset{II:a}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \overset{III+c\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Und schliesslich wenn $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen liefert der Gauss-Algorithmus eine Matrix mit einem Nulleintrag auf der Diagonalen. Das heisst, die Matrix ist nie invertierbar, egal was für Werte a, b und c annehmen.

<u>Alternative</u>: Verwenden Sie

Eine Matrix M ist invertierbar genau dann, wenn $\det M \neq 0$.

Berechnen Sie die Determinante mit dem Laplace-Verfahren (Entwicklung nach der ersten Spalte),

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} =& 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} \\ & + (-b)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ =& 0 + a\,(a \cdot 0 - (-c)b) + (-b)\,(ac - 0 \cdot b) = abc - abc = 0, \end{aligned}$$

Bitte wenden!

das heisst die Matrix ist nicht invertierbar.

c) (i) A ist invertierbar genau dann, wenn alle Diagonaleinträge (a, d, f) ungleich 0 sind.

(ii) Wie in (i): genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

(iii) Ja, A^{-1} ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. Im Algorithmus zur Ermittlung der Inversen werden nur folgende Operationen verwendet:

·) Division einer Zeile durch ein Skalar

·) Subtraktion eines Vielfachen der j-ten Zeile von der i-ten Zeile, wobei j>i.

Die Anwendung dieser Operationen auf A ergibt wieder eine obere Dreiecksmatrix.

(iv) Wie bei (ii): genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

3. **a)** Dies ist **kein** Unterraum, da W den Nullvektor nicht beinhaltet.

b) Dies ist **kein** Unterraum, da W zwar den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ beinhaltet, aber nicht den Vektor $(-1)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) Dies ist ein Unterraum, denn W ist auch $W = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, das Bild der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass das Bild einer Matrix einen Unterraum bildet.

Alternativ: $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Um den Nullraum zu bestimmen, ermitteln wir mit dem Gauss-Algorithmus die Stufenform der jeweiligen Matrizen. Dann können wir die Dimension des Nullraumes bestimmen, resp. die Anzahl freier Parameter.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat Rang 2 also ist ein Paramteter frei (in der letzten Spalte gibt es keine "umkreiste" Komponente). Daher ist der Nullraum der Matrix 1-dimensional. Betrachtung der Matrix in Stufenform liefert, dass ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ im Nullraum ist, wenn $y = z$ und aus der ersten Zeile muss dann $x = -y + 2z$ also auch $x = y = z$. Der Nullraum ist also

$$\{\,(t,t,t)|\ t \in \mathbb{R}\}\,.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat Rang 3 und insbesondere keinen freien Parameter. Daher ist der Nullraum trivial $\{(0,0,0)\}$.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat Rang 2 mit einem freien Parameter. Daher ist der Nullraum 1-dimensional. Betrachtung der Stufenform liefert, dass ein Vektor (x,y,z) im Nullraum ist, wenn $y = z$ und $x = -y - 2z$ also $x = -3y = -3z$. Der Nullraum ist also gegeben durch

$$\{\,(-3t,t,t)|\ t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Bitte wenden!

d)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\0&2&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-3\\0&2&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat Rang 3 und keinen freien Parameter. Also ist der Lösungsraum trivial, $\{(0,0,0)\}$.

5. **a)** Diese Vektoren sind linear unabhängig, da die zwei Vektoren nicht kollinear sind und darum keiner von beiden überflüssig ist.

b) Diese Vektoren sind linear abhänig, da der Nullvektor immer überflüssig ist $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}\right)$.

c) Diese Vektoren sind linear abhängig. Da wir drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ haben (und wir wissen, dass $\mathbb{R}^2$ von genau zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird) muss mindestens einer der drei Vektoren überflüssig sein. Eine direkte Berechnung zeigt, dass

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

d) Man sieht leicht, dass $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist. Jedoch gilt

$$\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

und somit ist $\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$ überflüssig. Also sind diese Vektoren linear abhängig.

e) Diese Vektoren sind linear unabhängig. Man sieht direkt, dass die ersten zwei Vektoren unabhängig sind. Der Gauss-Algorithmus auf die Matrix, die in den Spalten die gegebenen Vektoren hat, liefert

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat vollen Rang. Daher ist kein Vektor überflüssig und somit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Siehe nächstes Blatt!

f) Diese Vektoren sind linear abhängig. Man wendet wieder den Gauss-Algorithmus auf die Matrix mit den Vektoren in den Spalten an:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&7\\1&4&10\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&6\\0&3&9\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

diese Matrix hat Rang 2 und in der letzten Spalte keine "umkreiste" Komponente, respektive der dritte Vektor lässt sich als Linearkombination der beiden anderen Vektoren schreiben:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\\10\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

6. Verwenden Sie folgenden Fact aus der Vorlesung. Für eine $(n \times n)$-Matrix M ist äquivalent

- ·) M ist invertierbar.
- ·) $\det(M) \neq 0$.
- ·) Die Spalten von M bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- ·) Die Zeilen von M bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- ·) Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert (Stufenform) hat keine 0 auf der Diagonalen stehen.

a) Schreiben Sie die Vektoren in die Spalten einer Matrix wenden Sie den Gaussalgorithmus an

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&-2\\1&1&4&4\\1&-1&8&-8\end{pmatrix} \overset{II,III,IV-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&3&3\\0&-2&7&-9\end{pmatrix} \overset{IV-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&3&3\\0&0&6&-6\end{pmatrix}$$

$$\overset{IV-2III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&3&3\\0&0&0&-12\end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat keine 0 auf der Diagonalen stehen, d.h. die ursprüngliche Matrix ist invertierbar und somit bilden die Vektoren in der Tat eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Bitte wenden!

Bemerkung: Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert hat Determinante

$$\det = 1(-2)3(-12) = 72$$

gemäss der Eigenschaften der Determinante, dies ist derselbe Wert der Determinante der ursrpünglichen Matrix.

Alternative: berechnen Sie die Determinante der Matrix mit Hilfe des Laplace-Verfahren und überprüfen Sie ob diese $\neq 0$.

b) Wie vorher, schreiben Sie die Vektoren in die Spalten einer Matrix und wenden Sie den Gauss-Algorithmus an,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{IV-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & k-1 \end{pmatrix} \overset{IV-3II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & k-13 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV-4III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-29 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert hat genau dann eine 0 auf der Diagonalen, wenn $k - 29 = 0$. Das heisst wie vorhin, die Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$, wenn $k \neq 29$.

7. **a)** Dazu müssen wir die Eigenschaften eines Unterraumes überprüfen.

·) Der Nullvektor ist in $V^\perp$ enthalten, denn $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ für alle $\vec{v}$ in V.

·) Seien $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ in $V^\perp$, dann

$$(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \cdot \vec{v} = \vec{w}_1 \cdot \vec{v} + \vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0$$

für alle $\vec{v}$ in V, so dass $(\vec{w}_2 + \vec{w}_2)$ ebenfalls in $V^\perp$ ist.

·) Sei $\vec{w}$ in $V^\perp$ und k eine beliebige Konstante, dann

$$(k\vec{w}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{w} \cdot \vec{v}) = k \cdot 0 = 0$$

für alle $\vec{v}$ in V, daraus folgt, dass $k\vec{w}$ sich ebenfalls in $V^\perp$ befindet.

b) Wir suchen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x + 2y + 3z = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Diese Vektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei s, t in $\mathbb{R}$.
In der Tat, die Gleichung $x + 2y + 3z = 0$ definiert eine Bedingung in einem 3-dimensionalen Raum (3 Unbekannte). Der Lösungsraum ist dann 2-dimensional, das heisst, es gibt zwei Freiheitsgrade. Sei zum Beispiel $z = t$ und $y = s$ für t, s beliebige Zahlen in $\mathbb{R}$. Dann folgt aus der Gleichung, dass $x = -2s - 3t$, woraus die obige Form (1) folgt.

Schlussendlich können wir aus (1) ablesen, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $L^{\perp}$ bilden.