1.1. Induktionsbeweise

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\forall x > -1 \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(c) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie!

Behauptung. *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis. Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen.

Wir nehmen eine beliebige Ansammlung von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so verbleiben k Pferde, die gemäss $P(k)$ alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so verbleiben wieder k Pferde, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie beim ersten Mal sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe.

Damit gilt $P(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

1.2. nochmal Induktion

(a) Wir betrachten die Folge

$$1, \qquad 2^2 - 1^2, \qquad 3^2 - 2^2 + 1^2, \qquad 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2, \qquad \ldots$$

Finden Sie eine explizite Formel für den allgemeinen Term und beweisen Sie die Gültigkeit mit vollständiger Induktion.

(b) Beweisen Sie folgende Identität mit vollständiger Induktion.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1.3. Negationen

(a) Von vier Verdächtigen für einen Raub macht jeder eine Aussage bei der Polizei.

- Alfons: Claus ist es gewesen.
- Boris: Ich war es nicht.
- Claus: Dieter war es.
- Dieter: Claus hat gelogen.

Man weiss, dass genau einer der vier der Täter ist.

Wenn genau eine der Aussagen wahr ist, wer ist es dann gewesen?

Wer ist der Schuldige, wenn genau eine Aussage falsch ist?

(b) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Schreiben Sie die Negation der folgenden Aussage mit den Quantoren $\forall$, $\exists$:

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k : f(n) \leq \tfrac{1}{2}.$$

1.4. De Morgansche Gesetze (schriftlich) Seien A und B Teilmengen einer Menge X. Wir schreiben $A, B \subset X$. Das *Komplement* von A ist definiert als

$$A^{\mathsf{c}} := X \setminus A = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}.$$

(a) Zeigen Sie

$$(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}},$$
$$(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}.$$

(b) Allgemeiner sei J eine beliebige Menge von (möglicherweise unendlich vielen) Indizes. Zu jedem Index $i \in J$ sei eine Teilmenge $A_i \subset X$ gegeben. Beweisen Sie

$$\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{i \in J} A_i^{\mathsf{c}} \quad \text{und} \quad \left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i \in J} A_i^{\mathsf{c}}.$$

Verwenden Sie die entsprechenden Regeln der Aussagenlogik. *Hinweis:*

$$\bigcap_{i \in J} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in J : x \in A_i\}.$$

```
die zwei Gemütszustände eines Programmierers:
   1. ICH BIN GOTT;
   0. ich hab keine Ahnung, was ich hier mache
```

 Abgabe bis 24. September 2015.