Serie 3

1. Wir haben die Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ kombinatorisch als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge definiert, für $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$. Beweisen Sie die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

2. Finden und skizzieren Sie in der komplexen Ebene alle Lösungen der Gleichungen

a) $z^6 = -8$, in der Polarform (re^{it}) und in der Form $a + bi$.

b) $z^4 = 1 + i$, in der Polarform.

3. Skizzieren Sie die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$,

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} : \dfrac{|z+2-2i|}{|z+i| = 2}\right\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$,

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| \geq 1 \text{ und } |z-1-i| < 4\}$,

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z-i+3| \geq |z+2i| \text{ und } \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

4. (a) Gegeben sind Mengen X und Y. Zeigen Sie, dass $X \cap Y = X$ gilt genau dann, wenn $X \subset Y$.

(b) Zeigen Sie, dass für eine Menge Z und Teilmengen X und Y von Z gilt

$$Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y) \quad \text{und} \quad Z \setminus (X \cap Y) = (Z \setminus X) \cup (Z \setminus Y).$$

(c) Sei $N \geq 1$ eine natürliche Zahl. Beschreiben Sie als Kombination von der Vereinigung und Durchschnitt die Menge der natürlichen Zahlen n sodass $1 \leq n \leq N$ und n *nicht* durch 2 oder 3 oder 5 oder 7 oder 11 teilbar ist.

5. Gegeben ist eine Menge Z und Teilmengen X_1, X_2 und X_3 von Z. Beschreiben Sie die Teilmenge V von Z in Termen von Mengen X_1, X_2 und möglicherweise X_3, wobei

(a) x genau dann zu V gehört, wenn x in X_1 oder X_2, aber nicht in beiden Mengen enthalten ist.

(b) x genau dann zu V gehört, wenn x in genau einer der Mengen X_1, X_2 oder X_3 enthalten ist.

(c) x genau dann zu V gehört, wenn x in genau zwei der Mengen X_1, X_2 oder X_3 enthalten ist.

6. Für jede Menge $A \subset \mathbb{N}$, wir definieren die charakteristische Abbildung $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, wobei

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$ und $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$.

(b) Für welche Mengen A, B gilt $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$?