Kapitel 5

Zentralprojektion und Rekonstruktion

5.1 Zentralprojektion

(s. LEO S.213)

in Abschnitt 1.1.2 der Einleitung wurden wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert (s. Abb. 5.1).

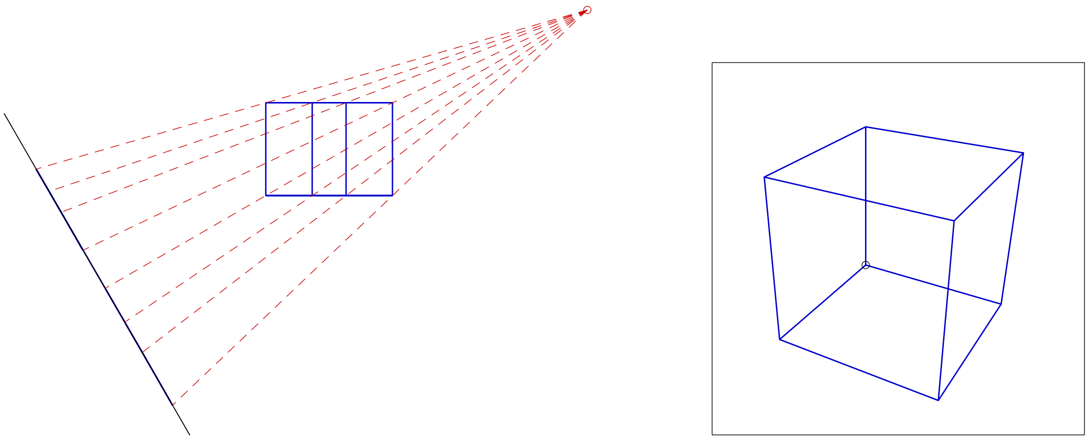


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man ein so entstandenes Bild mit **ein**em Auge und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion. Eine gute Kenntnis des Prinzips und der Eigenschaften einer Zentralprojektion ist auch für die in der Praxis wichtige Aufgabe der **Rekonstruktion** (s. Abschnitt 5.6) nötig. Dabei versucht man anhand einer Photographie auf die wahren Abmessungen eines Gegenstandes zu schließen.

5.1.1 Definitionen zur Zentralprojektion

Bezeichnungen:

O	:	**Augpunkt**
π	:	**Bildtafel**
H	:	**Hauptpunkt** (Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel. Bei Original–Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes.
d	:	**Distanz** (Abstand Augpunkt – Hauptpunkt)
π_1	:	**Standebene** (Grundrissebene)
s	:	**Standlinie** Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel)
h	:	**Horizont** (Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel.
	:	Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.)
π_v	:	**Verschwindungsebene** (Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.)

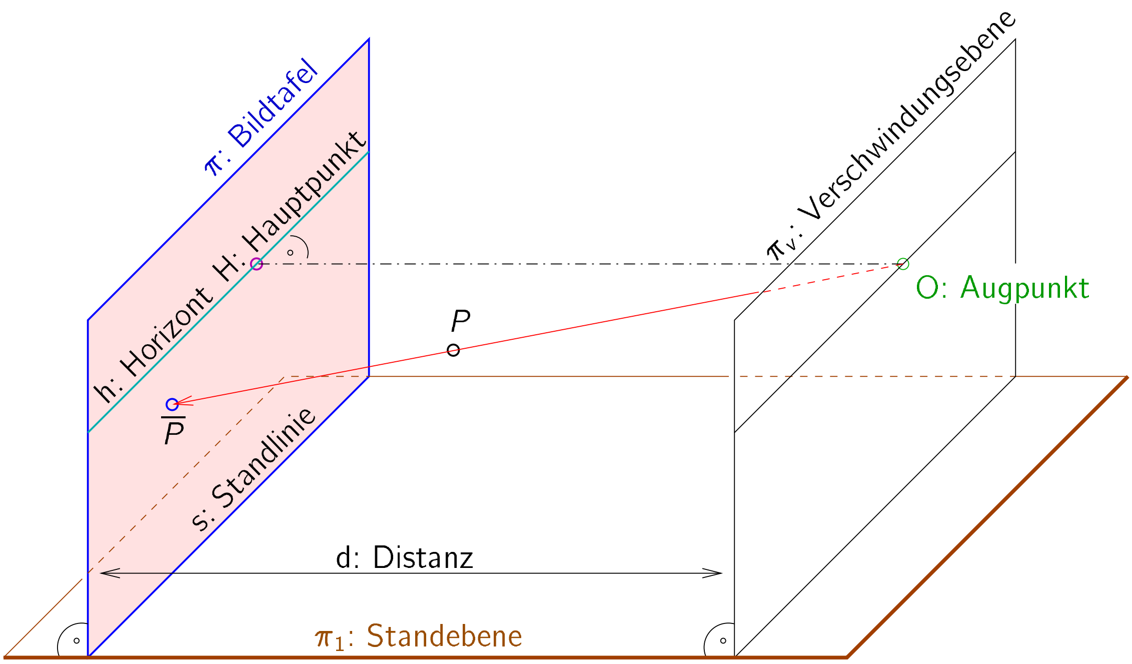


Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Das Bild, das durch Zentralprojektion entsteht, nennt man auch **perspektives Bild**.
Punkte in der Verschwindungsebene haben kein perspektives Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen.
Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.
Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse O-H, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

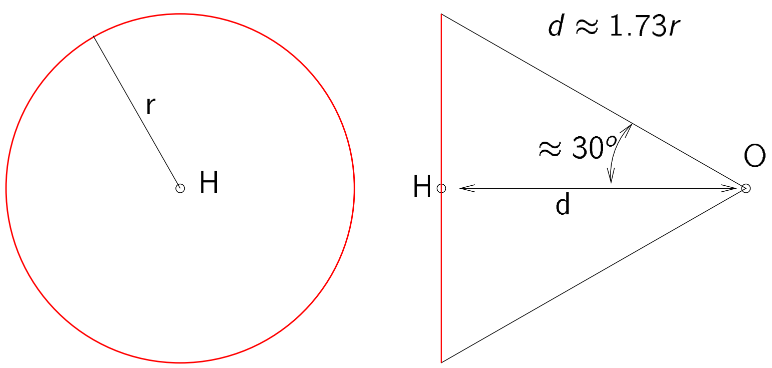


Abbildung 5.3: Sehkreis

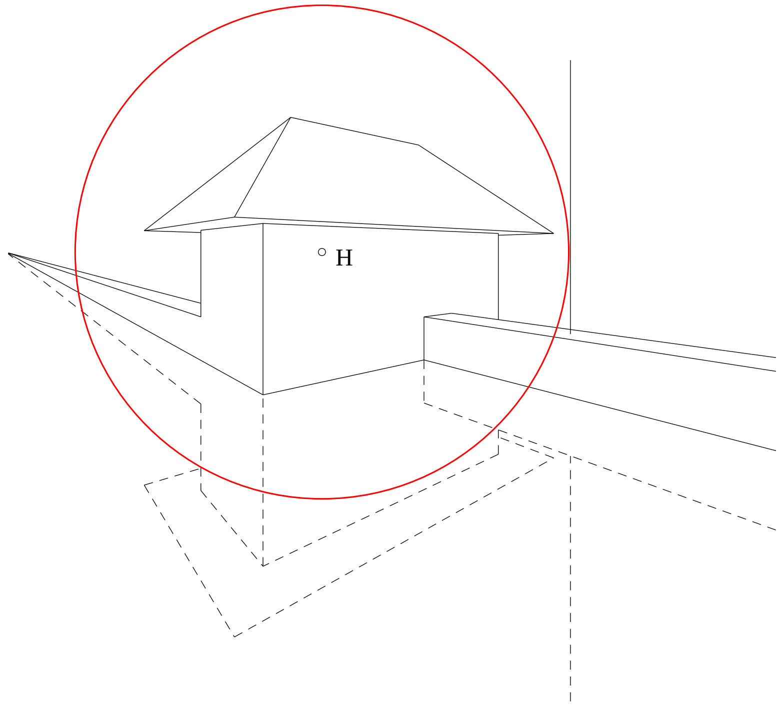


Abbildung 5.4: Zentralprojektion mit Sehkreis: Haus am See

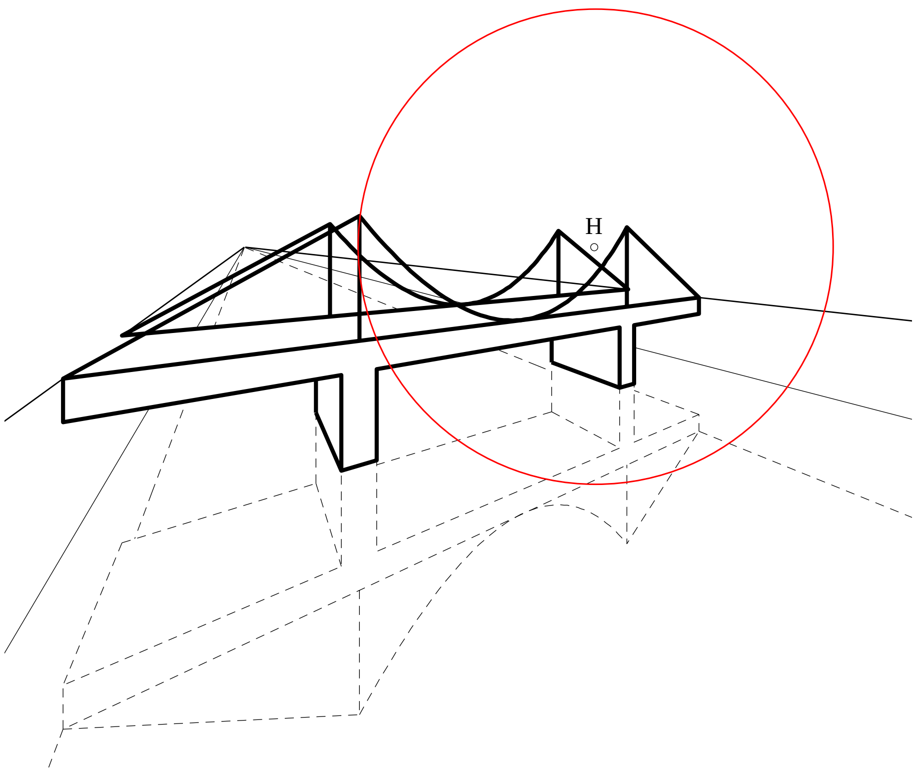


Abbildung 5.5: Zentralprojektion mit Sehkreis: Brücke

5.1.2 Spurpunkt, Fluchtpunkt, Spurgerade, Fluchtgerade

Der Durchstoßpunkt S_g einer Gerade g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g.
Die Bilder einer Schar **paralleler Geraden** sind i.a. nicht parallel. Sie schneiden sich im **Fluchtpunkt** F **der Geradenschar**. Man erhält F als Spurpunkt derjenigen Gerade g_0 der Schar, die durch den Augpunkt O geht.

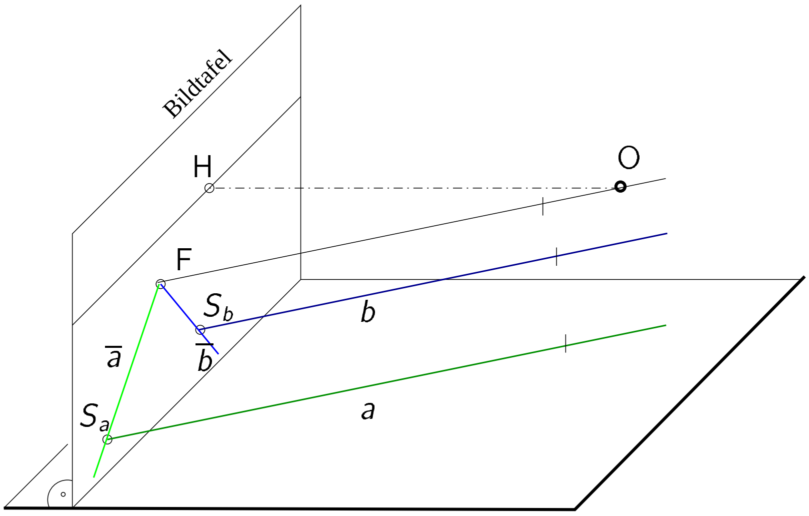


Abbildung 5.6: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

Ist g eine Gerade und F der Fluchtpunkt der durch g bestimmten parallelen Geradenschar, so sagt man "F ist der **Fluchtpunkt** der Gerade g". Es gilt:

1. Geraden, die senkrecht zur Bildtafel sind, heißen **Tiefenlinien**.
2. Fluchpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h.
3. Eine Gerade ist durch ihren Spurpunkt und ihren Fluchtpunkt **bestimmt**, falls diese voneinander verschieden sind.
4. Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden, die zur Bildtafel parallel sind, sind parallel.

Beispiel 5.1 *Abb. 5.7 zeigt Fluchtpunkte paralleler Geraden.*

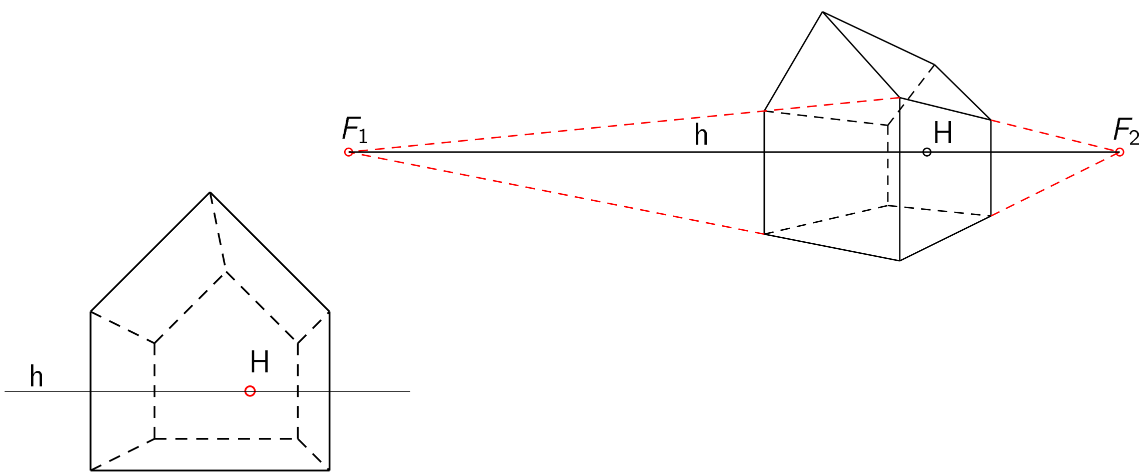


Abbildung 5.7: Fluchtpunkte eines Hauses

Die Schnittgerade einer Ebene ε mit der Bildtafel π heißt **Spurgerade** von ε.
Die Bilder einer Schar **paralleler Ebenen** schneiden sich i.a. in der **Fluchtgerade** (–**linie**) f **der Schar**. Man erhält f als Spurgerade derjenigen Ebene der Schar, die durch O geht (s. Abb. 5.8).

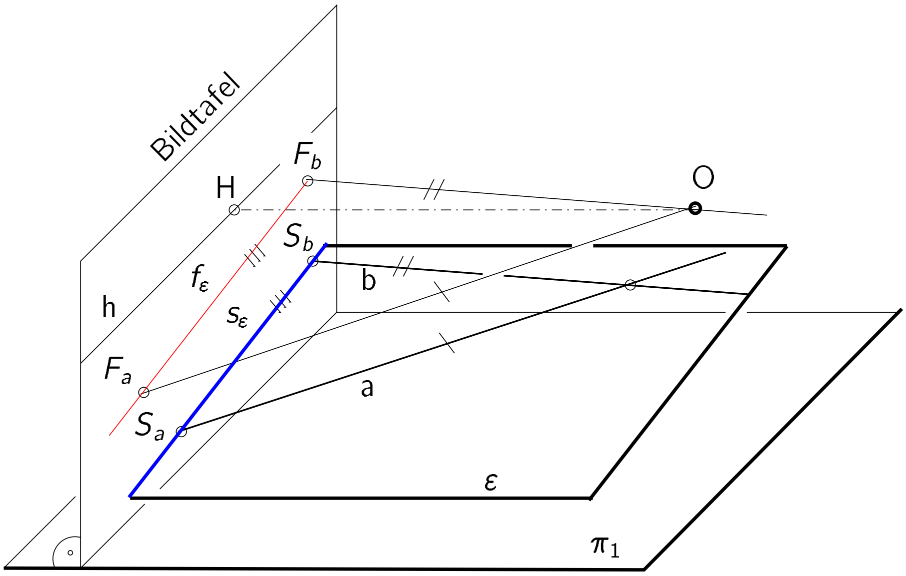


Abbildung 5.8: Flucht– und Spurgeraden einer Ebene

Aufgabe 5.1 *Bestimme die Fluchtgeraden von Ebenen eines Hauses (Abb. 5.9)*

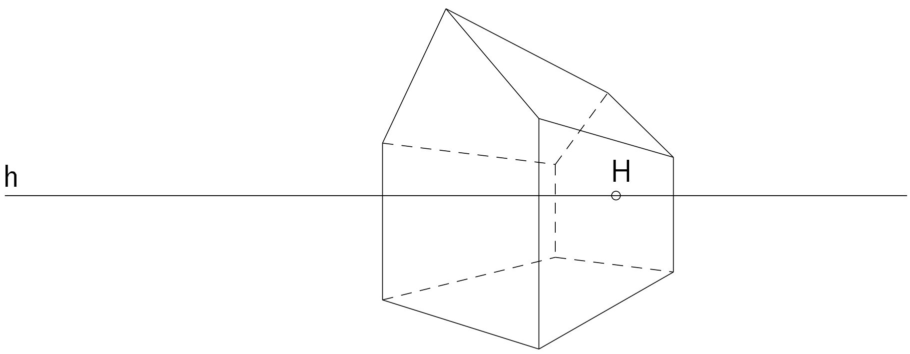


Abbildung 5.9: Fluchtgeraden eines Hauses

5.1.3 Konstruktion perspektiver Bilder bei senkrechter Bildtafel

Steht die Bildtafel **senkrecht**, so gilt:

$\boxed{H \text{ liegt auf dem Horizont } h.}$

Vorgabe	:	a) Punkte und Geraden in Grund– und Aufriss.
		b) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund– und Aufriss.
Gesucht	:	Die perspektiven Bilder der Punkte und Geraden.

Verfahren: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund– und Aufriss. "Festmachen" des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes H. Zeichnen des Horizonts h durch H.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt F_g und Spurpunkt S_g oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen.
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild. (Der horizontale Abstand eines Bildpunktes von H wird aus dem Grundriss, der Abstand vom Horizont h aus dem Aufriss entnommen.)
(F_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Gerade durch O.)

(2) Abbildung eines **Punktes** P:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
a) zeichnen des Projektionsstrahls p in Grund– und Aufriss.
b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
c) zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von H aus Grundriss, Abstand vom Horizont h aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

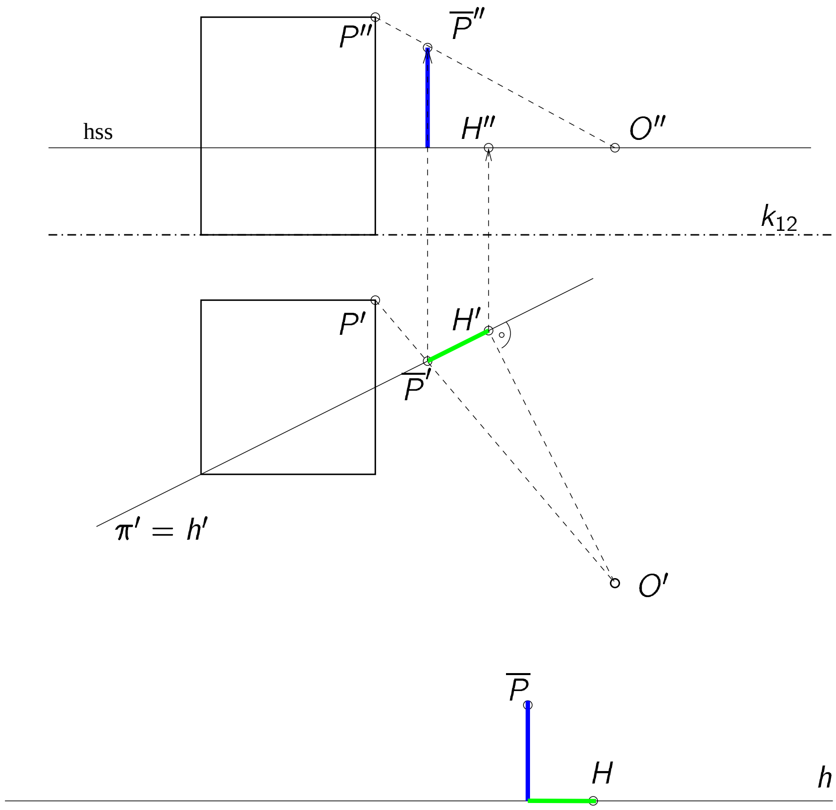


Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird oft die **Architektenanordnung** gewählt: (s. LEO S.221)
Der **Grundriss** wird so unterhalb (oder oberhalb) von dem perspektiven Bild angeordnet, dass

der Horizont h parallel zu π' und H auf der Gerade $\overline{O'H'}$ liegt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes.
Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass

h'' mit h übereinstimmt.

Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.2 *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.11).*

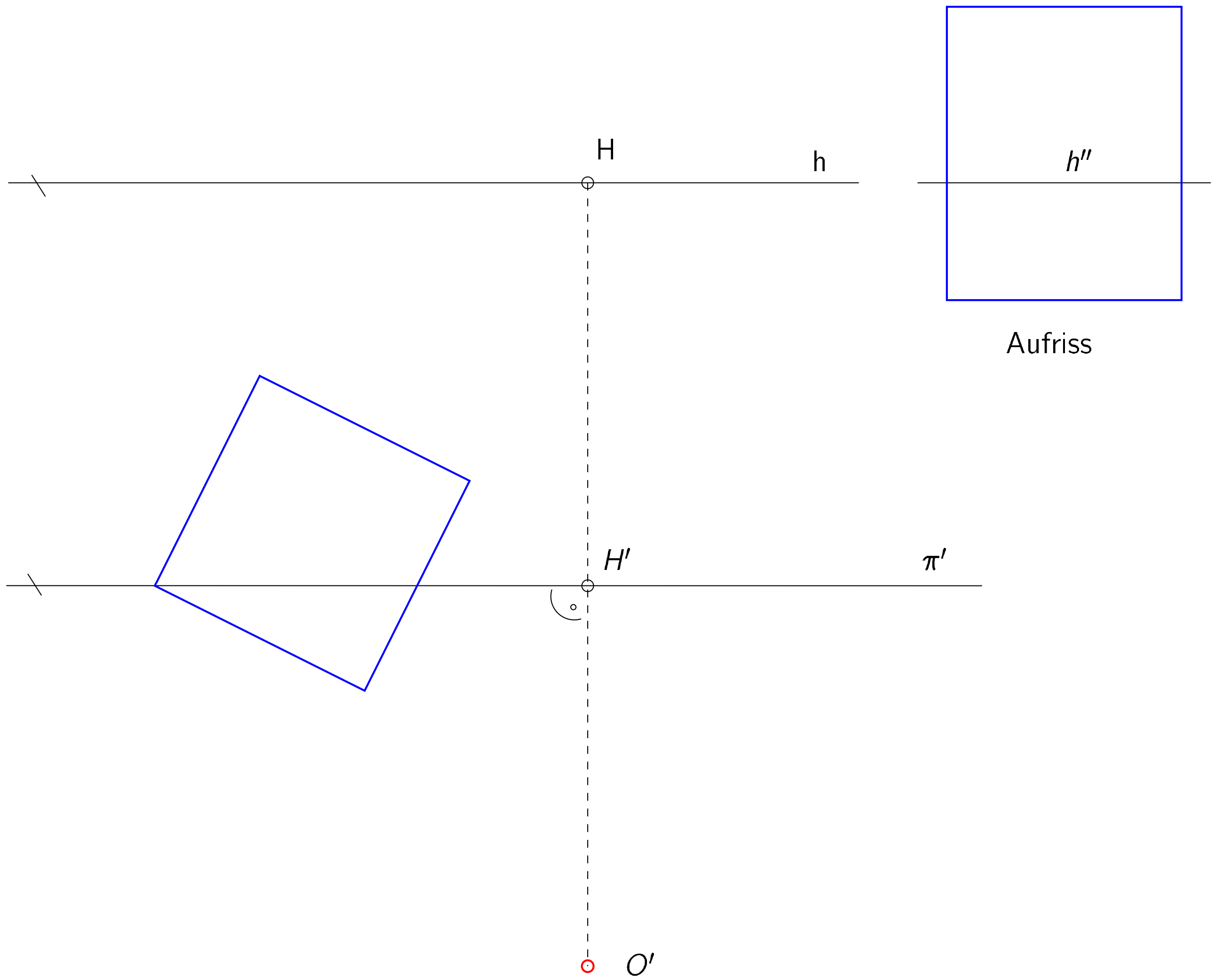


Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.3 *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.12). (Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.)*

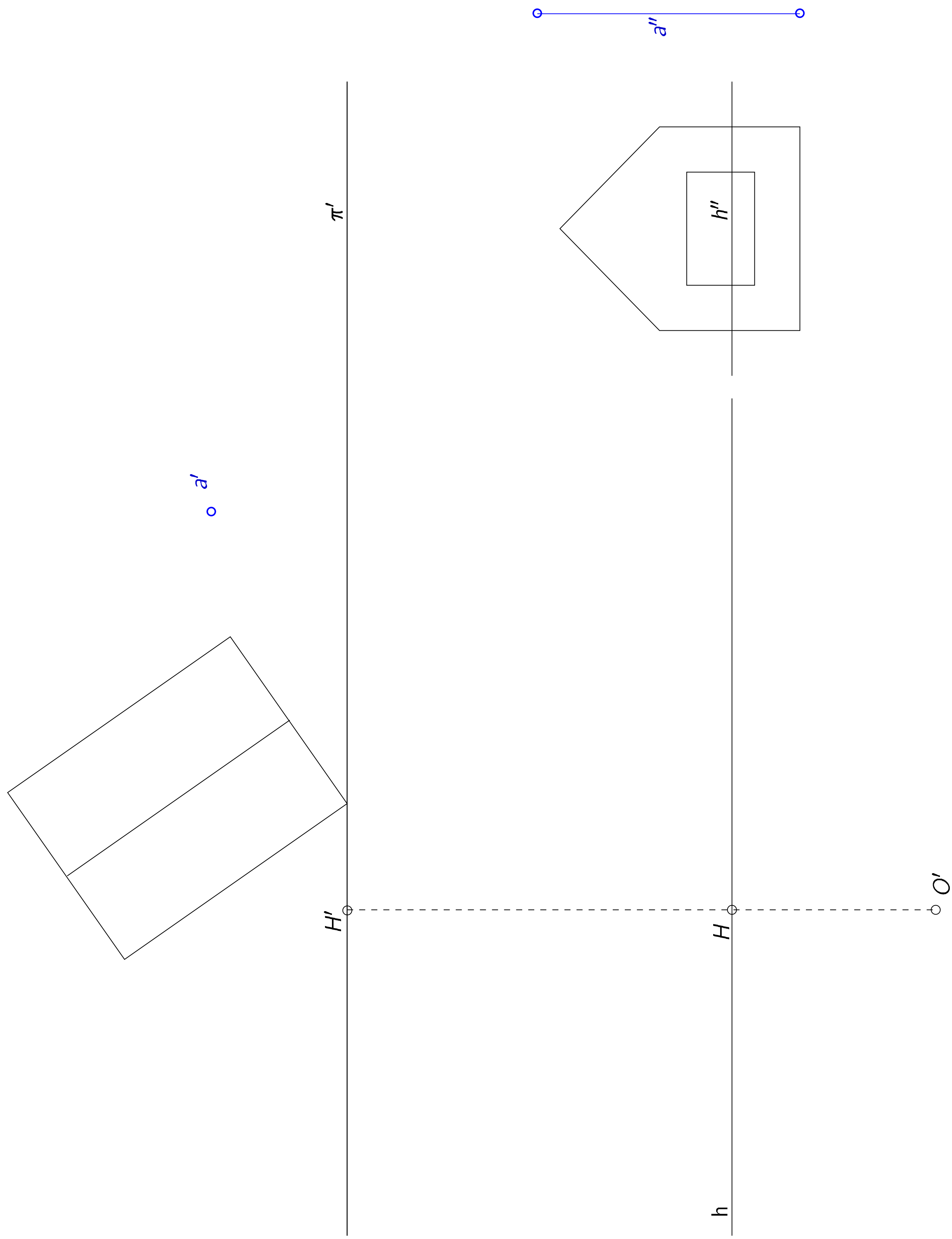


Abbildung 5.12: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

Die Abbn. 5.13, 5.14 zeigen, wie sich das Bild eines Hauses verändert, wenn man die Lage der Bildtafel oder des Augpunktes verändert.

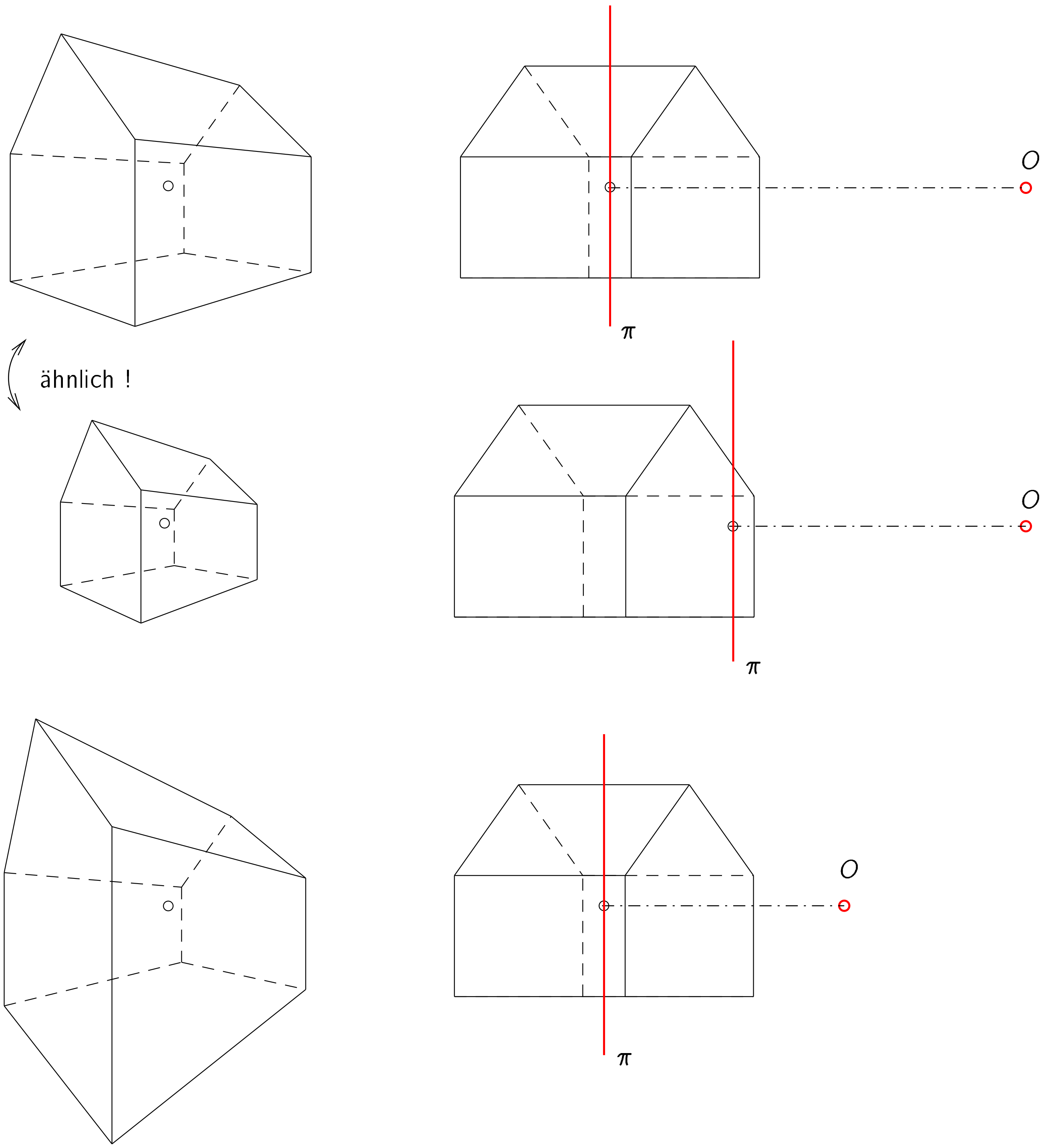


Abbildung 5.13: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

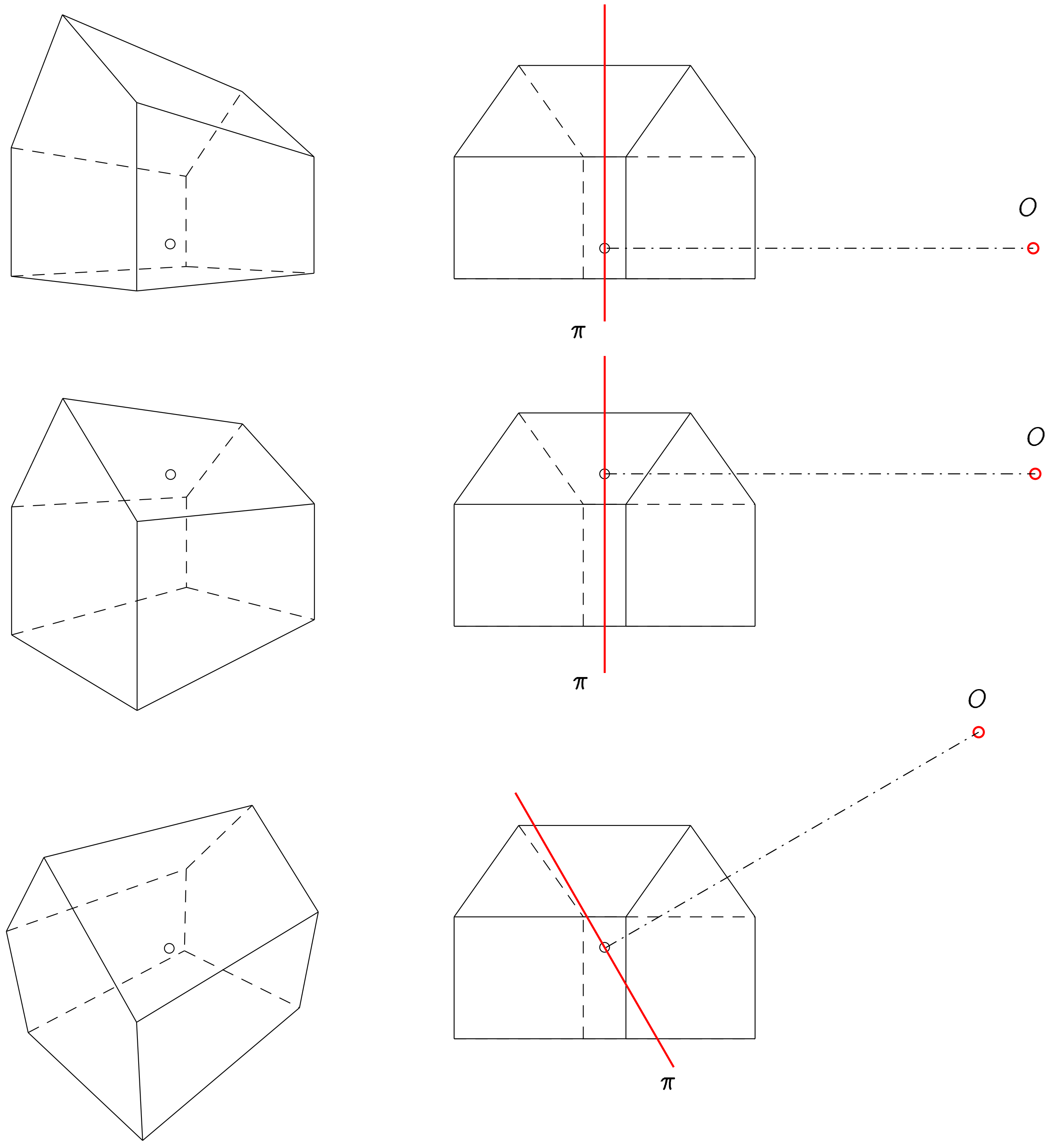


Abbildung 5.14: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

5.2 Hilfskonstruktionen

5.2.1 Wahrer Mittelpunkt einer Strecke

Eine Zentralprojektion erhält i.a. nicht das Teilverhältnis einer Strecke.

Daher ist das Bild eines Mittelpunktes einer Strecke i.a. **nicht** der Mittelpunkt der Bildstrecke.
Ausnahmen: Strecken, die parallel zur Bildtafel sind.

Konstruktion des Mittelpunktes **im Bild**:
Gegeben: perspektives Bild $\overline{AB}$ einer Strecke. Gesucht: Bild des Mittelpunktes.
Idee: Man wählt eine Ebene ε, die die Strecke enthält und die die Bildtafel in der Spur s_ε schneidet. Dann projiziert man die Strecke *parallel* aus einer "beliebigen" Richtung (innerhalb der Ebene) auf die Spur s_ε; das Bild sei $\overline{A'B'}$. Da bei Parallelprojektion Mittelpunkt in Mittelpunkt übergeht, bestimmt man den Mittelpunkt vn $\overline{A'B'}$ und projiziert ihn zurück auf die Streck $\overline{AB}$.

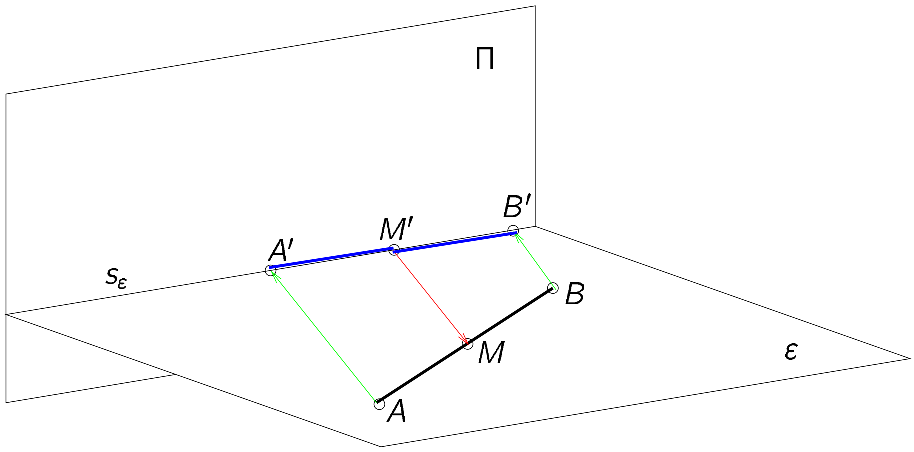


Abbildung 5.15: Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke

Durchführung:
1. Wahl der Ebene ε, in der die Strecke liegt. Bestimmung der Spurgerade s_ε und der Fluchtgerade f_ε. (Im Beispiel (s.u.) ist ε die Standebene, d.h. s_ε ist die Standlinie und f_ε istr der Horizont.
2. Wahl eines geeigneten Fluchtpunktes F auf f_ε.
3. Projektion der Strecke von F aus auf die Spur s_ε liefert A', B'.
4. Bestimmung des Mittelpunktes M' von A', B'.
5. Rückprojektion von M' auf die Bildstrecke ergibt den wahren Mittelpunkt M.

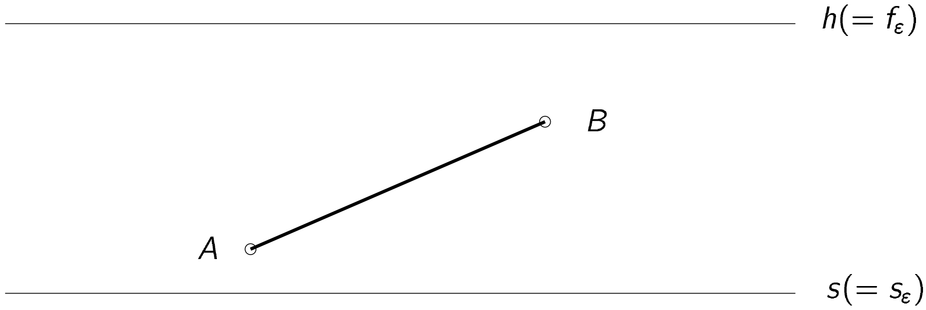


Abbildung 5.16: Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke im persp. Bild

5.2.2 Distanzpunkte

(s. FKN S.236)

Will man einen Fußboden mit quadratischen Platten (s. Abb.) mit Hilfe der Sehstrahlen in ein perspektivisches Bild eintragen, so ist dies eine langwierige und z.T. ungenaue Prozedur (schleifende Schnitte !).

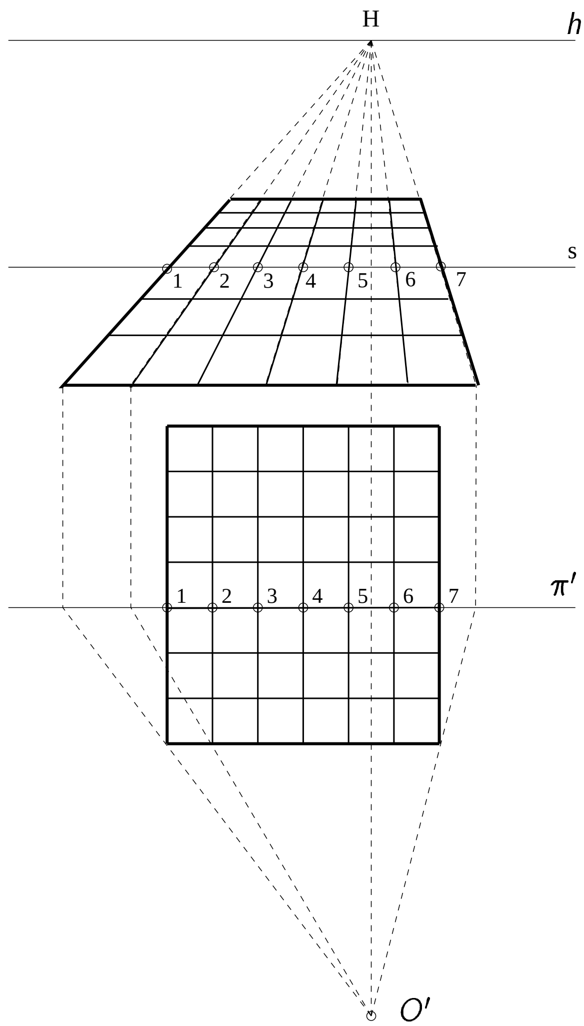


Abbildung 5.17: Konstruktion eines Netzes in der Standebene

Eine wesentliche Erleichterung bietet die Verwendung der Fluchtpunkte D_1 und D_2 der Quadrat**diagonalen**. D_1 und D_2 haben vom Hauptpunkt den Abstand d (Distanz) und heißen deswegen **Distanzpunkte**.

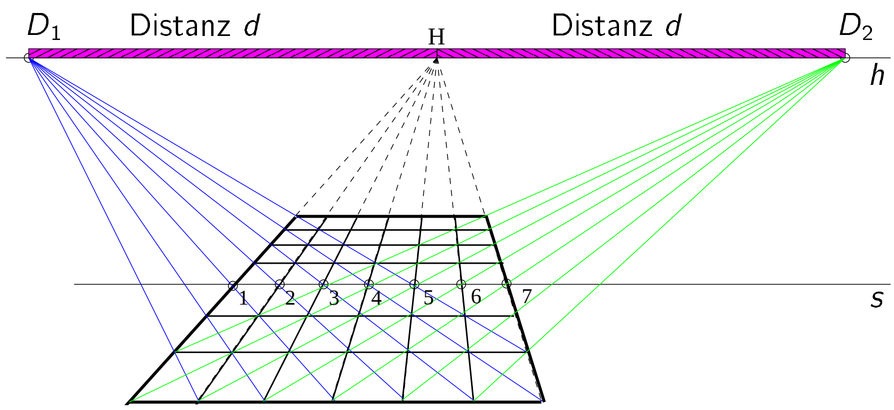


Abbildung 5.18: Konstruktion eines Netzes in der Standebene mit Distanzpunkten

Durchführung im Beispiel (Die Standlinie ist eine Plattenfuge.):

1. Bestimmung der Distanzpunkte $D_1,\ D_2$.
2. Zeichnen der Tiefenlinien.
3. Zeichnen der Diagonalen, die die Standlinie in den Punkten $1, \ldots, 7$ treffen.
4. Die Diagonalen werden mit den Tiefenlinien geschnitten.
   Die Schnittpunkte ergeben weitere Punkte des Plattennetzes.
5. Parallelen zur Standlinie durch die neuen Punkte liefern weitere Punkte.
6. Falls nötig, werden weitere Diagonalen und Parallelen zur Standlinie gezeichnet, bis alle Punkte des Plattennetzes bestimmt sind.

Aufgabe 5.4 *Zeiche ein (quadratisches) Netz mit den auf der Standlinie s vorgegebenen Punkten* $1, \ldots, 7$.

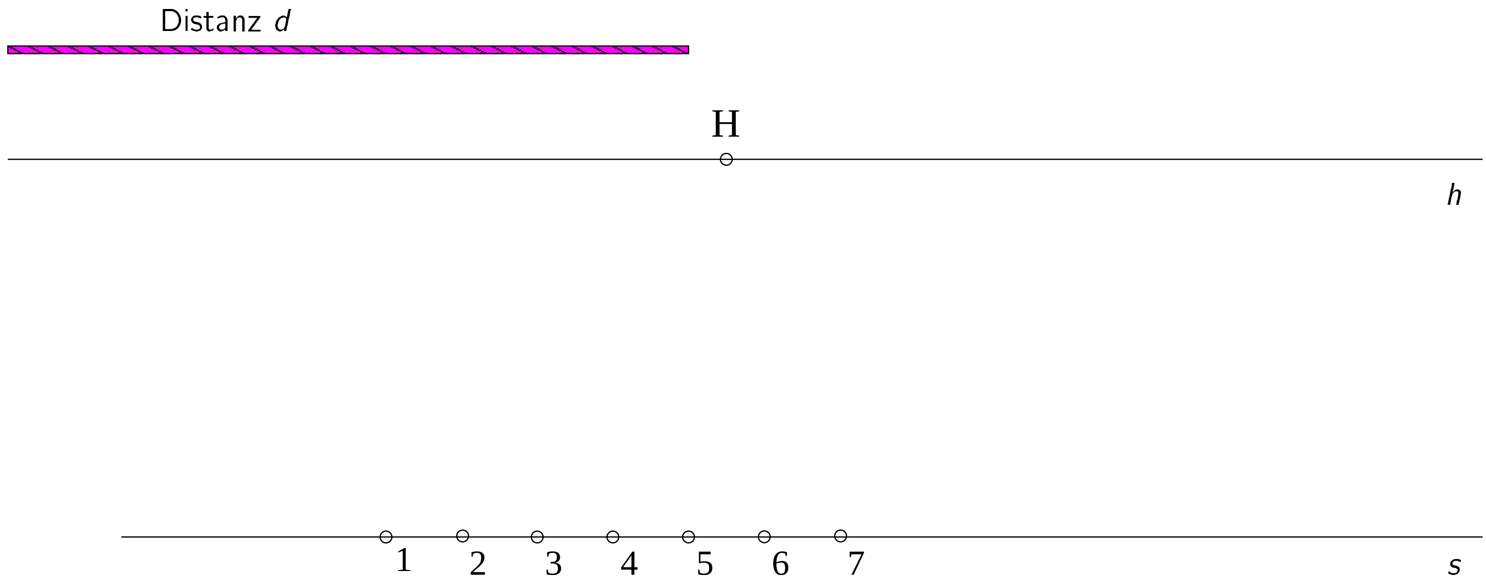


Abbildung 5.19: Konstruktion eines Netzes in der Standebene mit Distanzpunkten: Beispiel

ANWENDUNG:

Will man ein perspektivisches Bild einer „Szene" ohne besondere Konstruktion erstellen, so zeichnet man mit Hilfe von Distanzpunkten das perspektive Bild eines geeigneten quadratischen **Fußboden**- und **Wandraster**s, über dem dann das perspektive Bild der Szene entsteht. Ein Punkt wird dann genau (falls seine „Tiefe" und „Höhe" auf dem Raster liegen) oder ungefähr in das perspektive Bild eingezeichnet.
(Die Distanzpunkte für den **Wand**raster liegen über bzw. unter H !)

Aufgabe 5.5 *Fertige eine perspektivische Skizze der folgenden Szene an:*

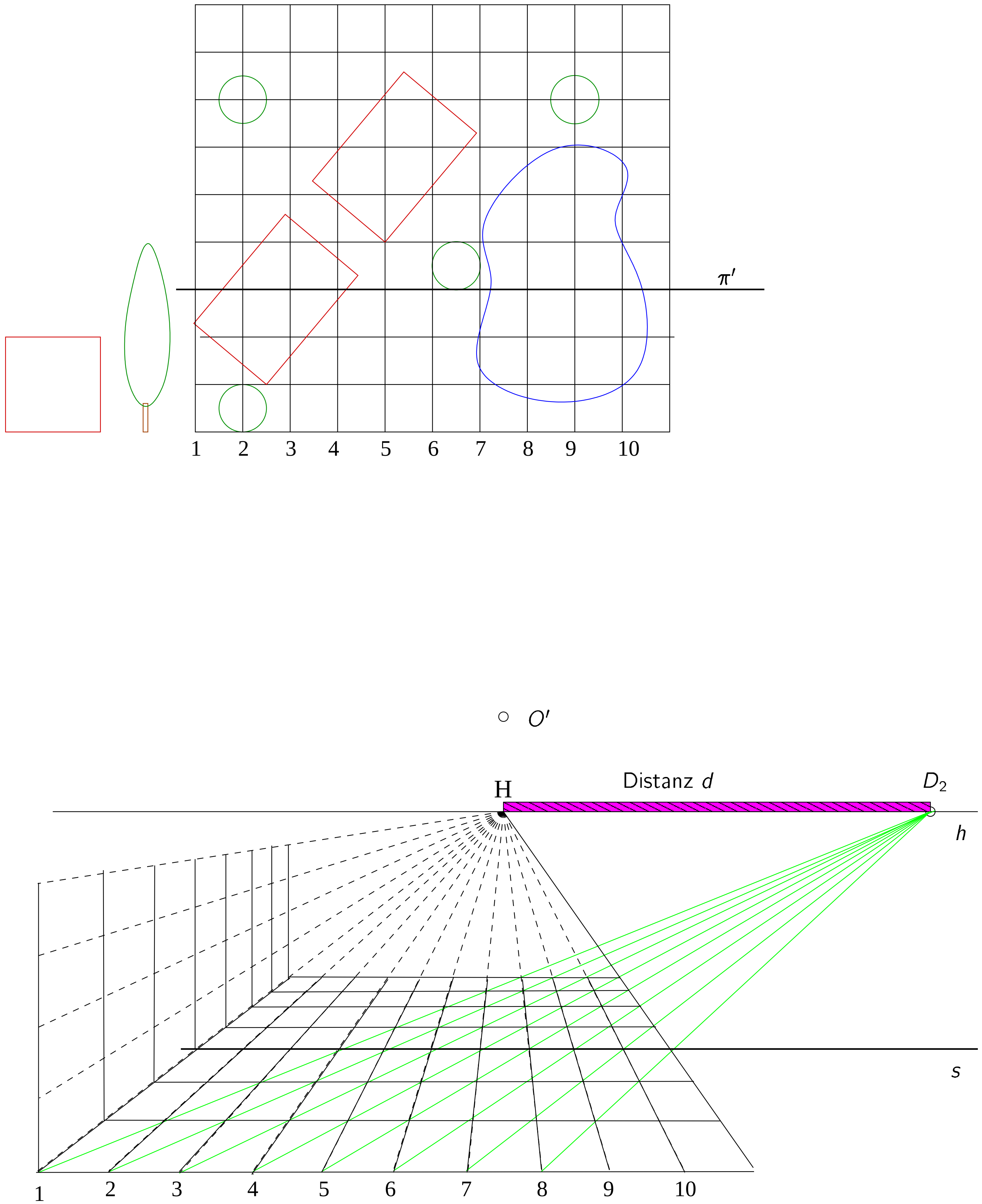


Abbildung 5.20: Skizze einer Szene mit Hilfe eines horizontalen und vertikalen Netzes

5.2.3 Fluchtpunkte nicht horizontaler Geraden

(s. FKN S. 231)

Beim Zeichnen des perspektivischen Bildes einer Hausfassade mit gleichmäßiger Unterteilung durch rechteckige Fenster kann man die in 1.4.2 beschriebene Methode *fast* unverändert übernehmen. Falls die Diagonalrichtung einen Neigungswinkel von 45^o besitzt, kann man wieder mit Distanzpunkten arbeiten. (Die Distanzpunkte liegen hier allerdings nicht auf dem Horizont.) Im anderen Fall findet man einen Diagonalenfluchtpunkt folgendermaßen:

Durchführung:

1. Bestimme den horizontalen Fluchtpunkt F_h der Hauswand.
2. Der gesuchte Fluchtpunkt F_d ist der Spurpunkt der Geraden d_0. (d_0 geht durch O und hat die Richtung der Fensterdiagonalen.) Man **dreht** d_0 um die senkrechte Gerade f durch F_h, bis sie **in** der **Bildtafel** liegt. O wird mitgedreht. Jetzt erscheint der Winkel (in der Bildtafel) in wahrer Größe. Antragen von α im gedrehten Augpunkt liefert die zu d_0 gedrehte Gerade und der Schnitt dieser Gerade mit f ist der gesuchte Fluchtpunkt F_d.

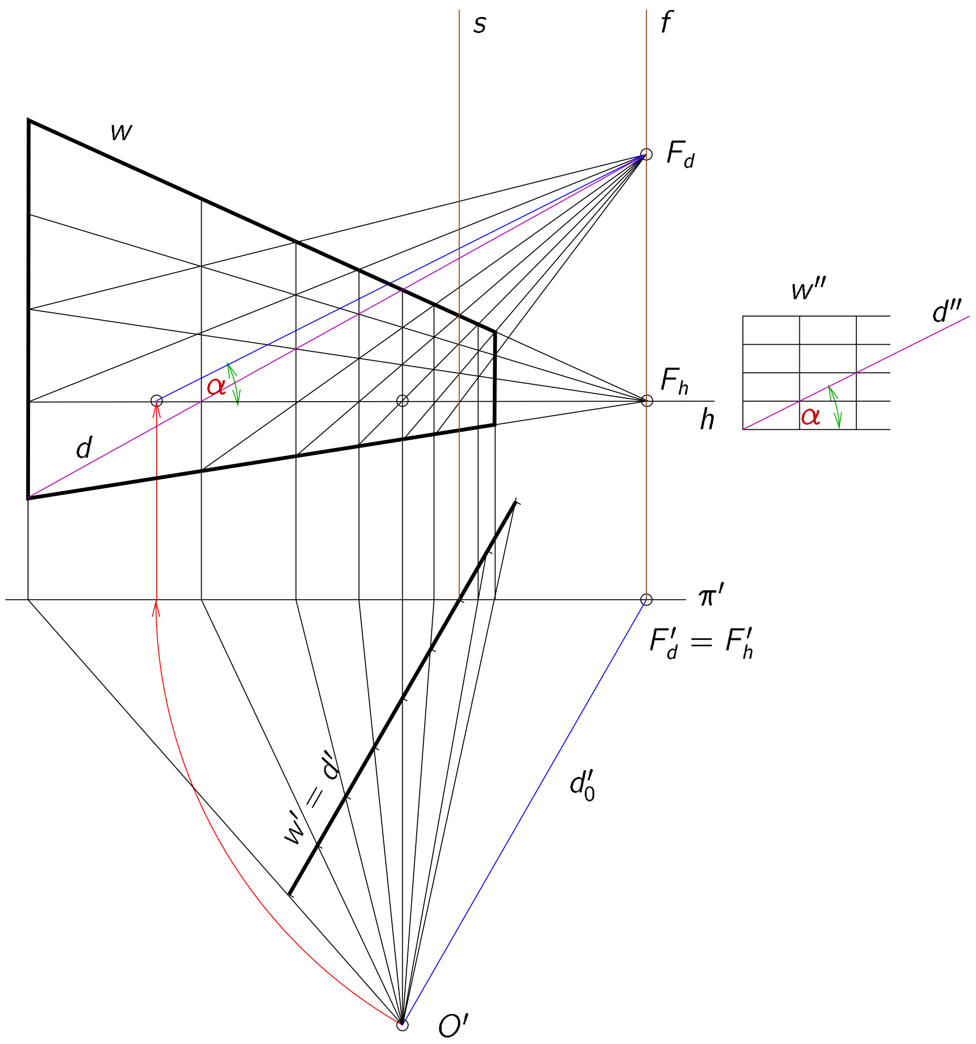


Abbildung 5.21: Fluchtpunkt einer nicht horizontalen Richtung: Diagonalen einer Fensterfront

5.2.4 Nicht erreichbare Fluchtpunkte (s. FKN S. 226)

Falls der Fluchtpunkt F einer Parallelenschar außerhalb der Zeichenfläche liegt und man eine Gerade durch einen Punkt P und F zeichnen muss, kann man sich folgendermaßen behelfen:

Gegeben: Zwei Geraden a, b mit unerreichbarem Schnittpunkt F und ein Punkt P.

Gesucht: Die Gerade durch P und F.

IDEE: Man stelle sich ein Dreieck A, B, F vor mit A auf a, B auf b, dessen Höhen sich in P schneiden. Dann ist die Höhe durch F (Lot auf $\overline{AB}$ durch P) die gesuchte Gerade.

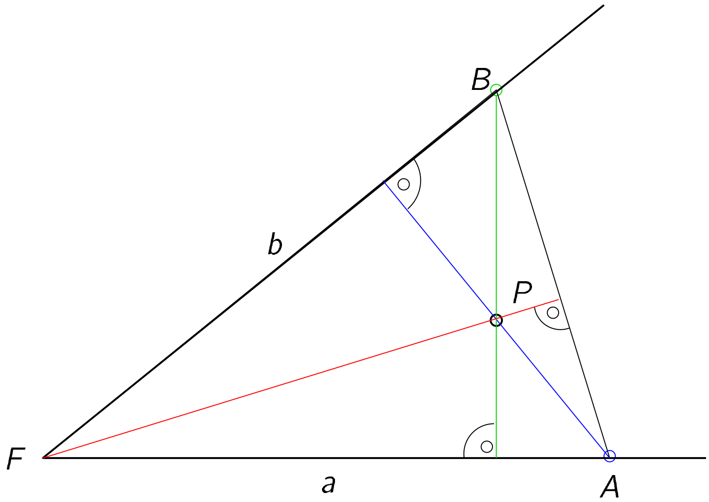


Abbildung 5.22: Gerade durch unerreichbaren Fluchtpunkt

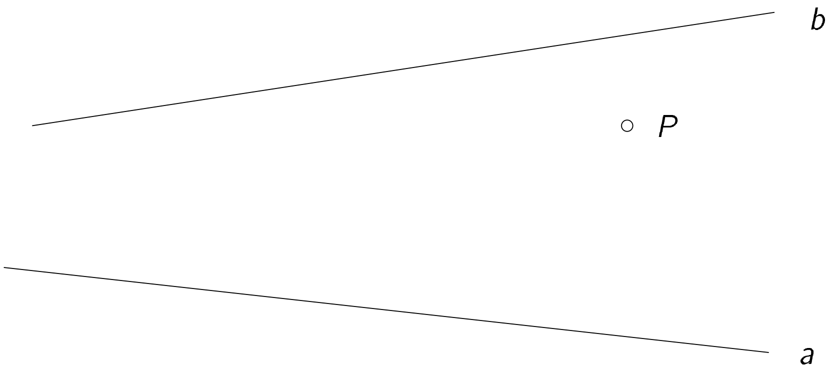


Abbildung 5.23: Gerade durch unerreichbaren Fluchtpunkt (Schnittpunkt von a und b)

Ist F der Fluchtpunkt einer **horizontalen** Parallelenschar, so ist die folgende Methode meist vorteilhafter:

Gegeben: Perspektives Bild $\overline{P}$ des Punktes P,
Grundriss vom Augpunkt, Bildtafel und einer horizontalen Gerade g,
deren Fluchtpunkt F im perspektiven Bild nicht erreichbar ist.

Gesucht: Parallele a zu g durch P, d.h. Gerade $\overline{a}$ durch $\overline{P}$ und F (im perspektiven Bild).

IDEE: Man konstruiert (falls möglich) den Mittelpunkt $F_{1/2}$ der Strecke F, H und den Mittelpunkt $\overline{P}_{1/2}$ der Strecke H, $\overline{P}$ und wendet den Strahlensatz an.

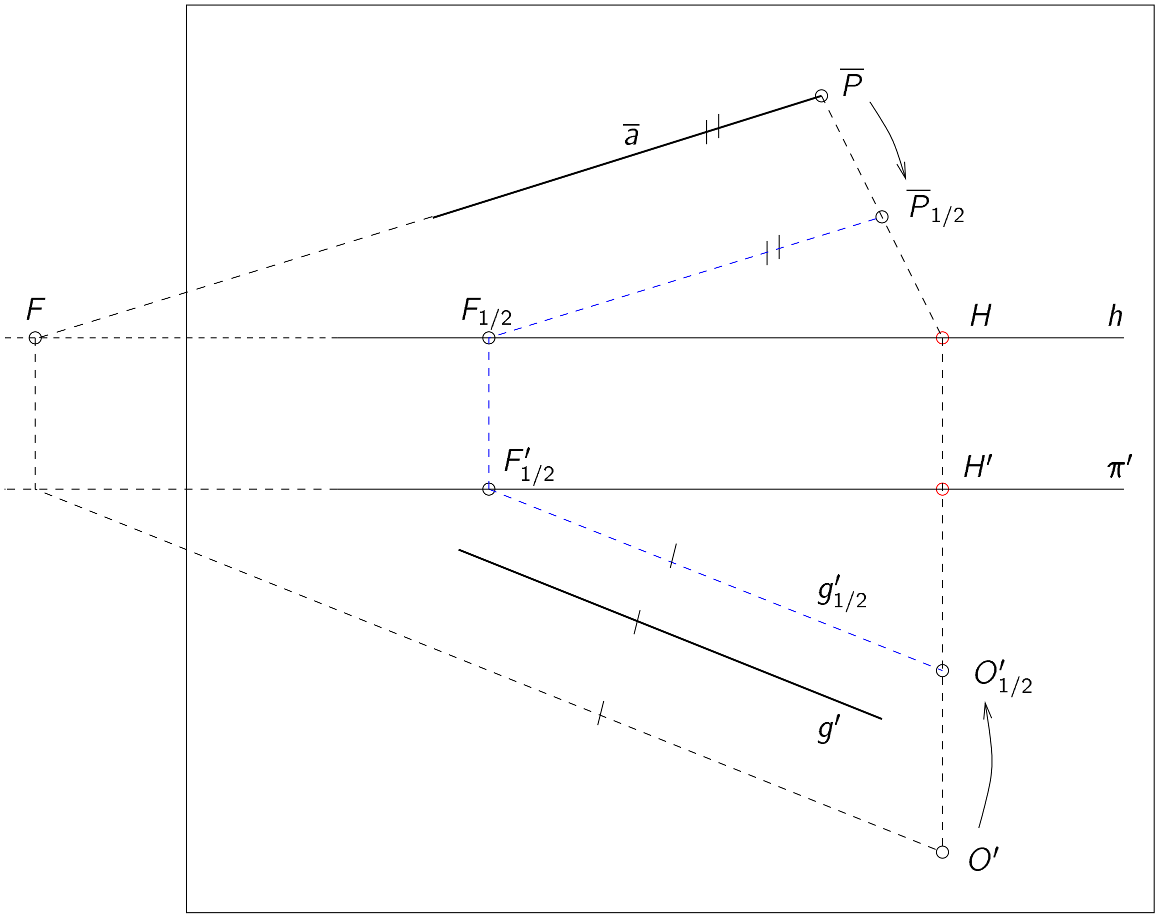


Abbildung 5.24: Gerade durch einen unerreichbaren Fluchtpunkt

Durchführung:

1. Im Grundriss:
   Bestimme den Mittelpunkt $O'_{1/2}$ der Strecke O', H'.
   Zeichne die Parallele $g'_{1/2}$ zu g' durch $O'_{1/2}$.
   Der Schnittpunkt von $g'_{1/2}$ mit π' ist $F'_{1/2}$.
2. Übertragen von $F'_{1/2}$ in das perspektive Bild liefert $F_{1/2}$.
3. Bestimme den Mittelpunkt $\overline{P}_{1/2}$ der Strecke H, $\overline{P}$.
4. Die Parallele zur Geraden durch $F_{1/2}$, $\overline{P}_{1/2}$ durch den Punkt $\overline{P}$ ist die gesuchte Gerade. (Strahlensatz!)

Aufgabe 5.6 *Zeichne das perspektive Bild des in Architektenanordnung gegebenen Hauses.*

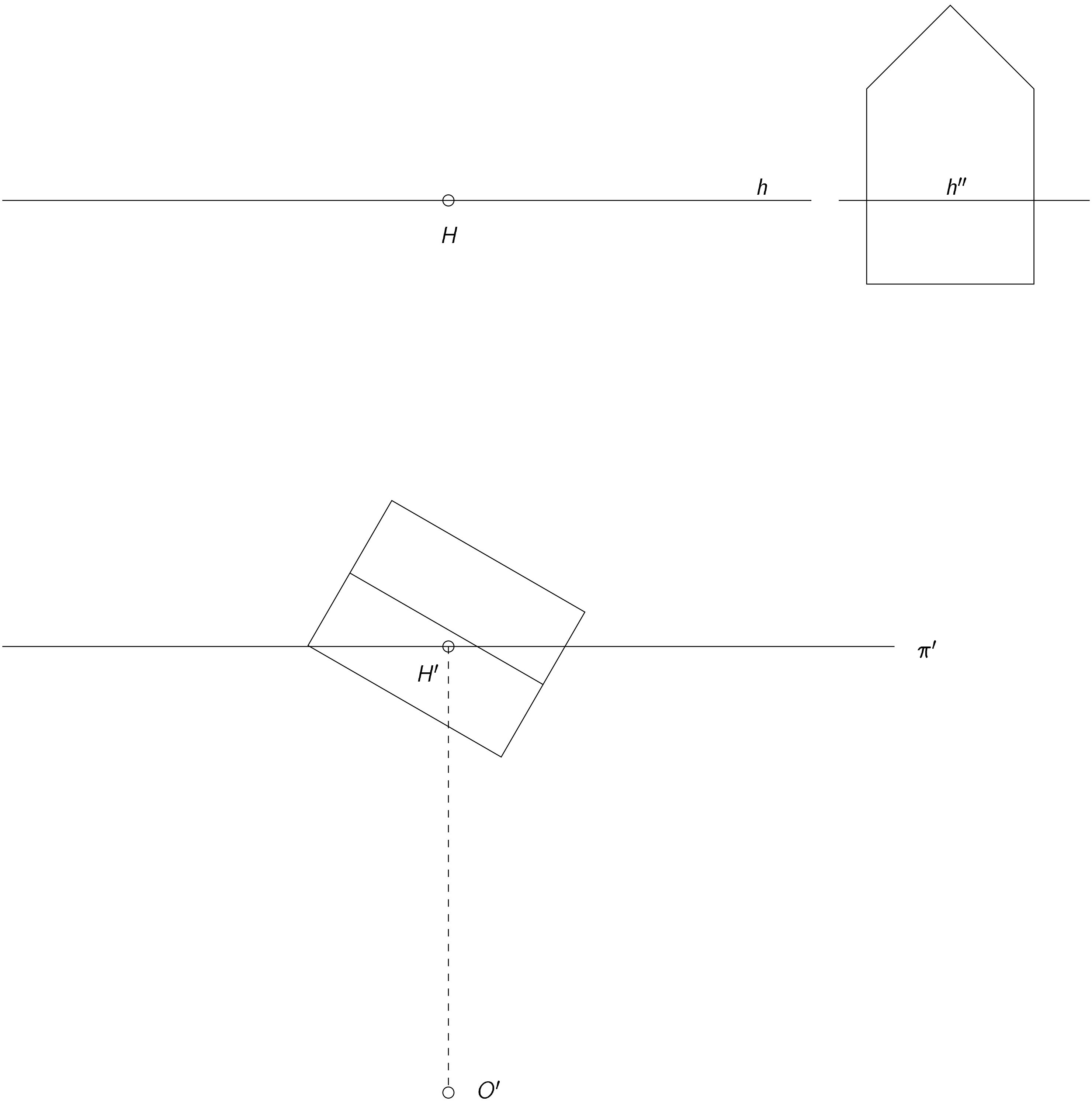


Abbildung 5.25: Haus mit unerreichbarem Fluchtpunkt

5.3 Spiegelung an einer Ebene

Ein von einem Objektpunkt B ausgehender Lichtstrahl wird an einer ebenen Spiegelfläche ε (Wasseroberfläche oder Spiegel) so reflektiert, dass Einfallswinkel α = Ausfallswinkel β ist. Für das Auge scheint ein reflektierter Strahl von einem „virtuellen“ Objektpunkt B_S zu kommen. B_S kann man sich als den an der Ebene ε gespiegelten Punkt von B vorstellen.

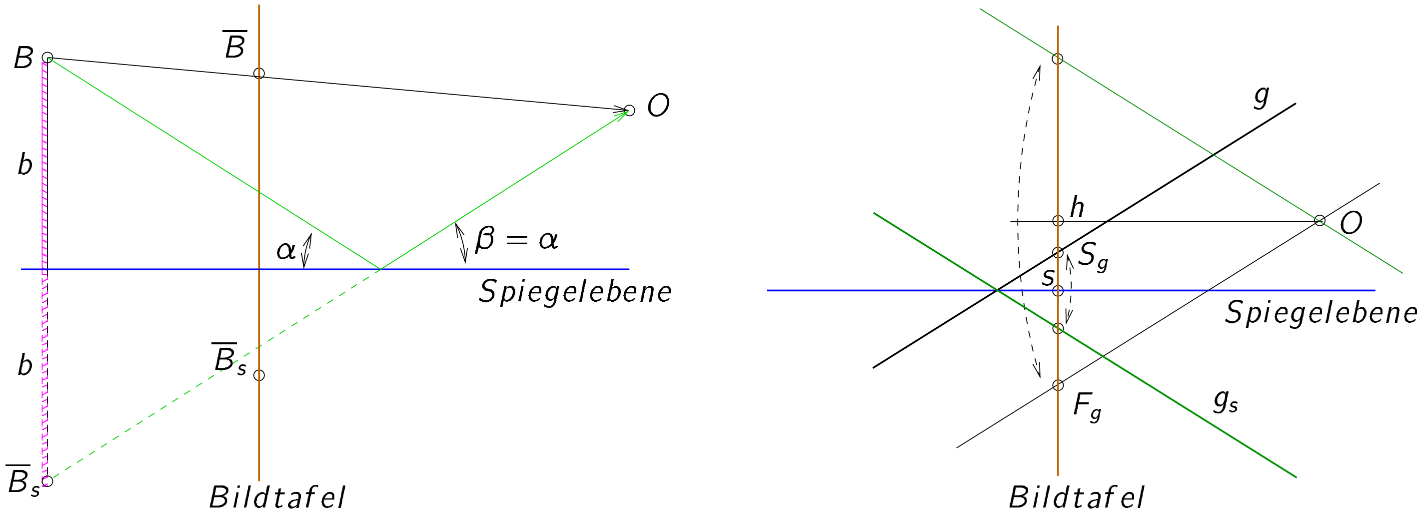


Abbildung 5.26: Spiegelung an einer horizontalen Ebene

Durchführung:

Gegeben: Objektpunkt B und Spiegelebene ε.
Gesucht: perspektives Spiegelbild von B (bezüglich ε).

(1) Spiegelung des Objektpunktes B an der Ebene ε liefert B_S.

(2) Konstruktion des perspektiven Bildes von B_S.

Falls ε **horizontal** ist, ergibt sich für die Konstruktion des perspektiven Spiegelbildes einer **Geraden** g (Fluchtpunkt F_g, Spurpunkt S_g) die folgende **Erleichterung**:

(0) s_ε sei die Spurgerade der Spiegelebene.

(1) Flucht- bzw. Spurpunkt der gespiegelten Geraden ergibt sich durch Spiegelung von F_g am Horizont h bzw. von S_g an s_ε.

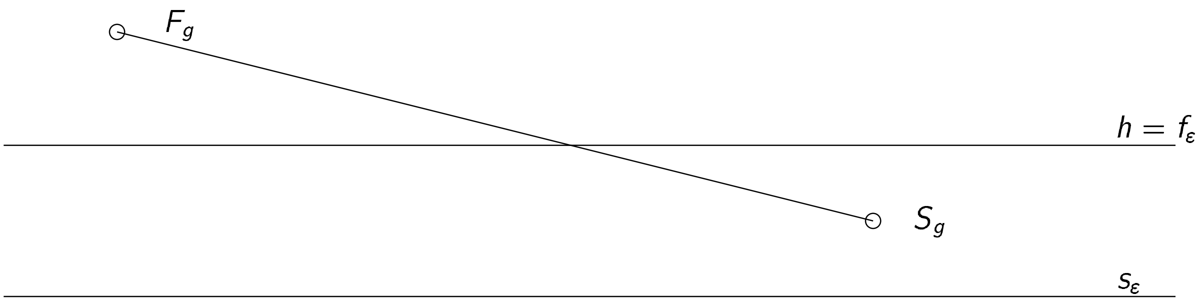


Abbildung 5.27: Spiegelung einer Geraden an der Standebene

Aufgabe 5.7 *TURM am See. Zeichne das perspektive Bild mit Spiegelung.*

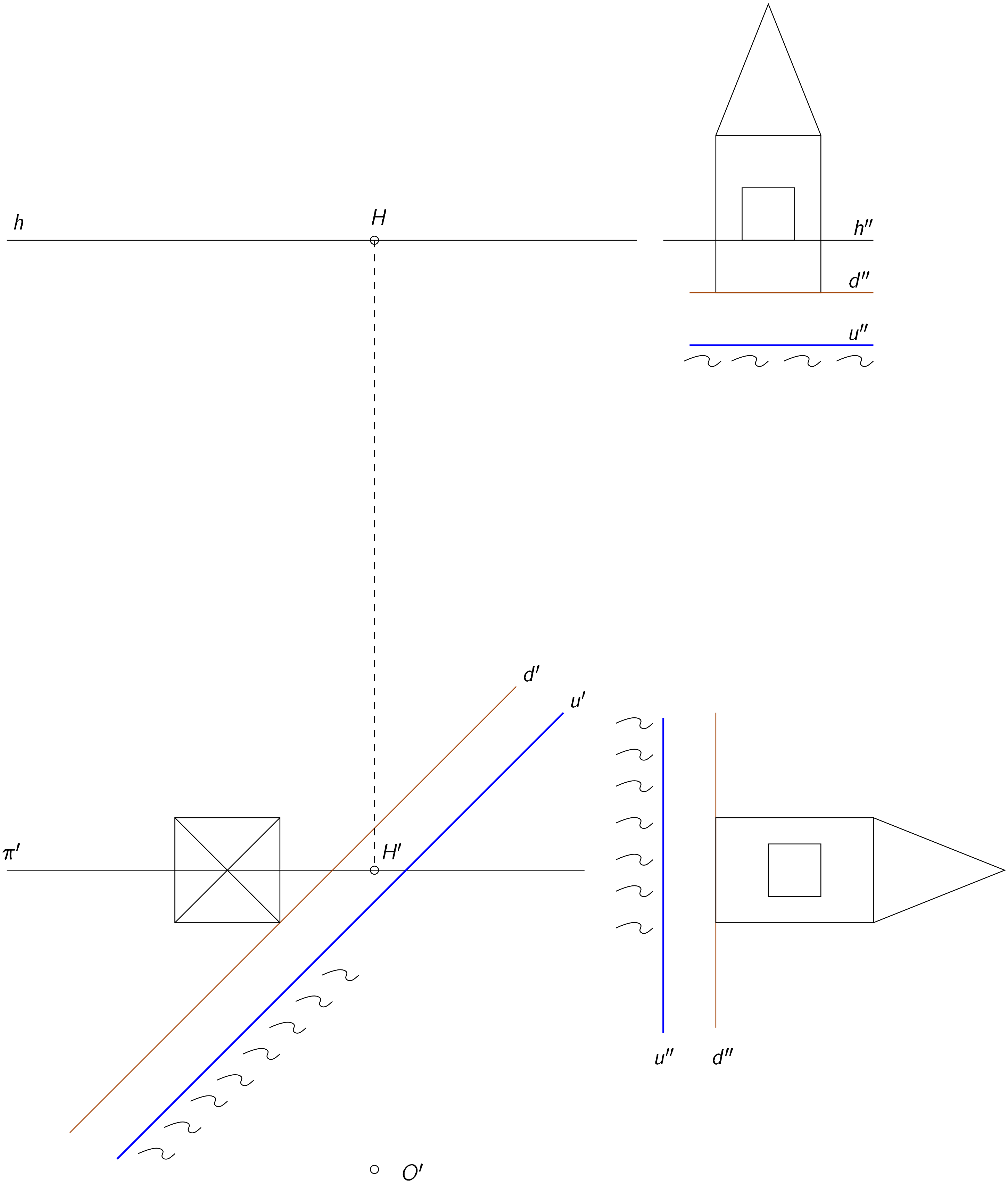
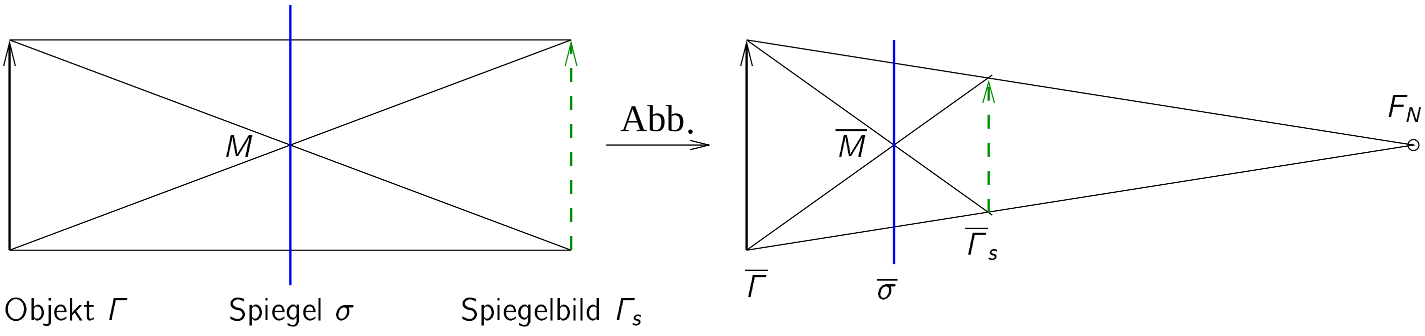


Abbildung 5.28: Spiegelung eines Turms an einer Wasseroberfläche

Erleichterung bei **senkrechter** Spiegelfläche (Wandspiegel) und **senkrechten** Geraden:

Hier benutzt man, dass:

1. sich die Diagonalen eines Rechtecks auf der Symmetrieachse (s. Abb.) schneiden,
2. der Mittelpunkt einer senkrechten Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet wird.



F_N: Fluchtpkt. der Normalen zur Spiegel-Eb.

Abbildung 5.29: Spiegelung an einem senkrechten Spiegel

Aufgabe 5.8 *ZIMMER mit Wandspiegel. Ergänze das Spiegelbild der Tür.*

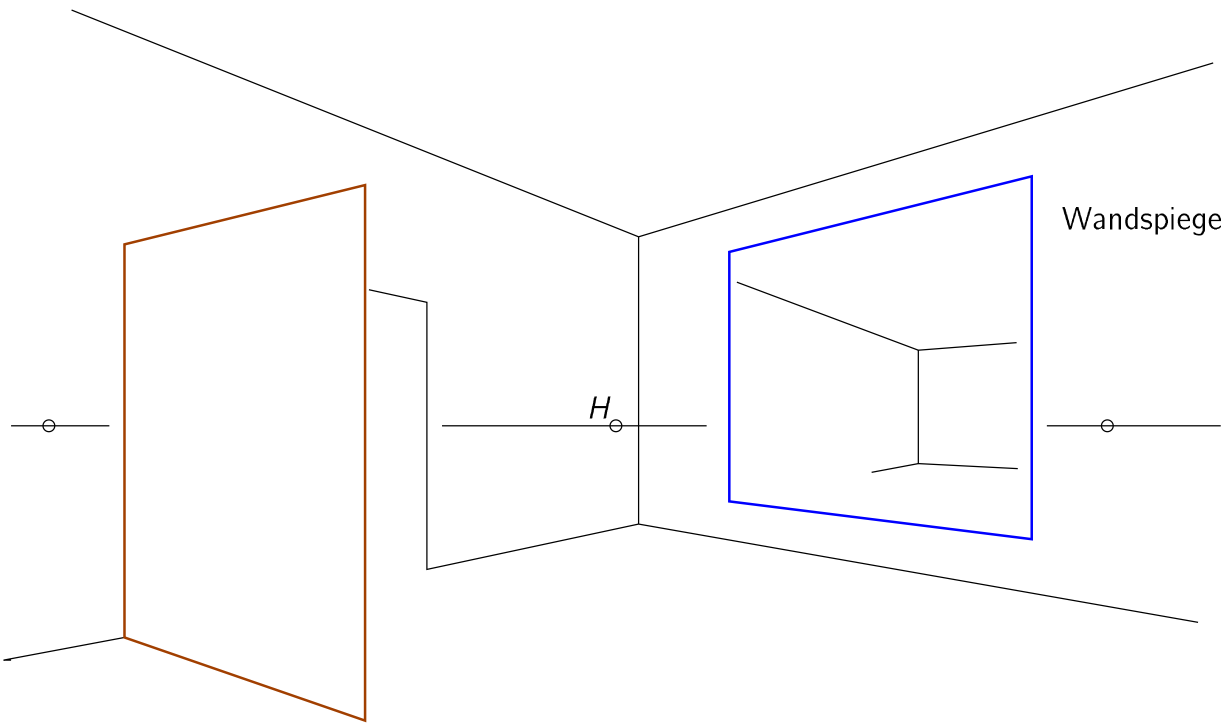


Abbildung 5.30: Spiegelung an einem Wandspiegel

5.4 Schattenkonstruktionen

(s. FKN S.251)

Zur Konstruktion des Schattens eines Gegenstandes im perspektiven Bild kann man zwei Methoden verwenden:

a) Den Schatten in Grund- und Aufriss bestimmen und dann in das perspektive Bild übertragen (s. 2.5).

b) Den Schatten **direkt** in dem perspektiven Bild konstruieren.

Die Methode b) ist besonders dann geeignet, wenn der Schatten auf einer **horizontalen** Ebene bestimmt werden soll.

5.4.1 Schatten bei Parallelbeleuchtung

Gegeben: Punkt P, Lichtrichtung l und **horizontale** Ebene ε.
Gesucht: Schatten von P auf ε.

IDEE: Wir stellen uns ε als Grundrisstafel vor. Dann ist der Schattenpunkt von P der Schnittpunkt des Lichtstrahls l_p durch P und des Grundrisses von l_p.

Durchführung:

1. Bestimme den Fluchtpunkt S der Lichtrichtung.
2. Bestimme den Fluchtpunkt S_F der Grundrisse der Lichtstrahlen. (S_F liegt senkrecht unter oder über S auf dem Horizont h.)
3. Bestimme das perspektive Bild $\overline{P'}$ des Grundrisses P' von P.
4. Der Schnittpunkt der Geraden durch $S, \overline{P}$ mit der Geraden durch $S_F, \overline{P'}$ ist der gesuchte Schatten von P im perspektiven Bild.

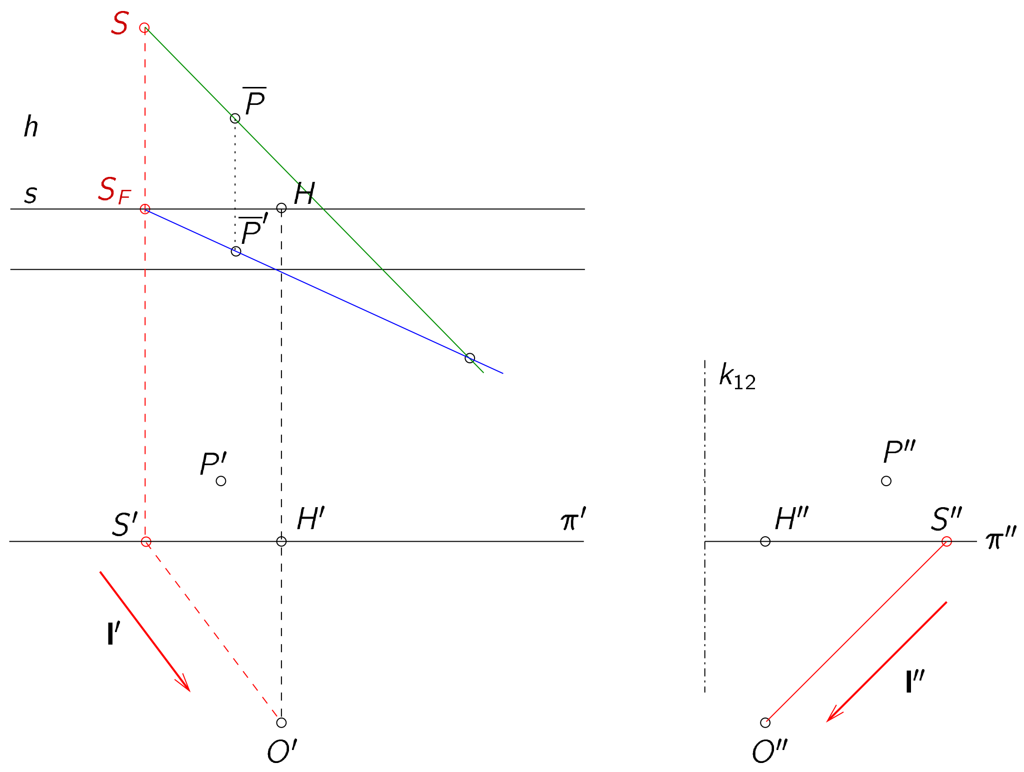


Abbildung 5.31: Schatten eines Punktes bei parallelem Licht

Aufgabe 5.9 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene. Die Lichtrichtung ist durch den Pfeil l gegeben.*

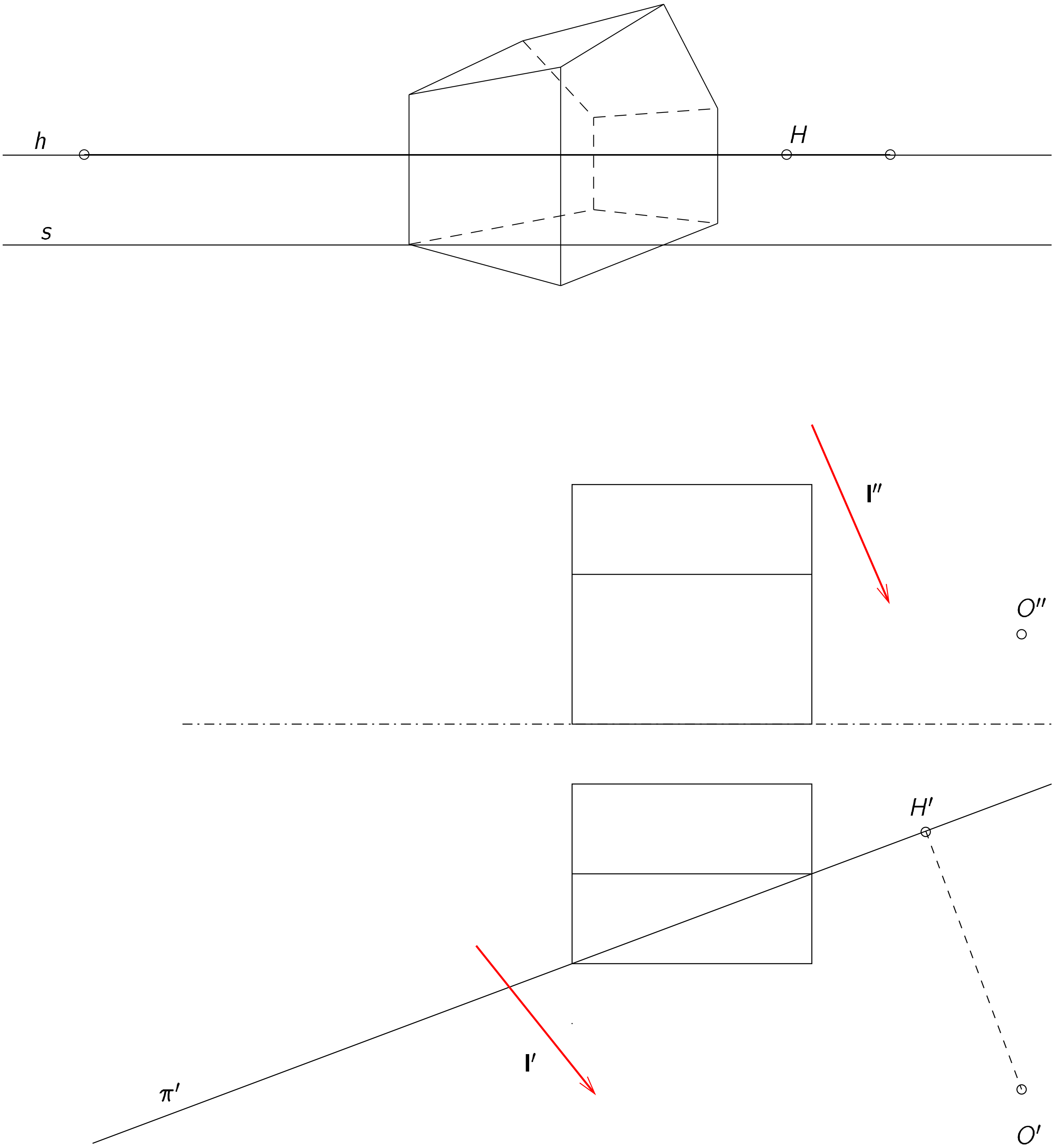


Abbildung 5.32: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

5.4.2 Schatten bei Zentralbeleuchtung

Gegeben: Punkt P, Lampe (punktförmige Lichtquelle) im Punkt L,
horizontale Ebene ε.
Gesucht: Schatten von P auf ε.

IDEE: wie bei Parallelbeleuchtung:

Durchführung:

1. Bestimme das perspektive Bild $\overline{L}$ der Lichtquelle L.
2. Bestimme das perspektive Bild $\overline{L'}$ des Grundrisses L'.
   (ε ist die Grundrisstafel !)
3. Bestimme das perspektive Bild $\overline{P'}$ des Grundrisses P'.
4. Der Schnittpunkt der Geraden durch $\overline{L}$, $\overline{P}$ mit der Geraden durch $\overline{L'}$, $\overline{P'}$ ist der gesuchte Schatten $\overline{P}_S$ von P im perspektiven Bild.

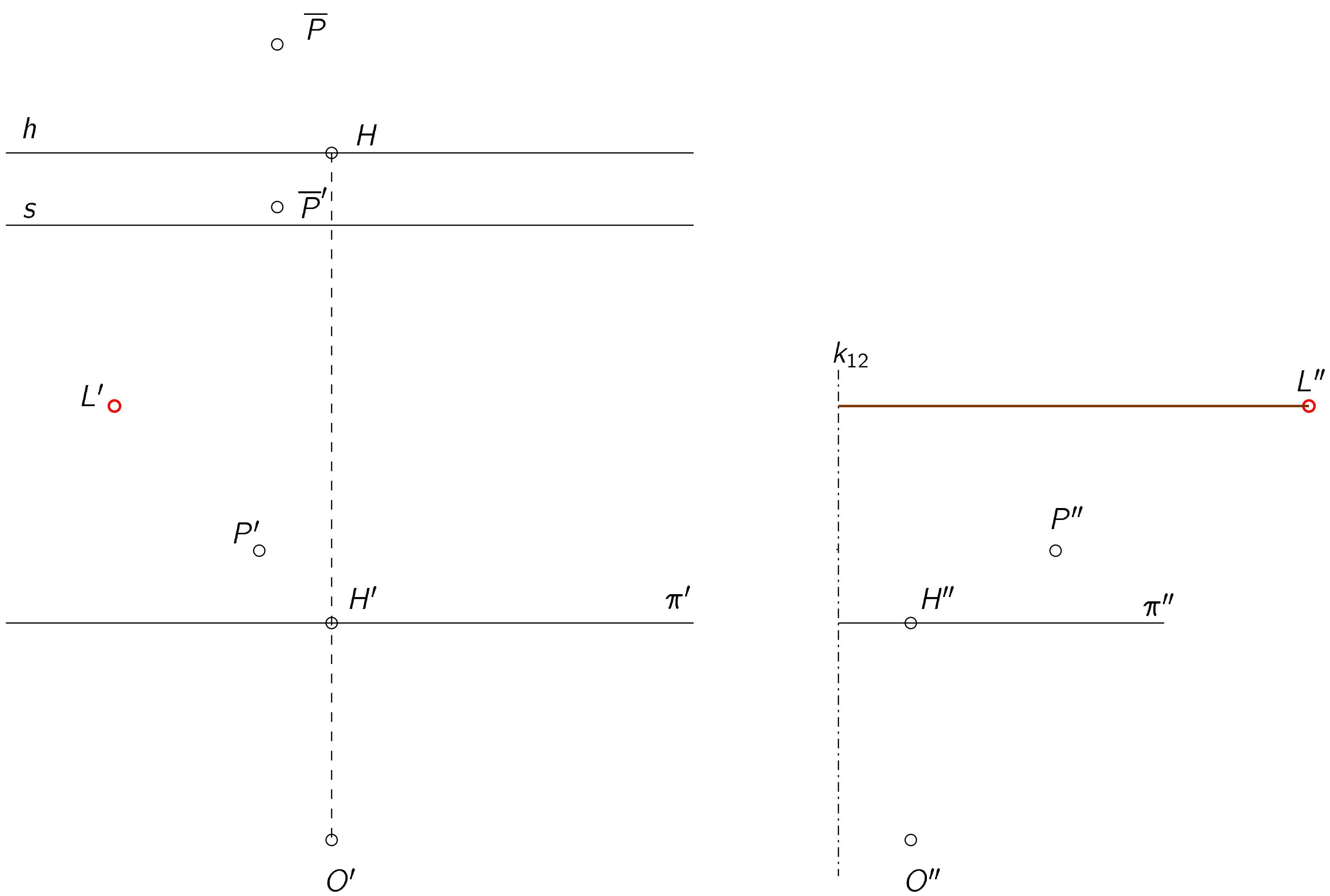
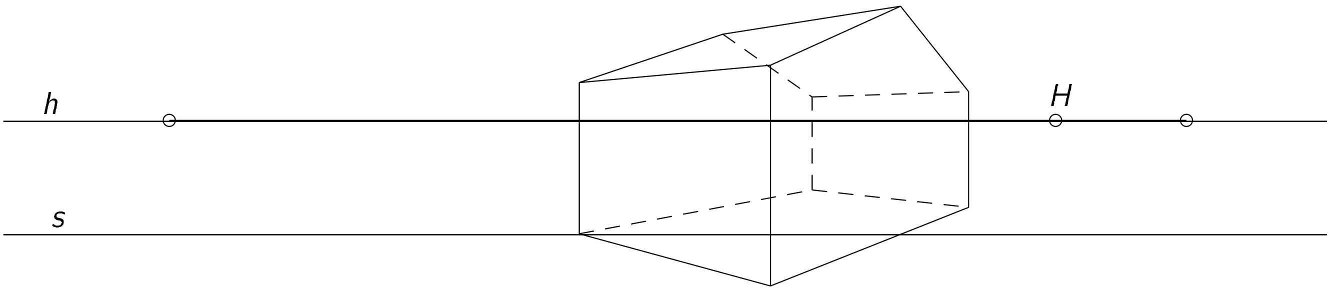


Abbildung 5.33: Schatten eines Punktes bei zentralem Licht

Aufgabe 5.10 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene. Die Lichtquelle ist durch den Punkt L gegeben.*



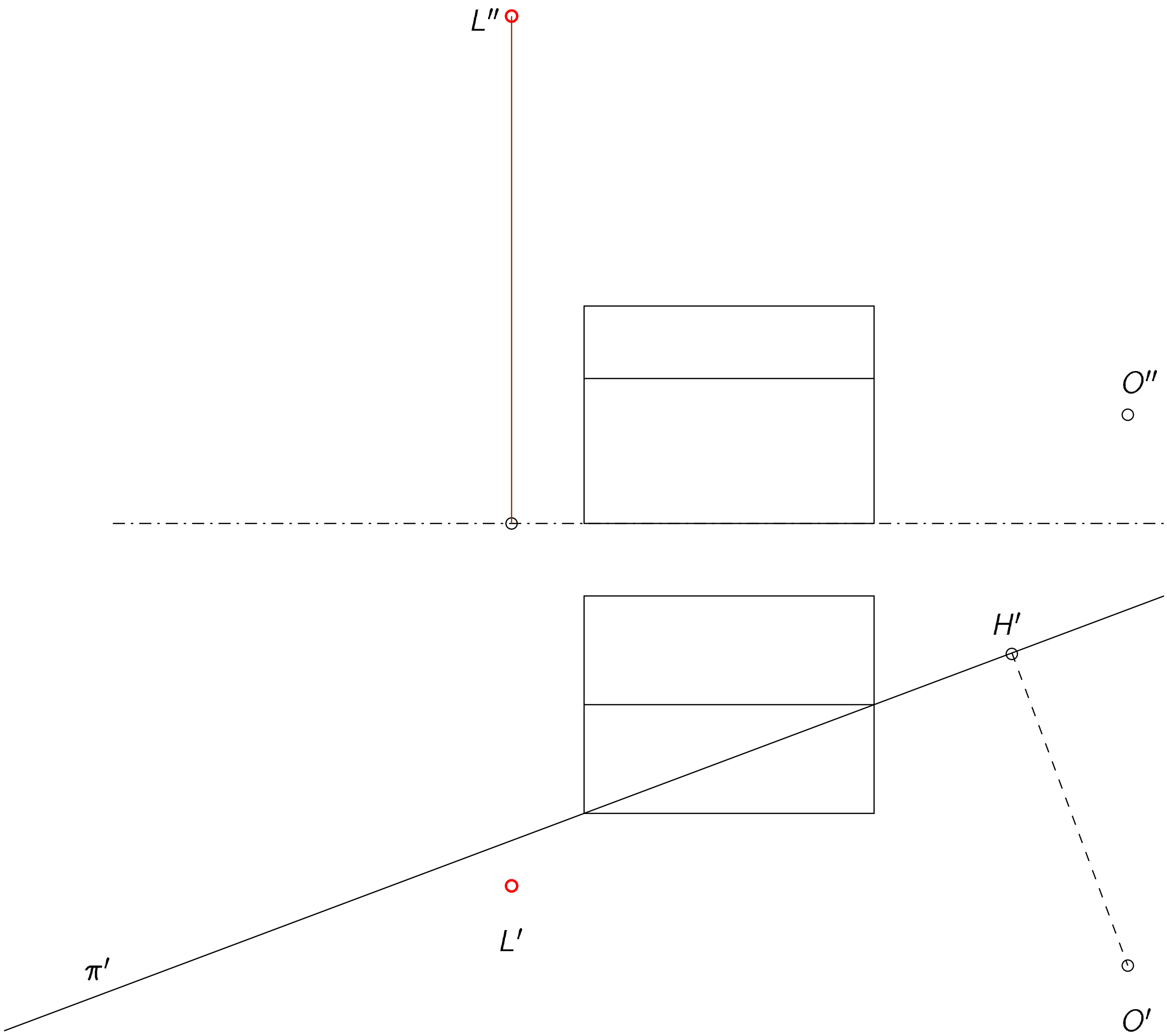


Abbildung 5.34: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Aufgabe 5.11 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei parallelem Licht (gegeben durch S und S_F).*
(Bei der Konstruktion des **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch P, P' und Lichtrichtung mit Hauswand/Dach.)*

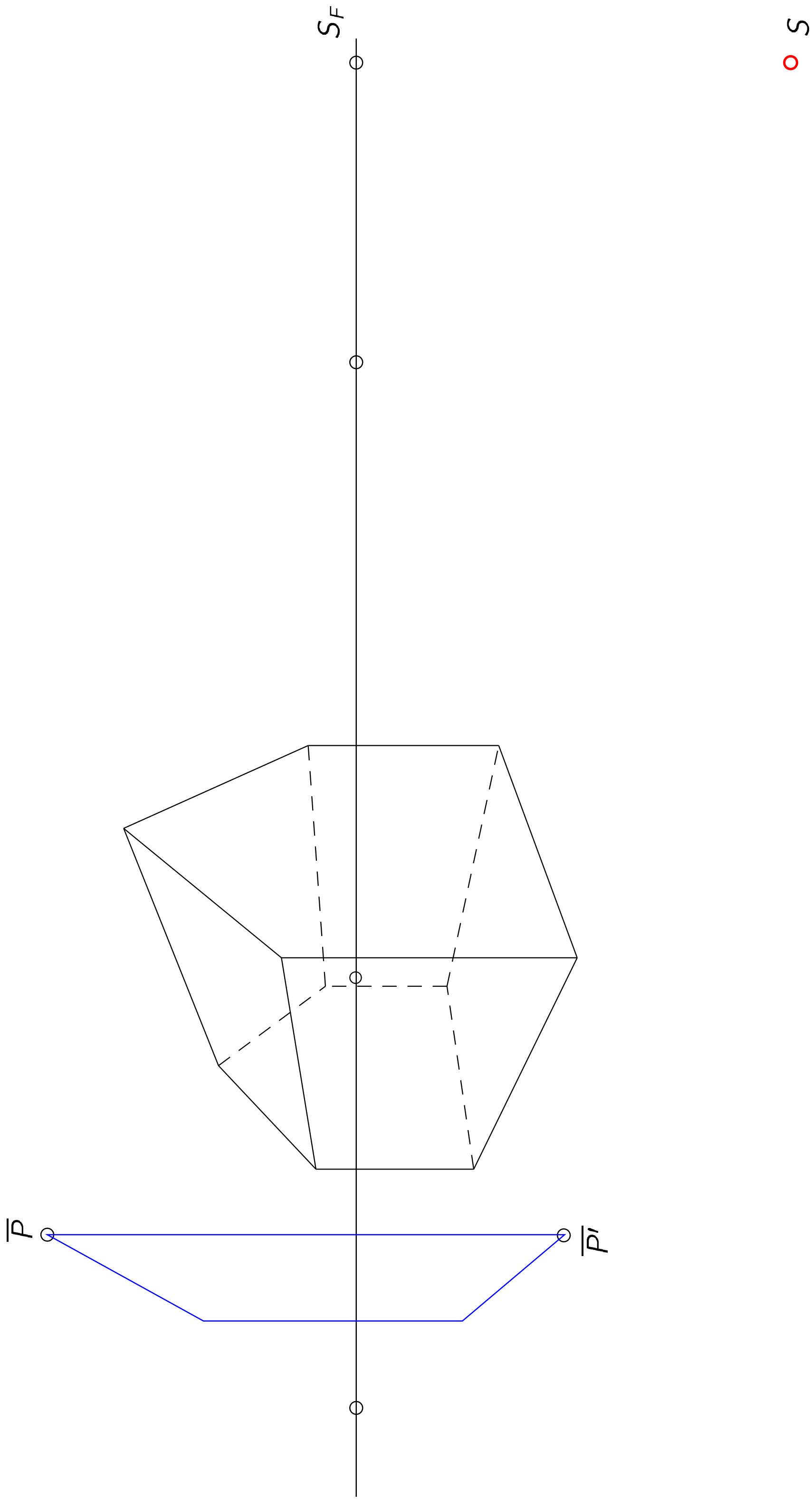


Abbildung 5.35: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei parallelem Licht

Aufgabe 5.12 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei zentralem Licht (gegeben durch $\overline{L}$ und $\overline{L'}$).*
(Bei der Konstruktion des **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch $\overline{P}$, $\overline{P'}$, $\overline{L}$ mit Hauswand/Dach.)*

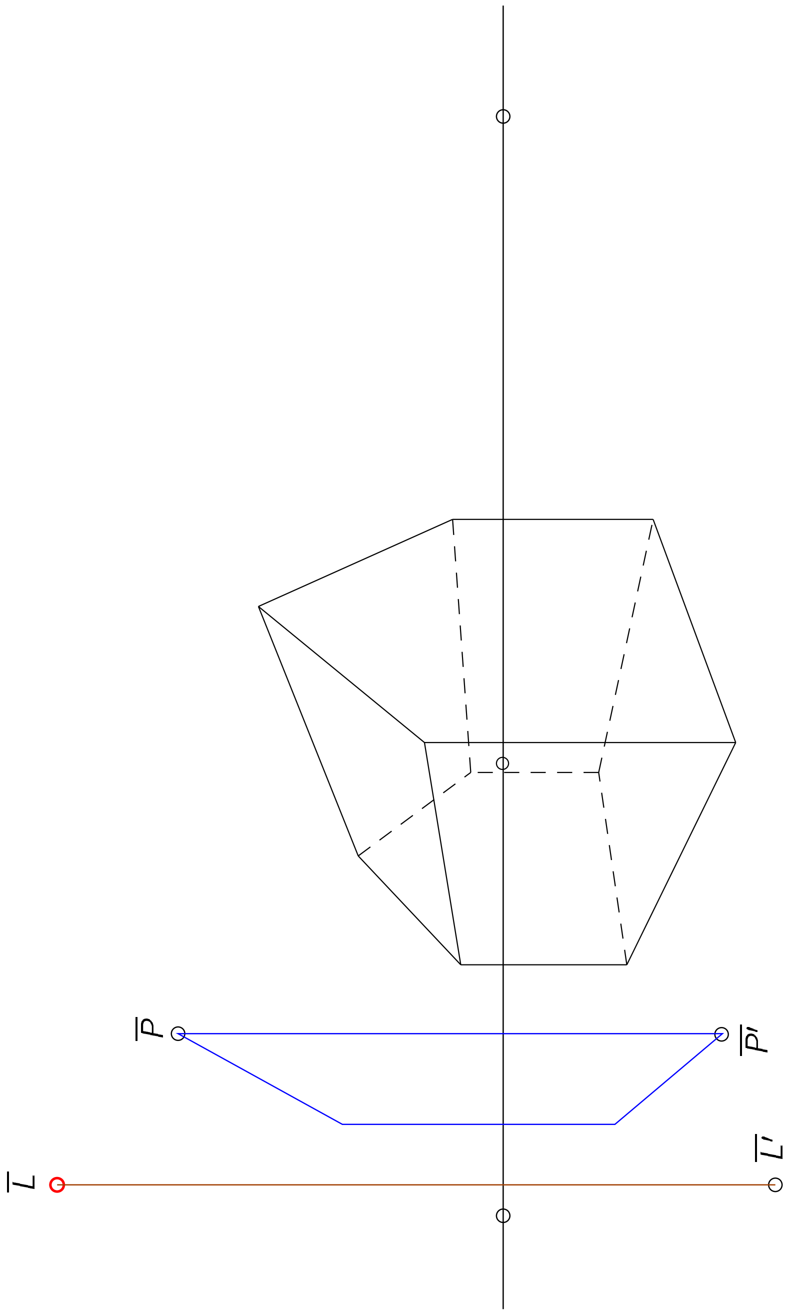


Abbildung 5.36: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei zentralem Licht

Aufgabe 5.13 *Konstruiere den Schatten einer Lagerhalle mit Laderampe und einem Schuppen bei parallelem Licht. Die Lichtrichtung ist durch die Punkte S und S_F gegeben.*

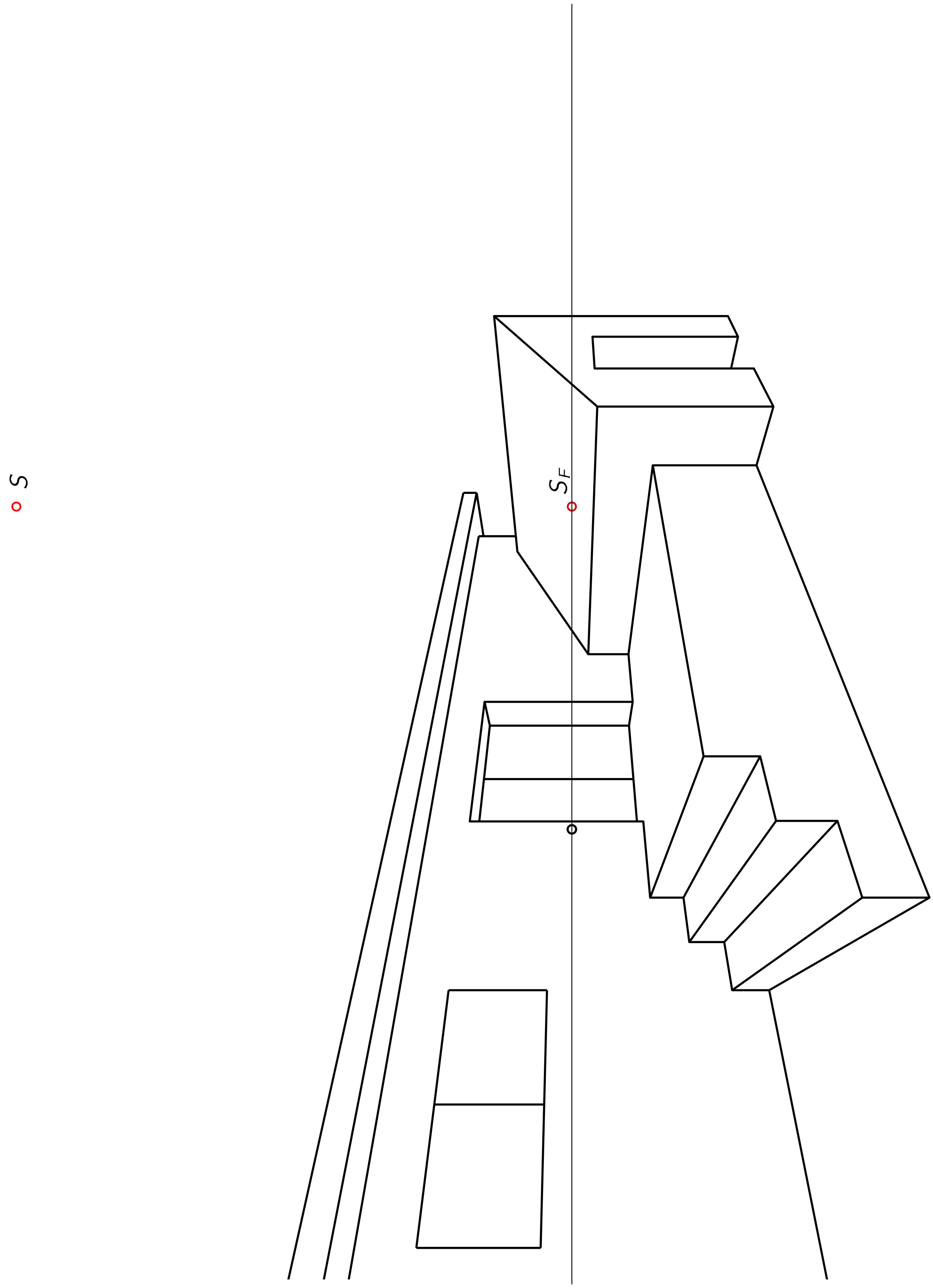


Abbildung 5.37: Schatten einer Lagerhalle mit Schuppen und Laderampe bei parallelem Licht

5.5 Perspektive bei geneigter Bildtafel

Bei der Projektion auf eine geneigte Bildtafel liegt der Fluchtpunkt der Vertikalen im „Endlichen“, d.h. die Bilder senkrechter Geraden sind jetzt nicht mehr parallel (wie es bei senkrechter Bildtafel der Fall war).
Die Grund**idee** zur Konstruktion eines perspektiven Bildes bei geneigter Bildtafel ist die gleiche wie im Fall einer senkrechten Bildtafel. Man konstruiert das Bild mit Hilfe von Grund- und Aufriss und den Fluchtpunkten.

Gegeben: a) QUADER in Grund- und Aufriss
b) Augpunkt O in Grund- und Aufriss
c) Bildtafel durch die Standlinie s (Schnitt mit der Grundrisstafel) und den Horizont h in Grund- und Aufriss.
Gesucht: das perspektive Bild des Quaders.

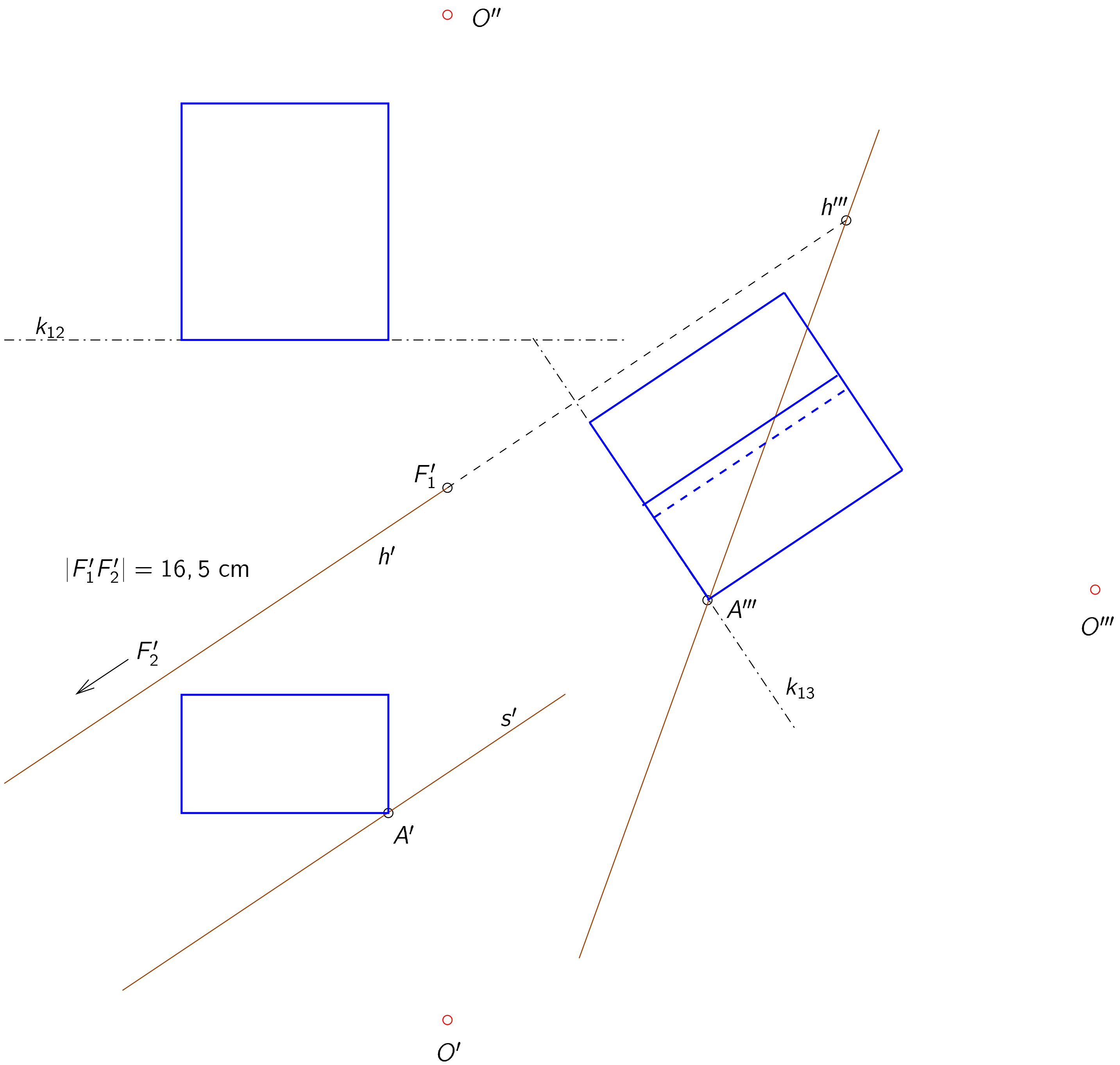


Abbildung 5.38: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel

Durchführung:

1. Zeichne einen neuen **Seitenriss**, in dem die Bildtafel π (der Zentralprojektion) projizierend ist. Die Bildtafel erscheint dann als Gerade.
2. Bestimme den Hauptpunkt H und die drei wesentlichen **Fluchtpunkte** F_1, F_2, F_3 in den Risstafeln π_1, π_3.
3. Übertrage das **Fluchtpunktdreieck** auf die Zeichenfläche, auf der das perspektive Bild entstehen soll. (Die Gerade $\overline{F_1F_2}$ ist der Horizont h. Der Abstand von F_3 zu h ergibt sich aus dem Seitenriss, den „seitlichen“ Abstand von F_3 zu F_1 (oder F_2) erhält man aus dem Grundriss.)
4. Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt der Höhen im Fluchtpunktdreieck.
5. Übertragen eines Punktes, z.B. Punkt A.
   (Abstand vom Horizont aus π_3, Abstand von $\overline{HF}_3$ aus π_1.)
6. "**Fluchten**" von A auf F_1, F_2, F_3.
7. Zeichnen der Bilder der **vertikalen Kanten** mit Hilfe der Fluchtpunkte und der Durchstoßpunkte K_1, K_2, K_3, K_4 der Kanten mit der horizontalen Ebene durch den Augpunkt (und Horizont). Die Bilder von K_1, K_2, K_3, K_4 liegen auf dem Horizont h !
8. Mit Hilfe des Spurpunktes einer Deckelgeraden findet man die restlichen Punkte.

h

Abbildung 5.39: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Forts.

Auch bei geneigter Bildtafel bringt **Architektenanordnung** wesentliche Erleichterungen:
Die Konstruktion erfolgt mit einer Bildebene in zwei Stellungen:

(1) geneigte Stellung der Bildebene, in welcher das Bild entsteht;

(2) senkrechte Stellung, in welche die Bildebene anschliessend gedreht wird.

Die Drehachse ist der Horizont.
Alle Projektionen **im Grundriss** gelten nur für die **Horizonthöhe**

Konstruktion eines Bildpunktes:

(1) Die Grundrissprojektion wird auf den Horizont gelotet und von dort die Fluchtlinie nach F_3 gezeichnet. Diese Fluchtlinie ist das Bild der Senkrechten, auf welcher der Punkt liegen muss.

(2) Im Seitenriss wird durch Projektion auf die geneigte Bildebene und anschließende Drehung die Höhe bestimmt.

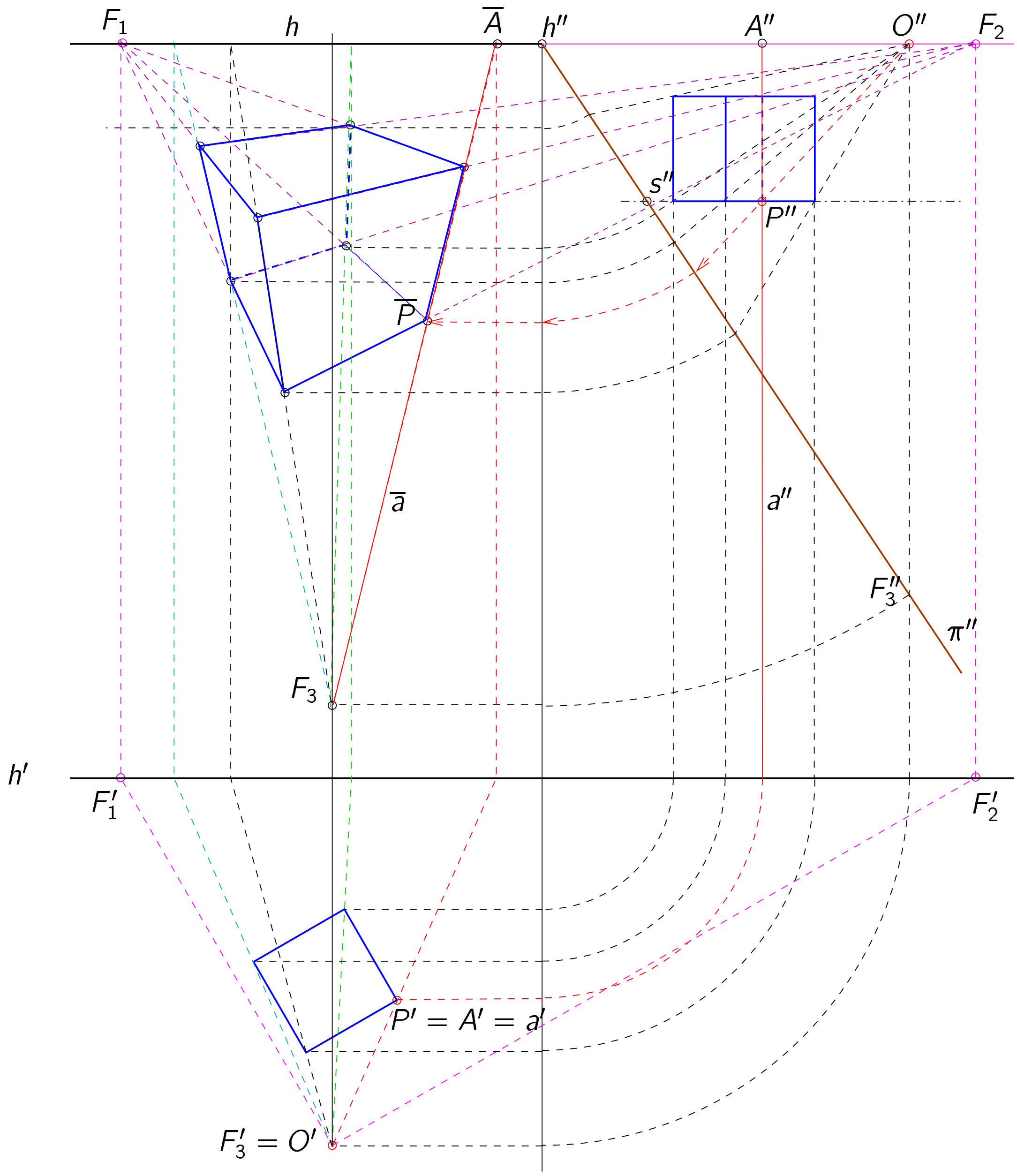


Abbildung 5.40: Zentralprojektion eines Quaders bei geneigter Bildtafel: Lösung

Aufgabe 5.14 *Zeichne den Quader in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

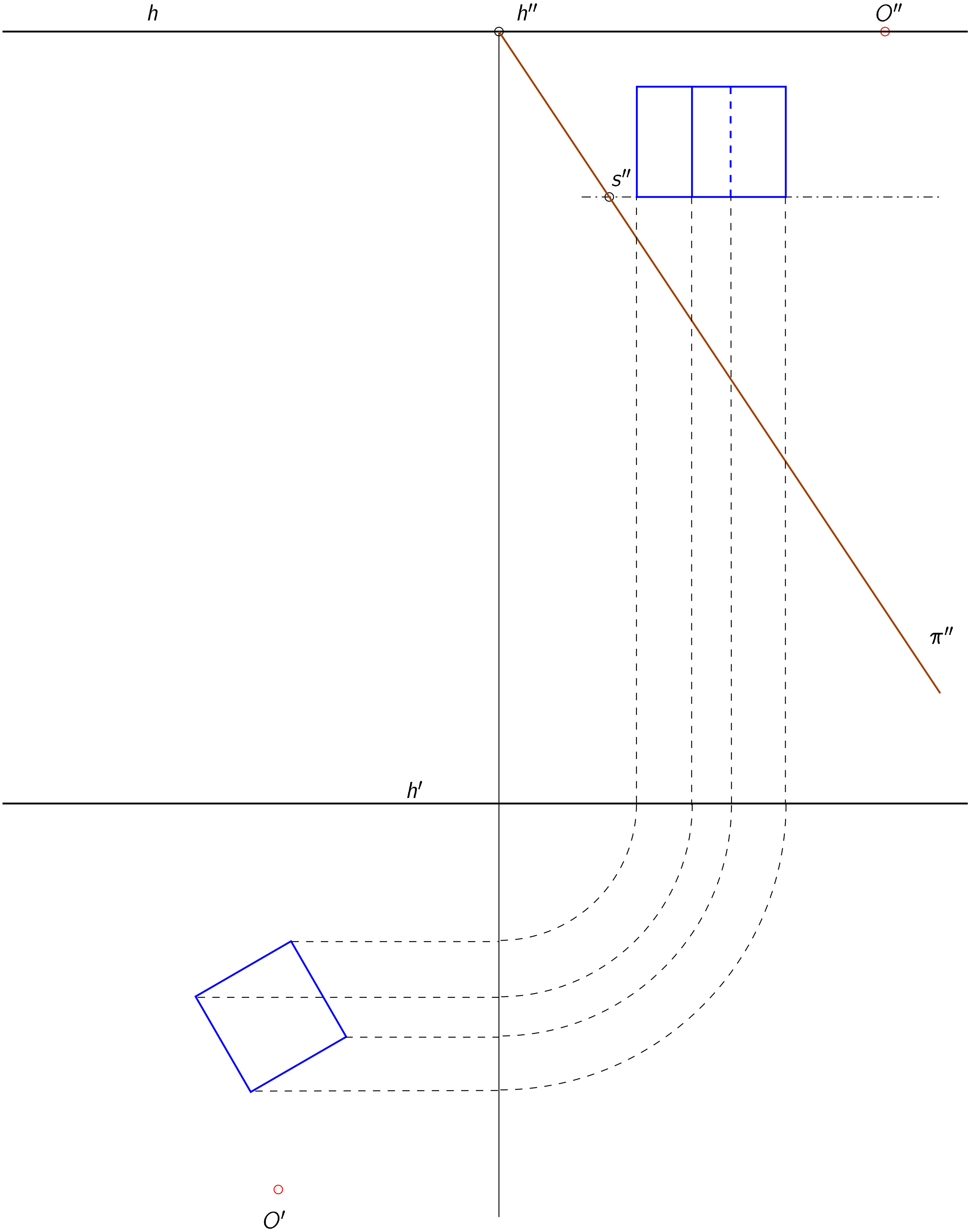


Abbildung 5.41: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Architekten-Anordnung

Aufgabe 5.15 *Zeichne den Turm in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

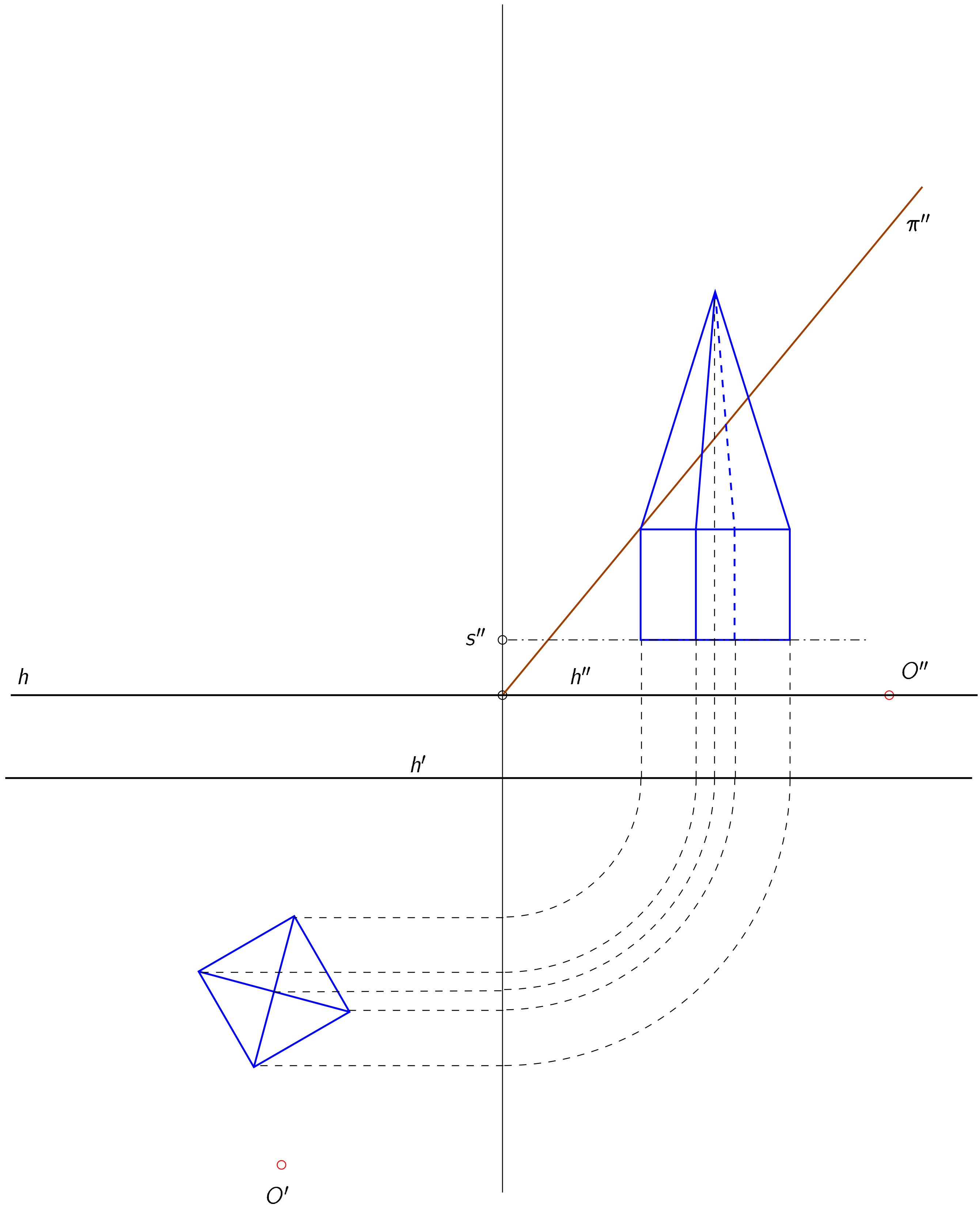


Abbildung 5.42: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Turm

5.6 Rekonstruktionen

(s. LEO S. 225,242)

Bisher sind wir von einem in Grund– und Aufriss gegebenen Objekt ausgegangen und haben dazu das perspektive Bild konstruiert. Nun soll die umgekehrte Aufgabe behandelt werden: Es ist ein perspektives Bild (z. B. eine Photographie) gegeben und es sollen **wahre Abmessungen** von Figuren des perspektiven Bildes bestimmt werden. Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe weiterer Informationen möglich. Wir wollen hier zunächst relativ starke Voraussetzungen machen und später Rekonstruktionen aus Photographien behandeln.

5.6.1 Rekonstruktion bei Standardanordnung und senkrechter Bildtafel

In diesem Abschnitt machen wir stets die folgenden

Annahmen:
Es sei ein perspektives Bild mit senkrechter Bildtafel gegeben und
Horizont h, **Hauptpunkt** H, **Standlinie** s und **Distanz** d sind bekannt.
Zum **Beispiel**:
Gegeben: perspektives Bild eines Hauses (Abb. 5.43).
Gesucht: die wahren Abmessungen. (s. Aufgabe 5.18)

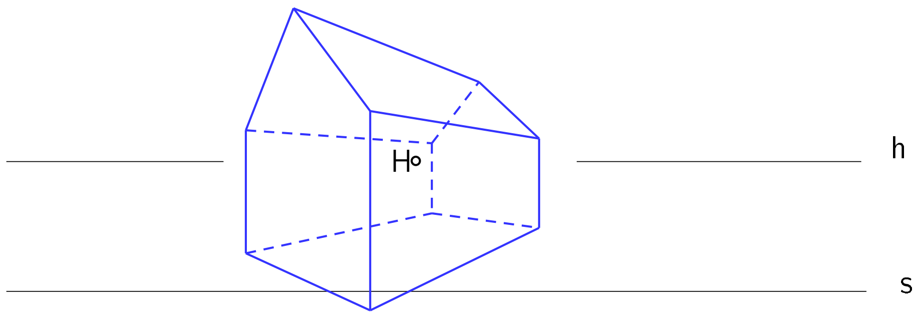


Abbildung 5.43: Beispiel zu *wahre Abmessungen* eines Hauses

5.6.1.1 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S. 226)

Gegeben: das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden g.
Gesucht: die wahre Länge der Strecke.

Bei der Zweitafelprojektion haben wir die Strecke, deren wahre Länge bestimmt werden soll, parallel zu einer der Risstafeln gedreht und konnten dann die wahre Länge in der anderen Risstafel ablesen. Bei Zentralprojektion genügt das Paralleledrehen zur Bildtafel nicht, da bei der *Zentral*-Projektion die Länge verändert wird, es sei denn die gedrehte Strecke liegt schon in der Bildtafel.

Idee für den Fall, dass die **Strecke in der Standebene** (Grundrissebene) liegt:
Man denkt sich die Strecke AB um den Spurpunkt S_g (der Geraden g durch A, B) mit senkrechter Drehachse in die Bildtafel auf die Standlinie s gedreht (s. Abb. 5.44). Da eine Drehung im perspektiven Bild nur schwer darstellbar ist, denkt man sich eine Parallelprojektion aus, die dasselbe bewirkt. Den zugehörigen Fluchtpunkt nennt man **Messpunkt** M_g. Er ist für alle zu AB parallelen Strecken gleich. Im Falle einer horizontalen Strecke, wie hier angenommen, liegt M_g auf dem Horizont und wird gemäß Abb. 5.44 bestimmt.

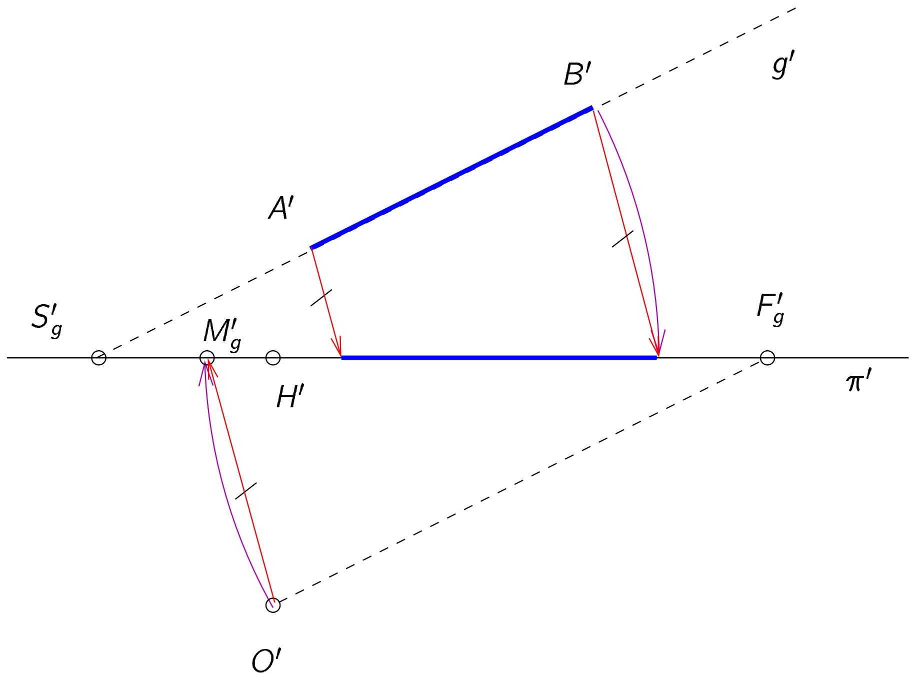


Abbildung 5.44: Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

Da wir aber den Grundriss nicht als bekannt voraussetzen, müssen wir den Messpunkt im perspektiven Bild bestimmen.

Durchführung für den Fall einer **horizontalen** Strecke in der **Standebene**:

1. Zeichne den Fluchtpunkt F_g der Geraden g.
2. Zeichne über oder unter dem Hauptpunkt im Abstand d (Distanz) O' und drehe O' um F_g auf den Horizont h. Dadurch erhält man den **Messpunkt** M_g.
3. Die Projektion der Strecke $\overline{AB}$ von M_g aus auf die Standlinie liefert die wahre Länge der Strecke.

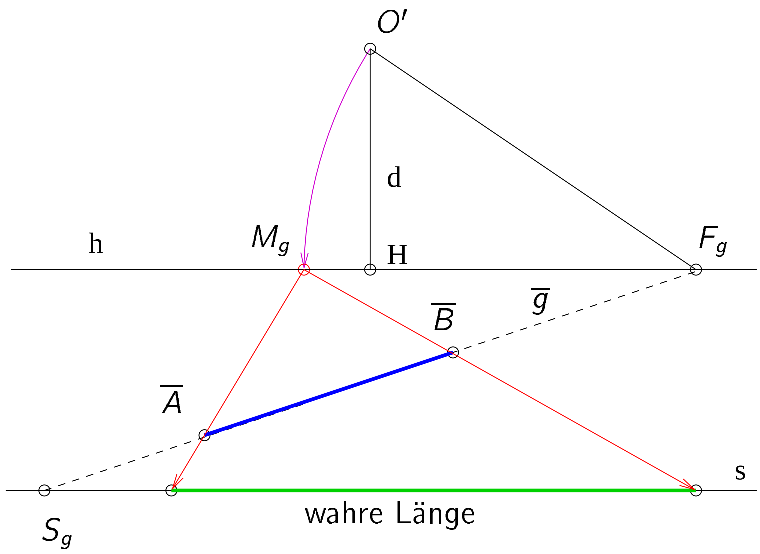


Abbildung 5.45: Bestimmung der wahren Länge einer Strecke

Aufgabe 5.16 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.46 gegebenen Strecke, die in der Standebene liegt. Die Distanz sei $d = 4cm$.*

Distanz $d = 4$cm

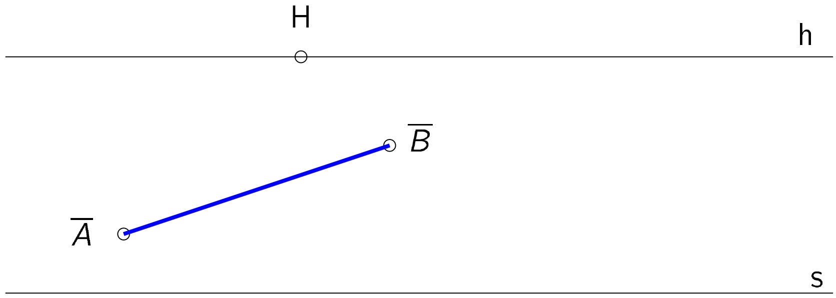


Abbildung 5.46: Bestimmung einer wahren horizontalen Länge

Bemerkung: Falls die Standlinie zu nahe am Horizont liegt (s. Fig **??**) , besteht die Gefahr von *schleifenden Schnitten*. In diesem Fall sollte man die Länge einer zu $\overline{AB}$ parallelen Strecke (im Raum) unter oder über der gegebenen Strecke bestimmen. Bei einem Haus verwendet man oft den **Kellergrundriss** oder einen Riss in Traufkantenhöhe.

Falls die Strecke $\overline{AB}$ **parallel zur Bildtafel** liegt, kann man den Messpunkt M_g **beliebig** auf dem Horizont h wählen. Es muss nur von der Ebene ε durch A, B, deren Fluchtgerade f_ε den Messpunkt M_g enthält, auch die Spurgerade s_ε bekannt oder konstruierbar sein. Dann projiziert man die Strecke $\overline{AB}$ von M_g aus auf s_ε.

Aufgabe 5.17 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.47 gegebenen Strecken, die parallel zur Bildtafel π sind. A, B, C liegen in der Standebene.*

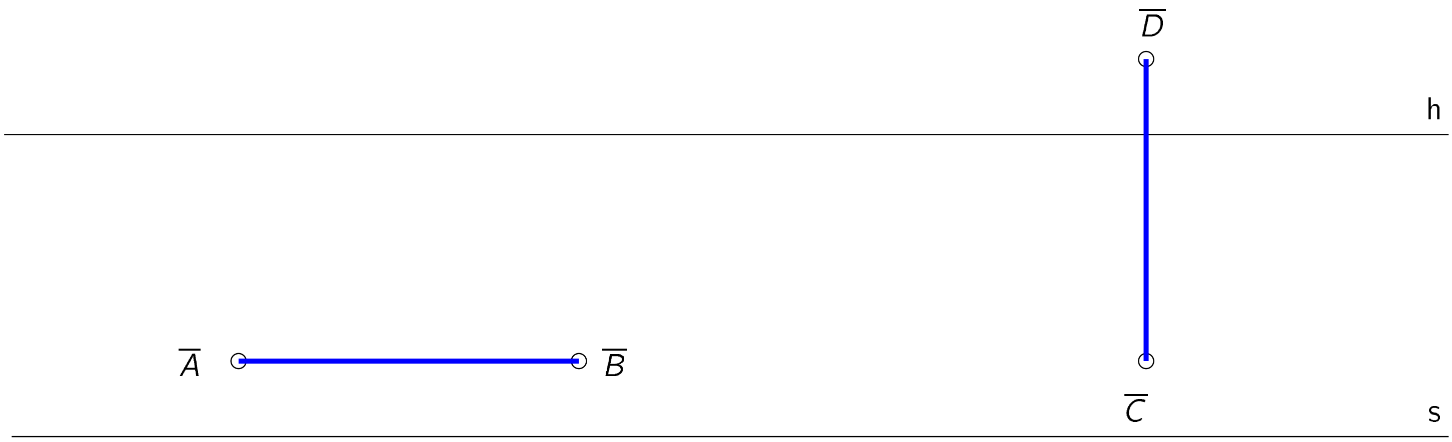


Abbildung 5.47: Bestimmung einer wahren horizontalen/senkrechten Länge: A, B, C liegen in der Standebene

Aufgabe 5.18 *Bestimme die wahren Abmessungen des in Abb. 5.48 gegebenen Hauses. (Die Distanz ergibt sich aus den horizontalen Fluchtpunkten mit Hilfe eines Thaleskreises.)*

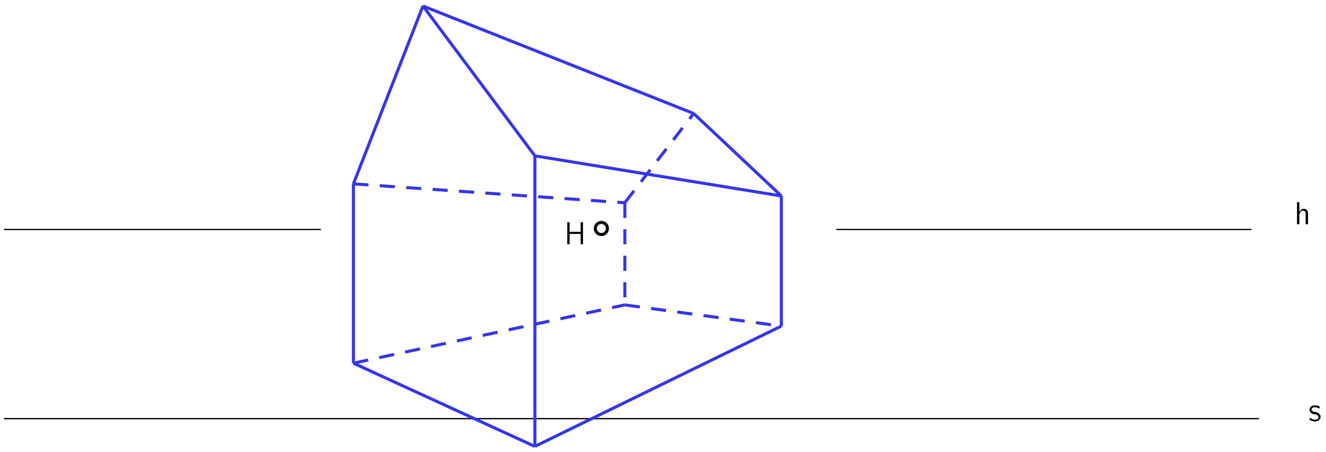


Abbildung 5.48: Bestimmung der wahren Abmessungen eines Hauses

Mit Hilfe des Messpunktes M_g einer Geraden g lässt sich auch auf g eine **wahre Länge antragen**.

Aufgabe 5.19 *Ergänze in dem perspektiven Bild eines Hauses eine Tür links von dem Punkt A. Breite der Tür: 2cm, Höhe: 3cm. Füge senkrecht zu dem vorhandenen Haus rechts hinten einen Anbau mit derselben Traufhöhe, der Firsthöhe 6.5cm, Breite 6cm, Länge 4cm hinzu.*

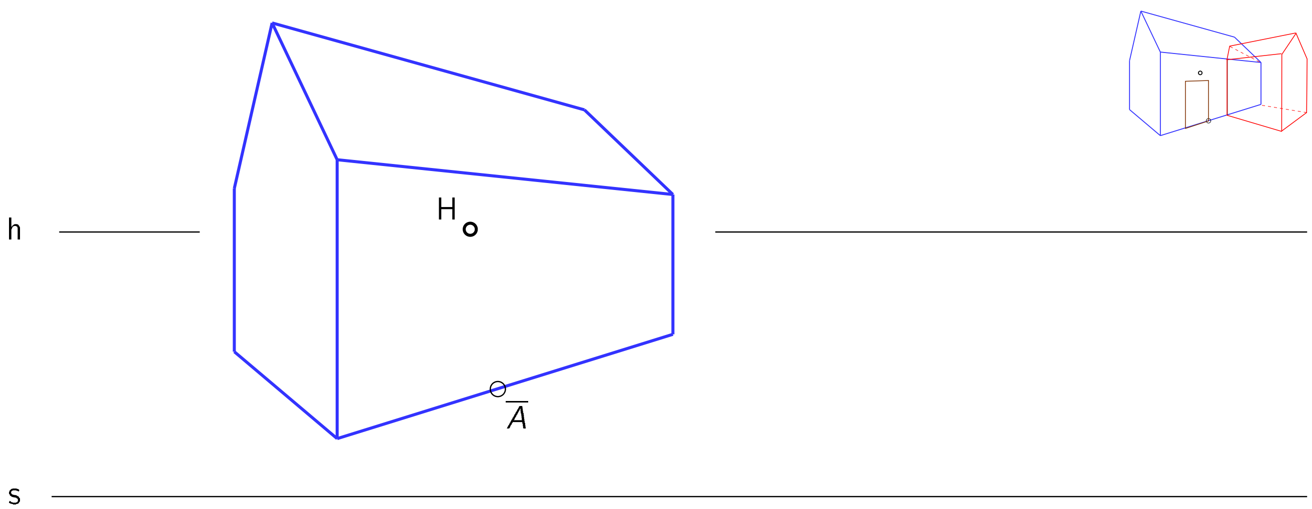


Abbildung 5.49: Antragen wahrer Längen: Tür und Anbau

5.6.2 Bestimmung der äußeren Orientierung

Unter der **äußeren Orientierung** einer Zentralprojektion versteht man die Lage des Augpunktes und der Bildtafel relativ zu dem Objekt, das abgebildet wird.

Um die äußere Orientierung bei bekannter Standardanordnung zu bestimmen, kehrt man die in Abschnitt 5.1.3 beschriebene Methode "Architektenanordnung" um.

Durchführung:

1. Zeichne unter– oder oberhalb des perspektiven Bildes eine Parallele π' zum Horizont h. π' ist der Grundriss der **Bildtafel** (Architektenanordnung !).
2. Übertrage den **Hauptpunkt** H und alle notwendigen **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Der Grundriss O' des **Augpunkt**es liegt auf dem Lot zu π' in H' im Abstand d , der **Distanz**.
3. **Rekonstruktion** einer **Gerade**, die in der Standebene liegt:
   Bestimme (falls nicht schon in 2. geschehen) die Grundrisse F_g', S_g' des Flucht– bzw. Spurpunktes der Geraden g. g' ist dann eine Parallele zu $O'F_g'$ durch S_g'.
4. **Rekonstruktion** eines **Punktes** P, der in der Standebene liegt:
   Zeichne $\overline{P'}$ mit Hilfe des Lotes von $\overline{P}$ auf π' und den Grundriss des Projektionsstrahls (Gerade $O'\overline{P'}$).
   Mit Hilfe des Grundrisses einer weiteren Gerade durch P (z.B. Tiefenlinien oder Hauskanten,...) erhält man schließlich P'.
5. Ein Punkt, der nicht in der Standebene liegt, lässt sich analog rekonstruieren, falls sein Grundriss im perspektiven Bild bekannt oder konstruierbar ist. Die Höhe eines solchen Punktes erhält man über deren "wahre Länge" (s. Anfang dieses Abschnitts).

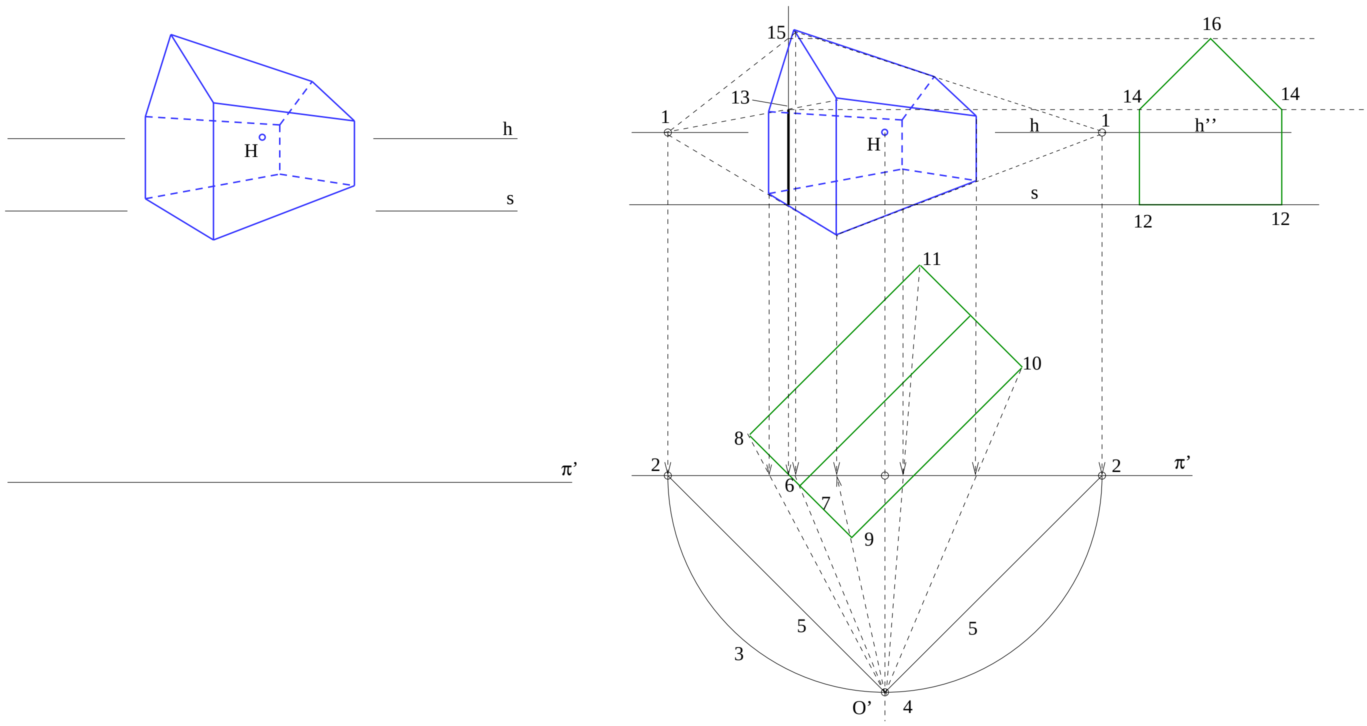


Abbildung 5.50: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses: Lösungsschritte 1–16

Aufgabe 5.20 *Rekonstruiere Grund- und Aufriss eines Hauses.*

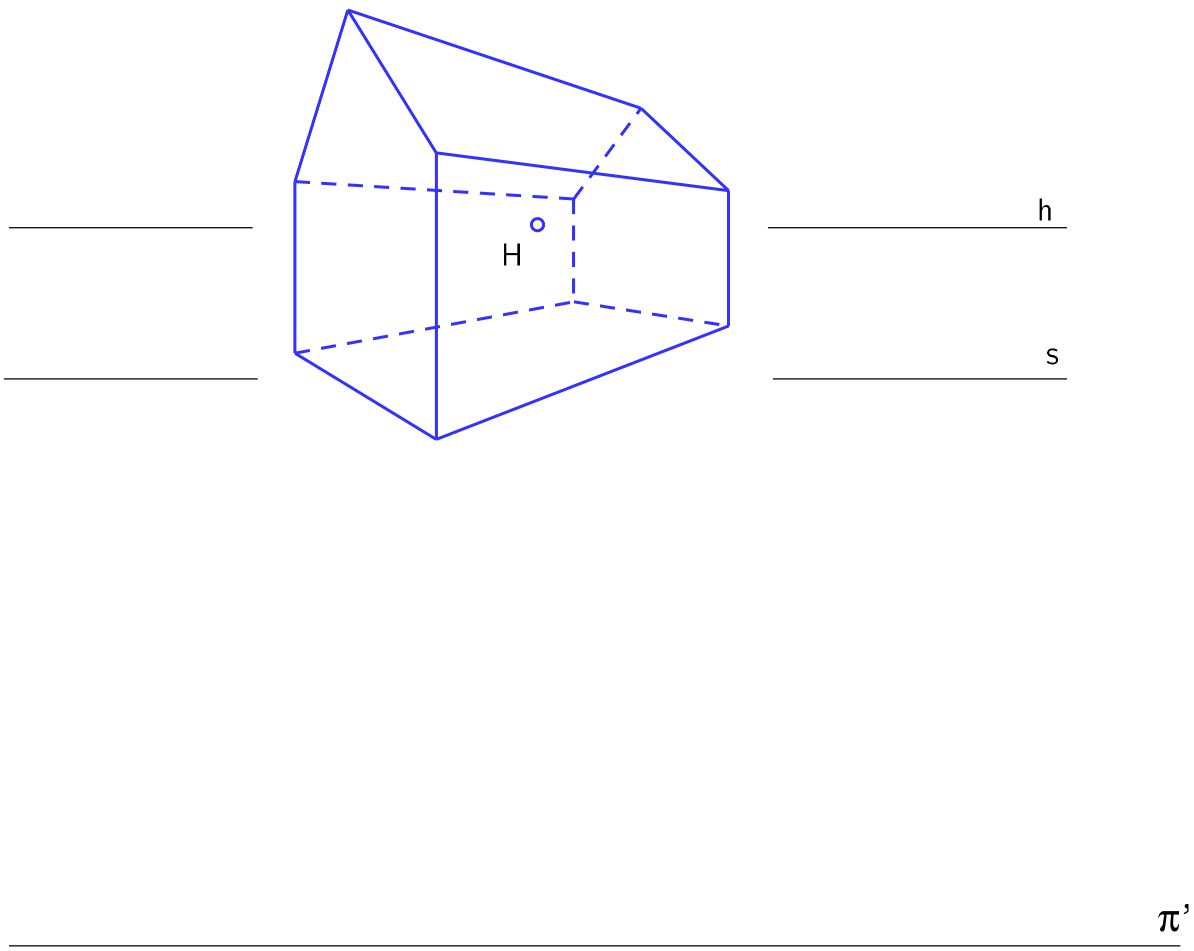


Abbildung 5.51: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses

5.6.3 Rekonstruktion aus Photographien

Um aus einer Photographie ein Objekt rekonstruieren zu können, benötigt man weitere Informationen. Z.B.: wahre Längen, wahre Winkel (insbesondere *rechte* Winkel). Damit wir die uns bekannten Methoden für den Fall "Standardanordnung bei senkrechter Bildtafel" verwenden können, wollen wir solche Informationen voraussetzen, die uns erlauben, die Standardanordnung zu erkennen.

Möglichkeiten zur **Bestimmung der Standardanordnung aus einem Photo**:

a) Die **Bildtafel** steht **senkrecht**, wenn vertikale Geraden im Bild parallel sind.

b) Lage des **Hauptpunktes**:
   - b1) Liegt eine *vollständige* Photographie (kein Ausschnitt !) vor, so ist der Hauptpunkt der Mittelpunkt der Photographie (Schnittpunkt der Diagonalen).
   - b2) Ist das Bild eines *vertikalen Rechtecks* (z.B. Hausfront oder Fenster) wieder ein Rechteck, so sind die Bilder der zu diesem Rechteck senkrechten Geraden Tiefenlinien und ihr Schnittpunkt ist der Hauptpunkt.

c) Der **Horizont** ist die Gerade durch die Fluchtpunkte zweier *horizontaler Geraden* oder das Lot zu dem Bild einer *Vertikalen* durch einen "*horizontalen*" Fluchtpunkt.

d) Bestimmung der **Distanz**:
   - d1) Sind *Hauptpunkt* und die Fluchtpunkte F_1, F_2 zweier *horizontaler*, zueinander *senkrechter* Geraden (z.B. Hauskanten) bekannt, so lässt sich die Distanz mit Hilfe des THALES-Kreises über F_1, F_2 bestimmen (s. Aufgabe 5.21).
   - d2) Sind der *Hauptpunkt* und von einer *horizontalen* Gerade g der *Fluchtpunkt* F_g und der *Winkel* α_g, den g mit der Bildtafel einschließt, bekannt, so lässt sich im Grundriss mit Hilfe von H', F_g' und α_g der Augpunkt O' und damit die Distanz d bestimmen (s. Aufgabe 5.22).

e) Die **Standlinie** lässt sich meistens aus der Kenntnis einer *wahren Länge* bestimmen (s. 5.52) . Falls eine wahre Länge nicht bekannt ist, kann man die Standlinie "geeignet" wählen. Man erhält dann die Rekonstruktion allerdings nur bis auf *Ähnlichkeit*.

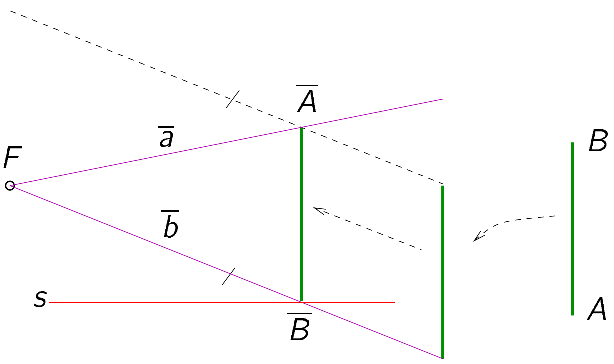


Abbildung 5.52: Rekonstruktion der Standlinie bei bekannter senkrechter Strecke (s. Abb. 5.53)

Aufgabe 5.21 :
Gegeben: Die "vollständige Photographie" eines Hauses und die wahre Höhe der Tür (Abb. 5.53).
Gesucht: Die wahren Abmessungen (Länge, Breite, Traufhöhe, Firsthöhe).
Hinweis: Verwende b1), c), d1), e).

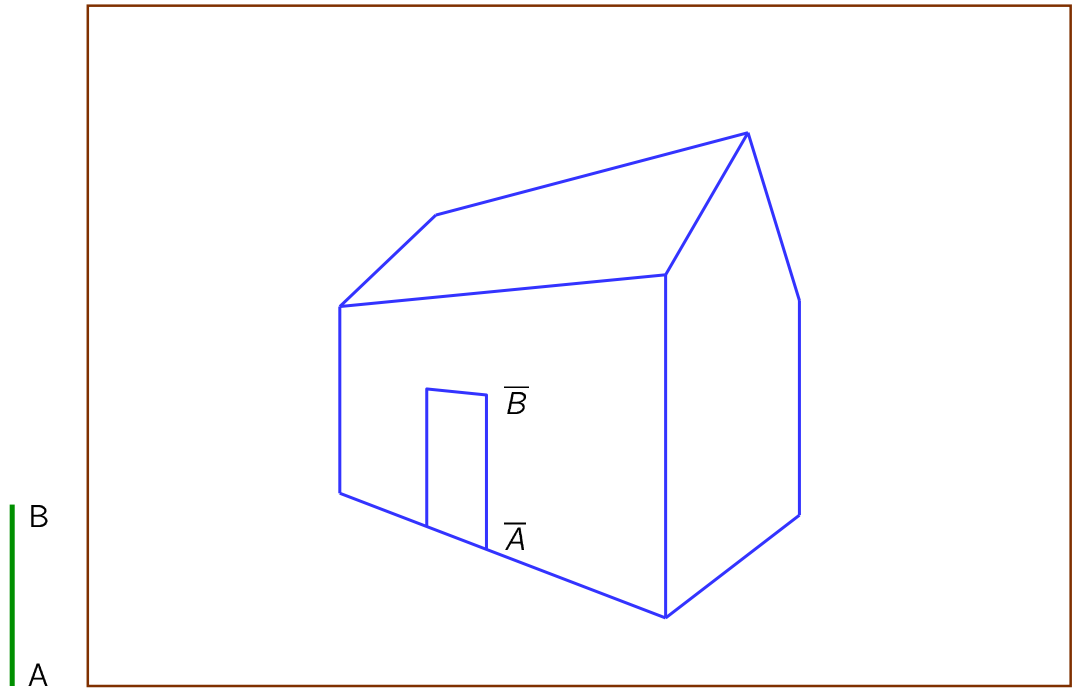


Abbildung 5.53: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses aus einer Photographie

Aufgabe 5.22 :
Gegeben: Das perspektive Bild eines Hauses und die wahre Gestalt des rechteckigen Vorgartens (Abb. 5.54).
Gesucht: Die wahren Abmessungen des Hauses. Rekonstruiere Grund– und Aufriss.
Hinweis: Verwende b2), c), Fluchtpunkt F_d der Vorgartendiagonalen und die wahre Gestalt des Vorgartens.

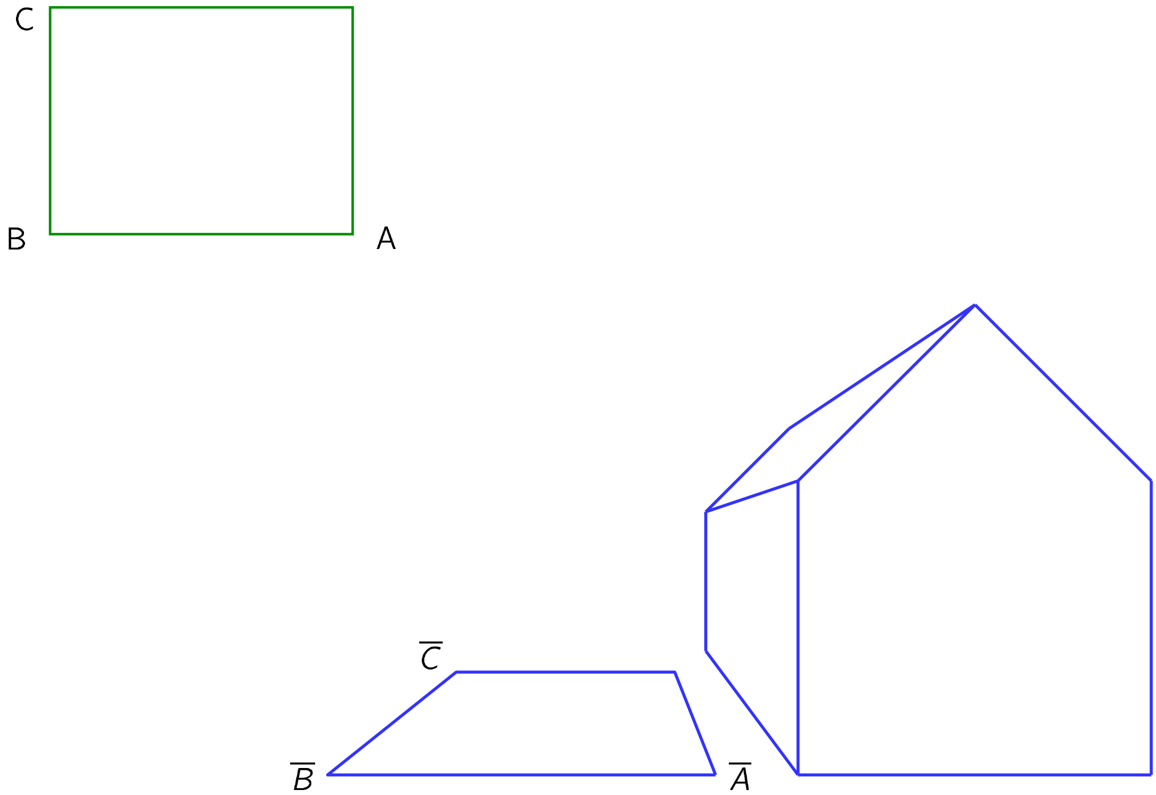


Abbildung 5.54: Wahre Abmessungen eines Hauses bei bekanntem Vorgarten

In dem folgenden Beispiel liefern die horizontalen Hauskanten zwei Fluchtpunkte F_1, F_2, die zwei zueinander senkrechten Richtungen entsprechen. Der Grundriss O' des **Augpunktes** liegt dann auf dem THALES-Kreis über der Strecke $F_1'F_2'$. Die Diagonale des Vorgartens liefert einen weiteren Fluchtpunkt F_3 auf dem Horizont. Da der Winkel α, den die Diagonale mit der zu F_2 gehörenden Richtung einschließt, bekannt ist, muss O' auf dem Thaleskreis so bestimmt werden, dass der Winkel zwischen $O'F_2'$ und $O'F_3'$ gleich α ist.

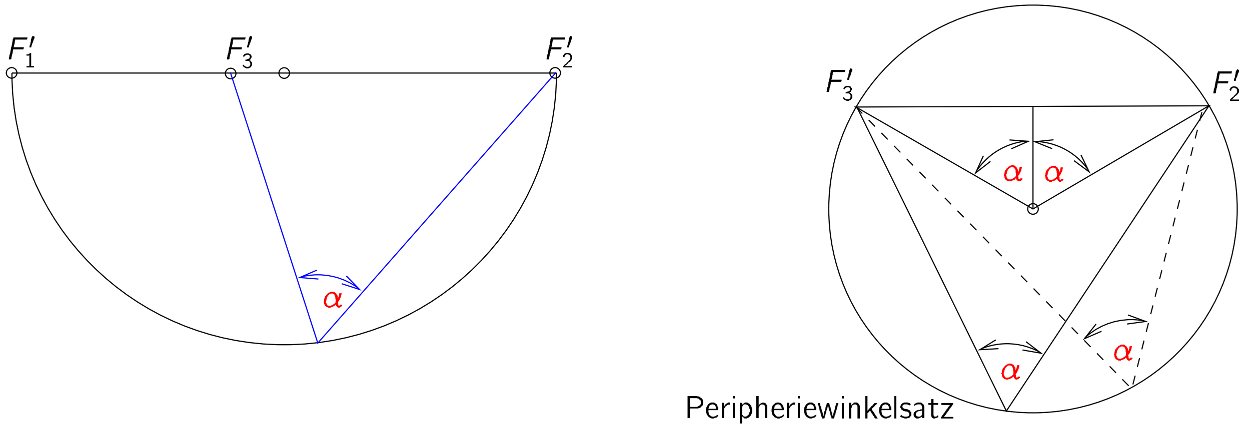


Abbildung 5.55: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten

Idee: Man konstruiere einen Kreis durch F_2', F_3', dessen Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten zu F_2', F_3' liegt und für den der „Zentriwinkel“ zwischen $F_2'M$ und MF_3' gleich 2α ist. Wegen der Gültigkeit des „Peripherie-winkel-Satzes“ ist dann O' der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Thales-Kreis über F_1', F_2'.

Durchführung:

1. Errichte die **Mittelsenkrechte** zu F_2', F_3'.
2. Trage in F_2' den **Winkel** α nach „unten rechts“ an.
3. Errichte in F_2' das **Lot** auf den „neuen“ Schenkel.
   Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Mittelsenkrechten liefert den **Mittelpunkt** M des Kreises k durch F_2', F_3'.
4. der Schnittpunkt des Kreises k mit dem THALES-Kreis ist O'.

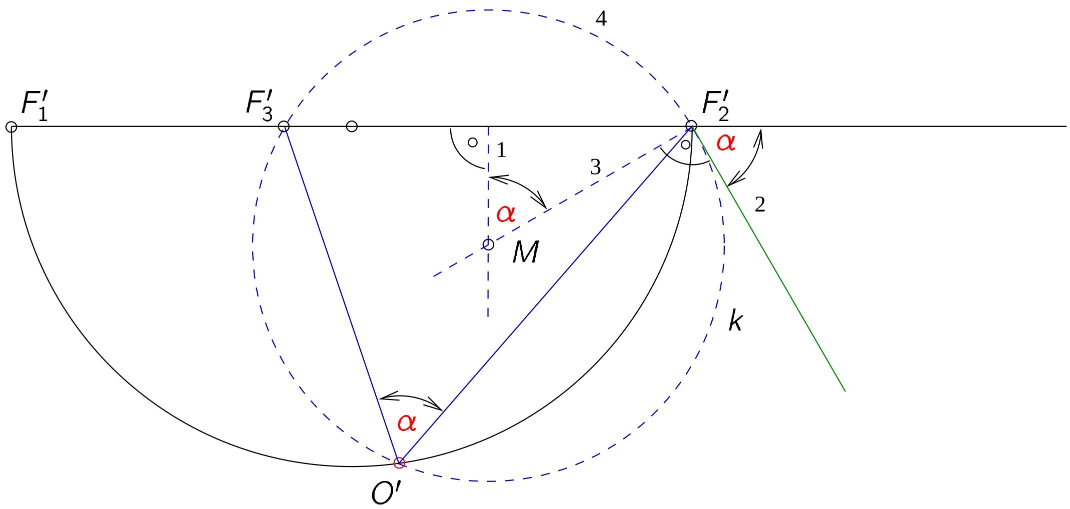


Abbildung 5.56: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten

Aufgabe 5.23 :
Gegeben:Das perspektive Bild eines Hauses mit Vorgarten und die wahre Gestalt des Vorgartens.
Gesucht: Horizont, Hauptpunkt, Distanz, Standlinie und die wahren Abmessungen des Hauses.
Hinweis: Verwende c), b3), d1), e).

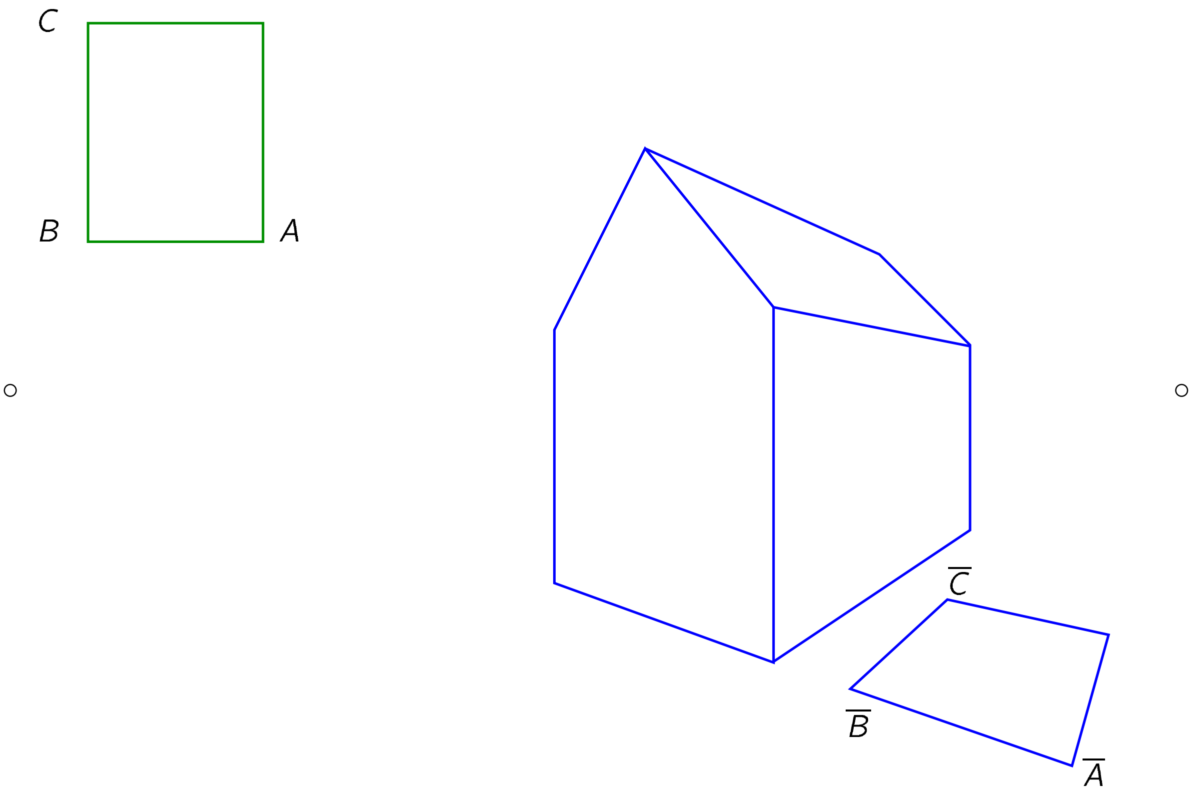


Abbildung 5.57: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten: Beispiel

Wir betrachten nun den Fall, dass zwei Fluchtpunkte F_1, F_2 zu zwei zueinander orthogonalen horizontalen Richtungen (wie im vorigen Fall) und ein Fluchtpunkt F_d einer **nicht horizontalen** Richtung bekannt sind. F_d soll der Fluchtpunkt der Diagonalen eines **vertikalen** Rechtecks, dessen wahre Gestalt bekannt ist, sein. Damit sind der Steigungswinkel α der Rechteckdiagonalen und der Fluchtpunkt F_d bekannt. Der Augpunkt muss wieder im (Hilfs-)Grundriss auf dem Thaleskreis über F_1, F_2 liegen. Führen wir das Antragen eines Steigungswinkels aus Fig. 5.21 rückwärts aus, so finden wir einen weiteren Kreis (im Grundriss) auf dem O' liegen muss (s. Fig. 5.58)

Durchführung: (s. LEO S. 246)

1. Bestimme die horizontalen Fluchtpunkte F_1, F_2 und zeichne F_1', F_2' mit dem zugehörigen **Thaleskreis** k in einen Grundriss.
2. Zeichne die **Fluchtgerade** f der senkrechten Ebene, die das vertikale Rechteck enthält. Der Schittpunkt mit der Diagonalen ist der **Fluchtpunkt** F_d.
3. Trage in F_d den (wahren) **Winkel** α an und schneide den neuen Schenkel mit dem Horizont h. Der Schittpunkt sei M (M ist dann auch der **Messpunkt** der horizontalen Richtung des vertikalen Rechtecks).
4. Schneide (im Grundriss) den Kreis mit dem Mittelpunkt f' (Im Beispiel unten ist dies F_2') durch M' mit dem Thaleskreis k. Der Schnittpunkt ist der Grundriss O' des **Augpunkt**s.
5. Das Lot von O' auf π' ist der Grundriss H' des **Hauptpunkt**s.. Zeichne H auf h.
6. Mit Hilfe des Messpunktes M bestimmt man in "üblicher Weise" die Standlinie s.

Aufgabe 5.24 :
Gegeben: Das perspektive Bild eines Hauses und die wahre Gestalt einer Hauswand (Abb. 5.58).
Gesucht: Die wahren Abmessungen des Hauses.
Hinweis: Konstruiere zunächst den Hauptpunkt und die Standlinie mit Hilfe des Fluchtpunktes der Diagonalen und der wahren Länge des vertikalen Rechtecks.

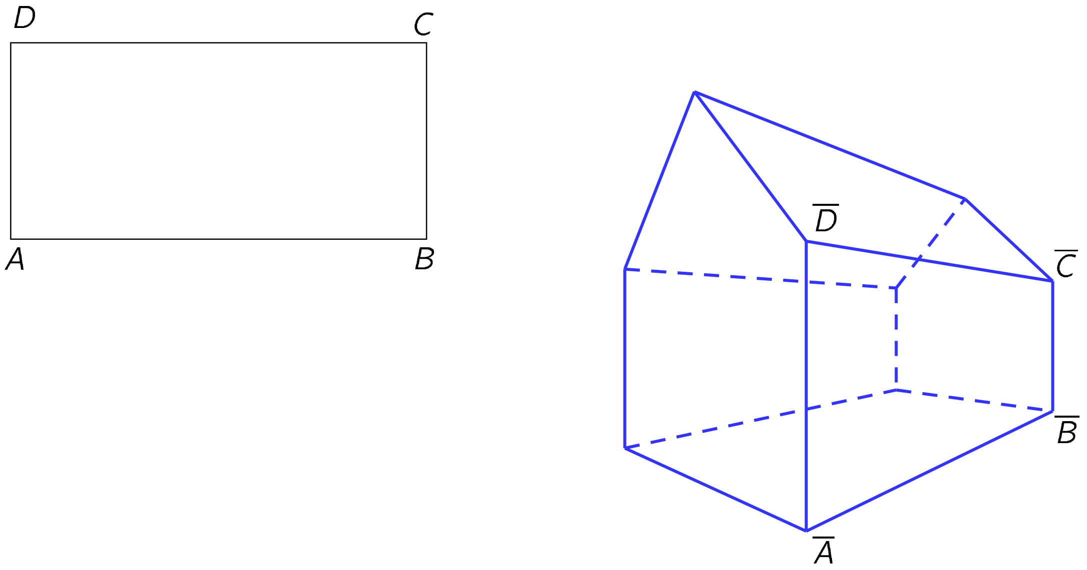


Abbildung 5.58: Rekonstruktion bei einem nicht horizontalen Fluchtpunkt

5.7 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel

Für die Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel gehen wir von den folgenden, in der Praxis leicht erfüllbaren **Voraussetzungen** aus:

a) Das **Fluchtpunktdreieck** eines **orthogonalen** Koordinatensystems ist bekannt.

b) Der **Spurpunkt** einer Koordinatenachse ist bekannt.

Falls Voraussetzung b) nicht erfüllt ist, kann man einen Spurpunkt frei wählen. Die Rekonstruktion des Objektes ergibt sich dann bis auf Ähnlichkeit.
Da Spurgerade und Fluchtgerade einer Ebene parallel sind, lässt sich mit Hilfe von b) das für die Rekonstruktion wichtige **Spurpunktdreieck** bestimmen.
Die folgende Abbildung zeigt für eine konkrete Situation Flucht- und Spurpunktdreieck. (Falls der Nullpunkt des Koordnatensystems auf derselben Seite liegt wie der Augpunkt, steht auch das Spurpunktdreieck „auf dem Kopf“.)

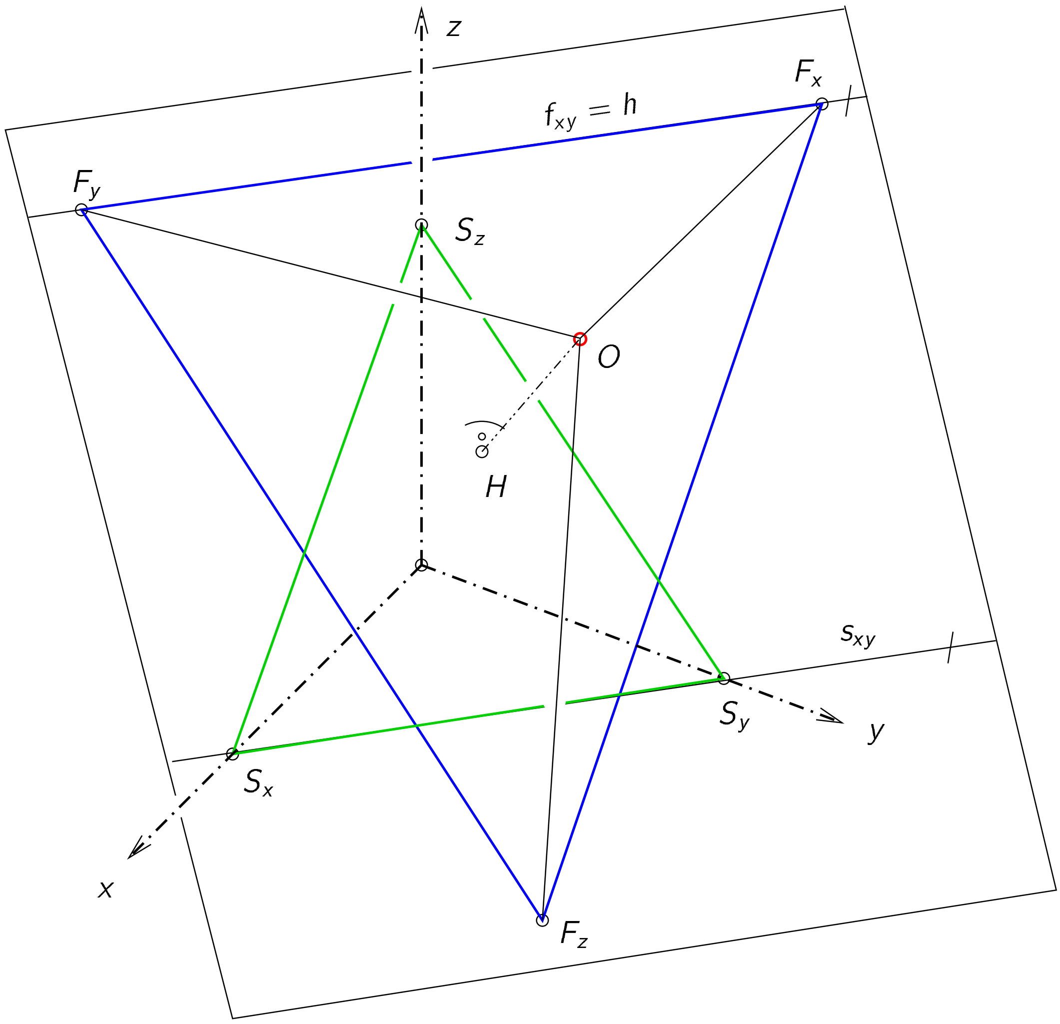


Abbildung 5.59: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Spur– und Fluchtpunktdreieck

Man überlegt sich, dass gilt:

Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt der Höhen im **Fluchtpunkt**dreieck.

Die **Distanz** ergibt sich durch eine „geeignete“ Umklappung des Augpunktes in der Bildtafel.

Durchführung im perspektiven Bild:

1. „Thaleskreis“ über einer Höhe des **Flucht**punktdreiecks.
2. Das Lot in H auf diese Höhe liefert den Punkt $\tilde{O}$ auf dem Thaleskreis.
   Der Abstand dieser beiden Punkte ist die Distanz

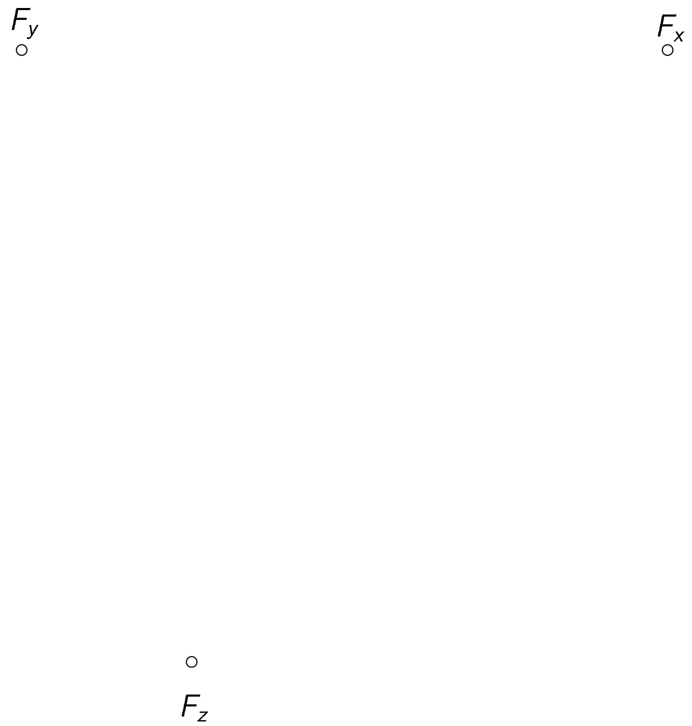


Abbildung 5.60: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Hauptpunkt und Distanz

5.7.1 Bestimmung der wahren Länge einer Strecke in Achsenrichtung

Die Bestimmung der wahren Länge einer Strecke erfolgt auch hier mit Hilfe eines „Messpunktes“ (s. Abschnitt 5.6.1). Der hierfür notwendige „umgeklappte Augpunkt“ liegt auf dem Thaleskreis über den entsprechenden Achsenfluchtpunkten.

Durchführung für eine Strecke AB auf der x-Achse:

1. Konstruiere das Fluchtpunktdreieck $F_xF_yF_z$, den Hauptpunkt H und die Spur s_{xy} der $x-y$-Ebene. Die Gerade f_{xy} durch F_x, F_y ist die Fluchtgerade der $x-y$-Ebene, in der die Strecke AB liegt.
2. Lote den Hauptpunkt H senkrecht zu f_{xy} auf den Thaleskreis über F_x, F_y. Der so erhaltene Punkt sei O_{xy}.
3. Drehe O_{xy} um F_x auf f_{xy}. Der neue Punkt ist der **Messpunkt** M_x.
4. die **wahre Länge** der Strecke AB ergibt sich durch Projektion der (perspektiven) Bildstrecke $\overline{A}\,\overline{B}$ von M_x aus auf die Spur s_{xy} (s. Abschn. 5.6.1.1).

Beachte: Es muss auf die Spur derjenigen Ebene, die die Strecke enthält, projiziert werden. Liegt die Strecke in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene, so ist eine andere (zu s_{xy} parallele) Spur zu verwenden.

Aufgabe 5.25 :
Gegeben: Perspektives Bild eines Quaders und der Spurpunkt der x-Achse.
Gesucht: Wahre Abmessungen des Quaders.
Ergänze den Quader durch ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 2cm.

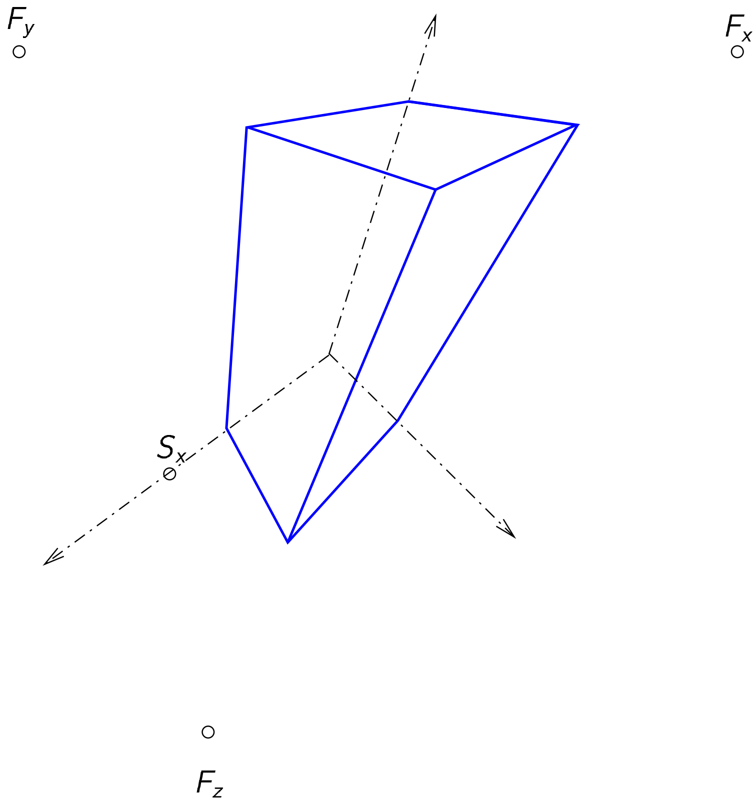


Abbildung 5.61: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Wahre Abmessungen eines Quaders

Um Grund- und Aufriss und die äußere Orientierung bei geneigter Bildtafel zu bestimmen, kehrt man die in Abschnitt 5.5 beschriebene Methode “Architektenanordnung bei geneigter Bildtafel” um.

Durchführung: Schritte 1-25

1 Zeichne zum Horizont h eine Parallele h' unterhalb des perspektiven Bildes. (Hier entsteht der Grundriss.) Übertrage die **Fluchtpunkte** F_x, F_y in den Grundriss. Rekonstruiere im Grundriss O'.

2,3 Zeichne die Höhen des Fluchtpunktdreiecks durch F_y und F_z. Ihr Schnittpunkt ist der **Hauptpunkt** H. Zeichne über der Höhe h_z durch F_z und V den Thaleskreis k_z.

4,5 Der Schnitt des Lotes in H auf h_z mit dem Kreis k_z ist der umgeklappte Augpunkt $\tilde{O}$. Der Winkel $\alpha = \angle F_z V \tilde{O}$ ist der **Neigungswinkel der Bildtafel** gegen die Horizontale.

6 Zeichne die geneigte Bildtafel, den Augpunkt O'' und F_z'' in den Seitenriss (der Architektenanordnung).

7-13 Rekonstruiere die Standlinie s, die Standebene (x-y-Ebene) und den Koordinatenursprung im Seitenriss und übertrage die Standlinie und den Kordinatenursprung in den Grundriss.

14,15 Rekonstruiere die Koordinatenachsen.

16-25 Rekonstruiere den Boden des Quaders und dann die restlichen Punkte.

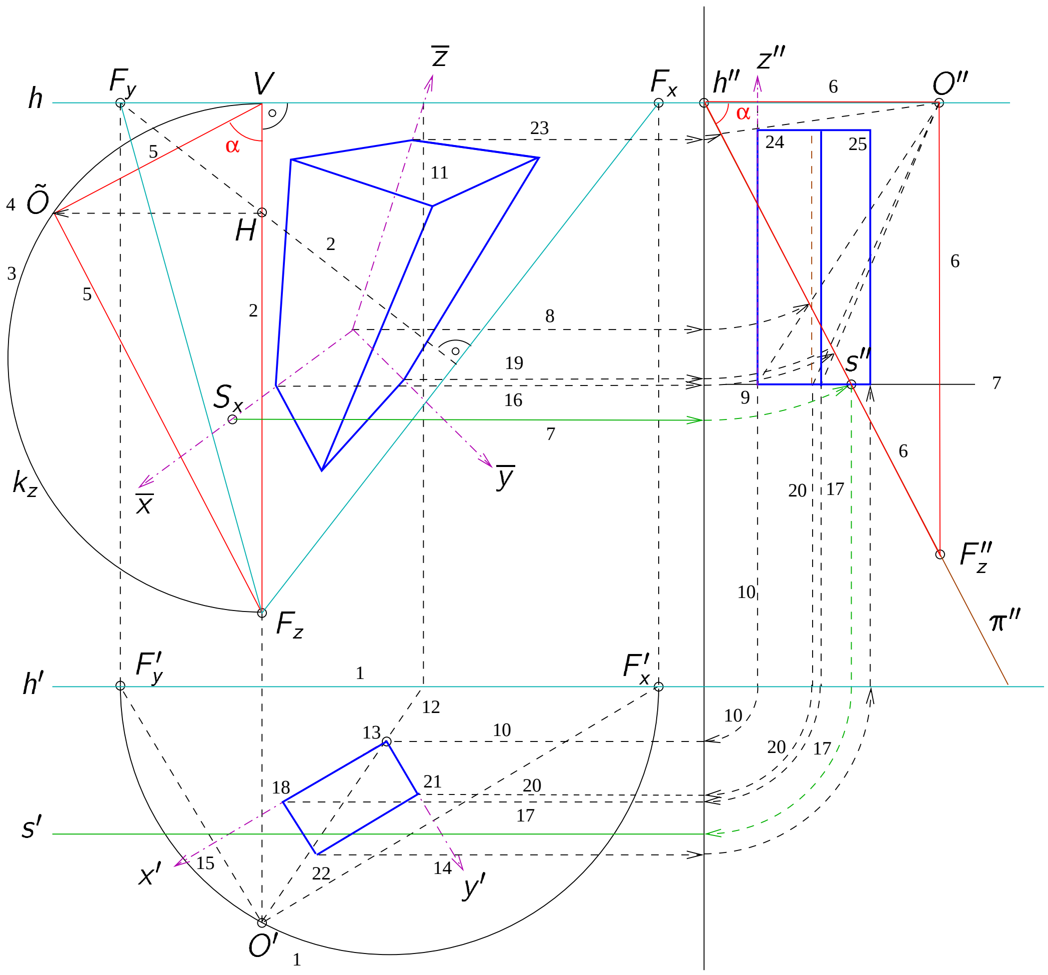


Abbildung 5.62: Zu Fig. 5.63 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund-, Aufriss eines Quaders

Aufgabe 5.26 :
Gegeben: Perspektives Bild eines Quaders und der Spurpunkt der x-Achse.
Gesucht: Grund- und Aufriss des Quaders und des Augpunktes (äußere Orientierung).
Ergänze den Quader durch ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 2cm.

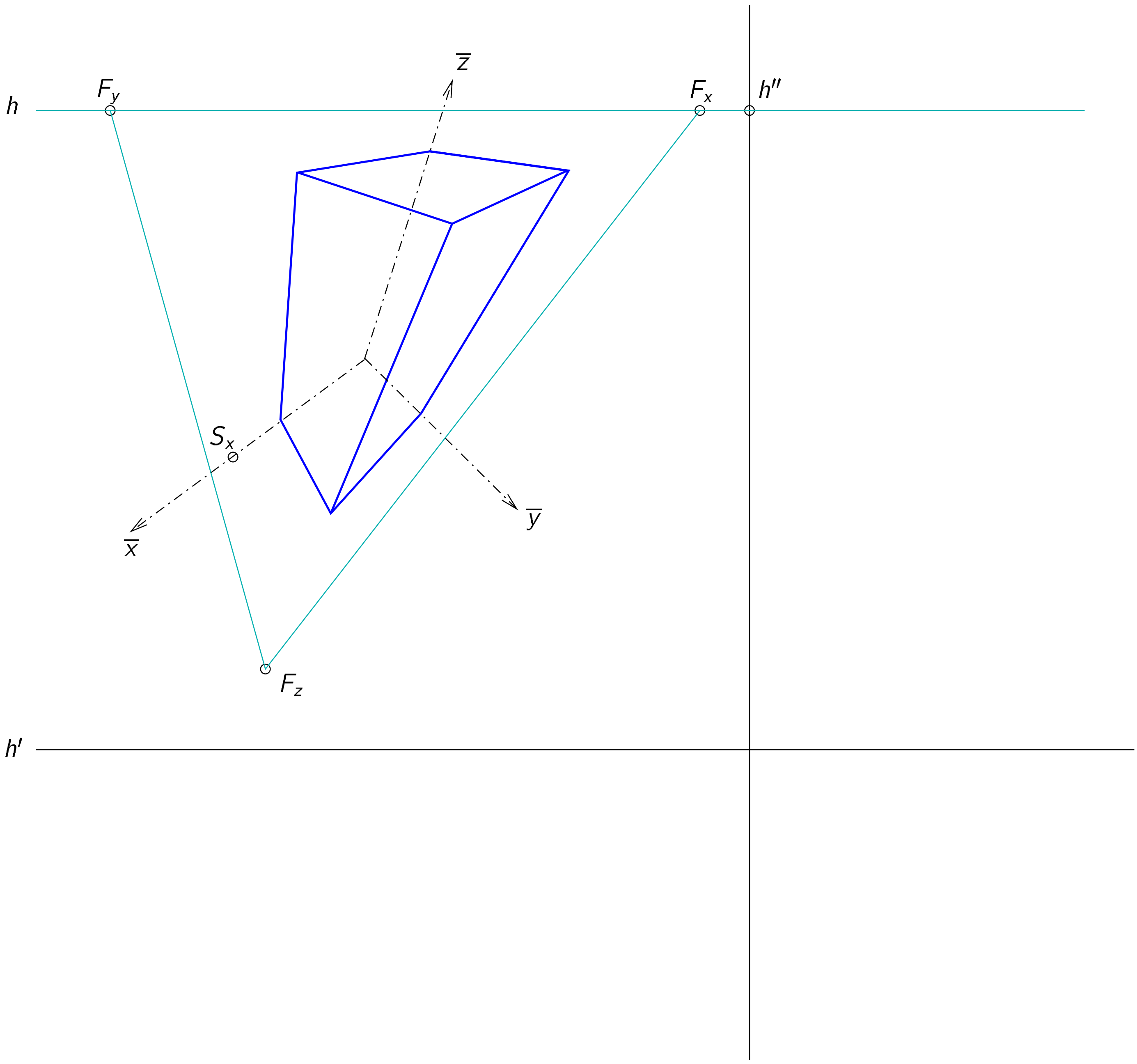


Abbildung 5.63: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund- und Aufriss eines Quaders

5.7.2 Entzerrung mit Hilfe des Doppelverhältnisses

Bei einer Parallelprojektion ist das „Teilverhältnis“ eine Invariante (Strahlensatz!). Bei Zentralprojektion gilt dies i.a. nicht mehr. Die für eine Zentralprojektion typische Invariante ist das **Doppelverhältnis**.

Doppelverhältnis $DV(A,B,C,D) := \frac{|AC|}{|AD|} : \frac{|BC|}{|BD|}$ Es gilt: $DV(A,B,C,D) = DV(A',B',C',D')$

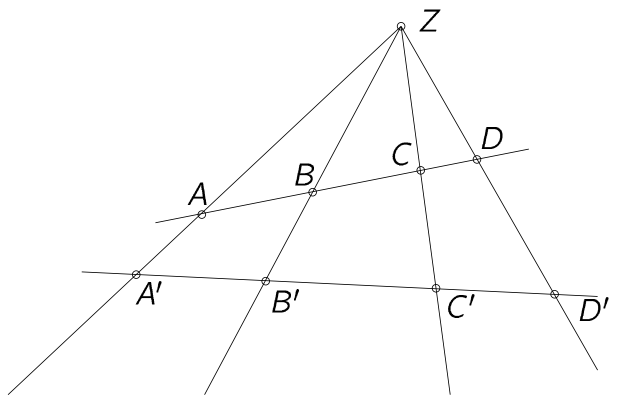


Abbildung 5.64: Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion

Anwendung:

Gegeben: Die perspektiven Bilder $a', b'.c', d'$ von 4 Geraden eines **ebenen** Büschels und die Urbilder a, b, c.

Gesucht: Das Urbild d der Geraden d'.

Durchführung:

1. Markiere auf einem Papierstreifen (Gerade) die Punkte $A \in a'$, $B \in b'$, $C \in c'$ und $D \in d'$.
2. Lege den Streifen so auf die Urbilder, dass $A \in a$, $B \in b$ und $C \in c$ ist. Dann geht die gesuchte Gerade d durch das Büschelzentrum und D.

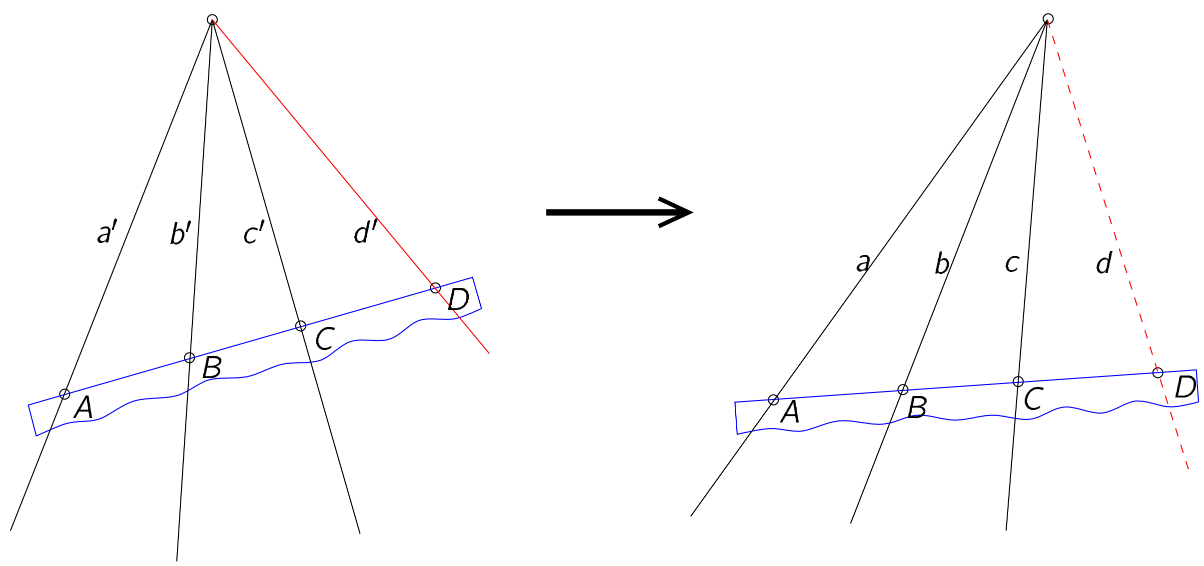


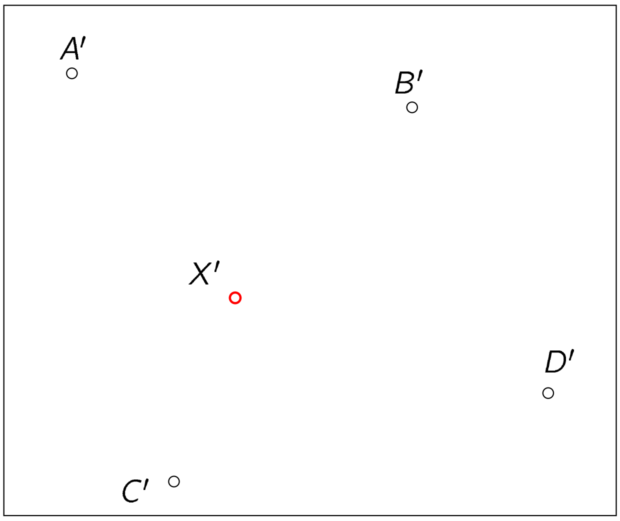
Abbildung 5.65: Entzerrung mit Hilfe des Doppelverhältnises

Zur Rekonstruktion eines **Punkt**es X verwendet man zwei Büschel und überträgt die Büschelgeraden durch X mit der obigen Methode in das Urbild.

Gegeben: Bild und Urbild eines Vierecks A, B, C, D und das Bild X' eines Punktes X.
Gesucht: Das Urbild X.

Durchführung:

1. Wähle zwei Punkte des Vierecks als „Büschelzentren“, z.B. A und D.
2. Zeichne die Büschelgeraden x_1', x_2' durch X'.
3. Übertrage x_1' und x_2' mit einem Papierstreifen in das Urbild.
   Der Schnitt der Urbilder x_1, x_2 ist das Urbild X.



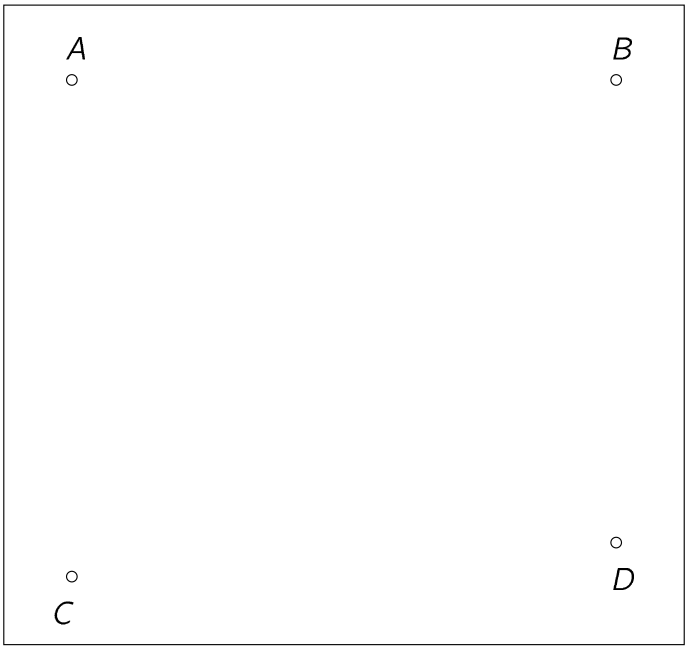


Abbildung 5.66: Rekonstruktion eines Punktes mit Hilfe des Doppelverhältnises

Bei komplizierteren ebenen Figuren (viele Punkte, Kurven) ist die punktweise Konstruktion zu mühsam. Man überzieht dann das Bild (Photo) und das Urbild (Original, Karte) mit sich entsprechenden Netzen (**Möbiusnetz**). Dieses Netz wird, ausgehend von 4 Punkten, deren Urbilder bekannt sind, durch immer neues Hinzufügen von einander in Bild und Karte entsprechenden Geraden so lange verdichtet, bis sich schließlich der Bildinhalt nach Augenmaß in das Urbild übertragen lässt.

Aufgabe 5.27 *:*
Gegeben: Unvollständiges Original und Zentralprojektion einer ebenen Figur.
Gesucht: Mund und Nase von Max (im Original).

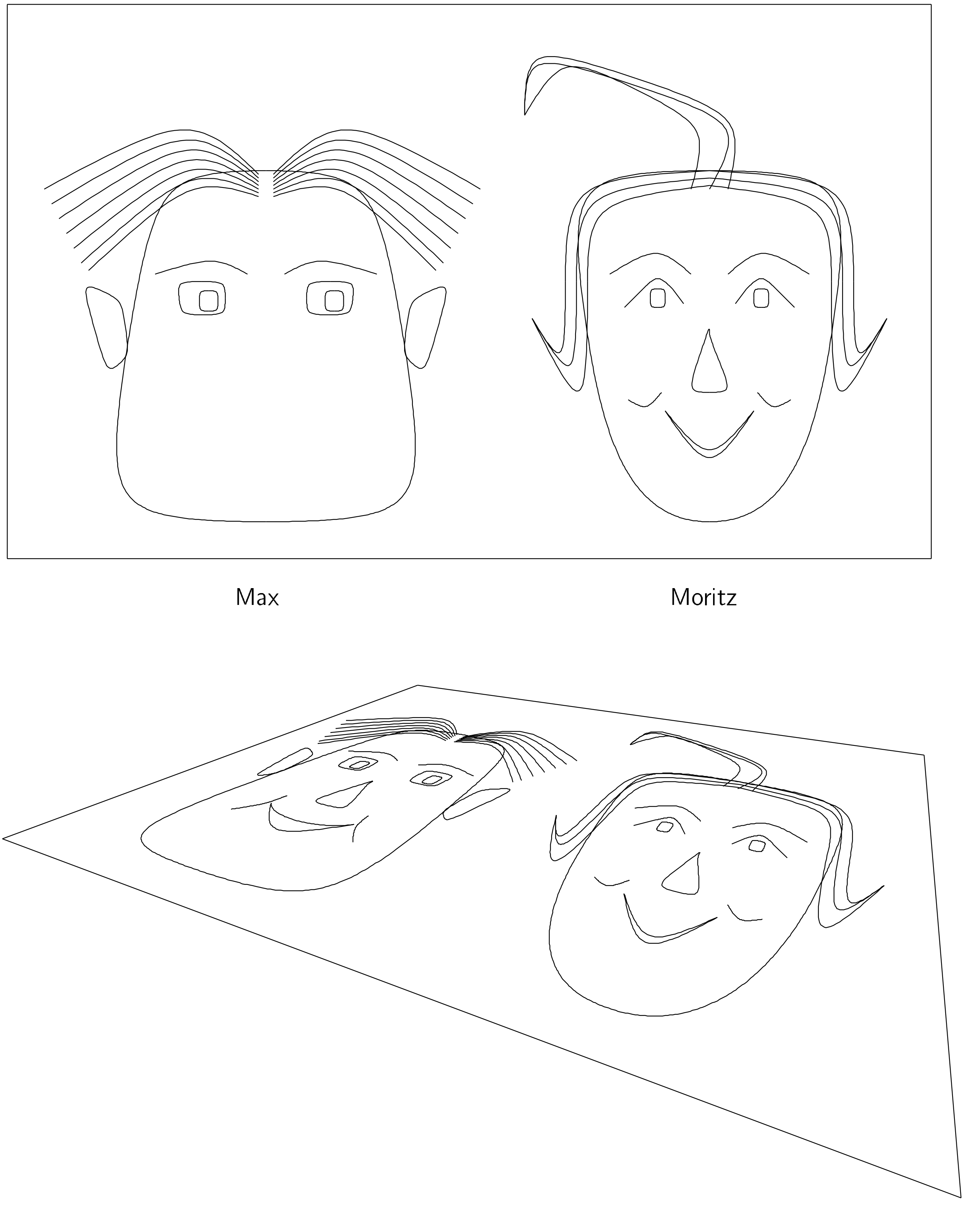


Abbildung 5.67: Rekonstruktion von Punkten mit Hilfe des Doppelverhältnises

5.8 Abbildung von Kurven

Das perspektive Bild einer **allgemeinen Kurve** kann man durch die Bilder hinreichend vieler **Punkte** und/oder **Tangenten** näherungsweise bestimmen. (s. Aufgabe 5.28)

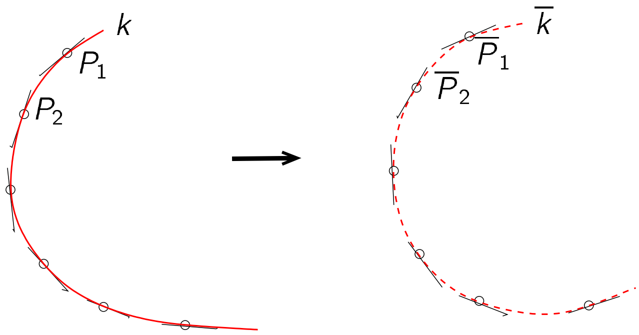


Abbildung 5.68: Zentralprojektion einer Kurve: Approximation durch Punkte und Tangenten

Mit diesem Verfahren lassen sich auch die Bilder von **Ellipsen, Hyperbeln** und **Parabeln** ermitteln.

Für die sehr häufig vorkommenden **Kreise** sind „direkte“ Konstruktionen mit Hilfe **konjugierter Halbmesser** meist einfacher. Wie das folgende Bild zeigt, treten Kreise meistens in horizontalen oder vertikalen Ebenen auf. Deshalb werden wir uns hier auf diese Fälle beschränken.

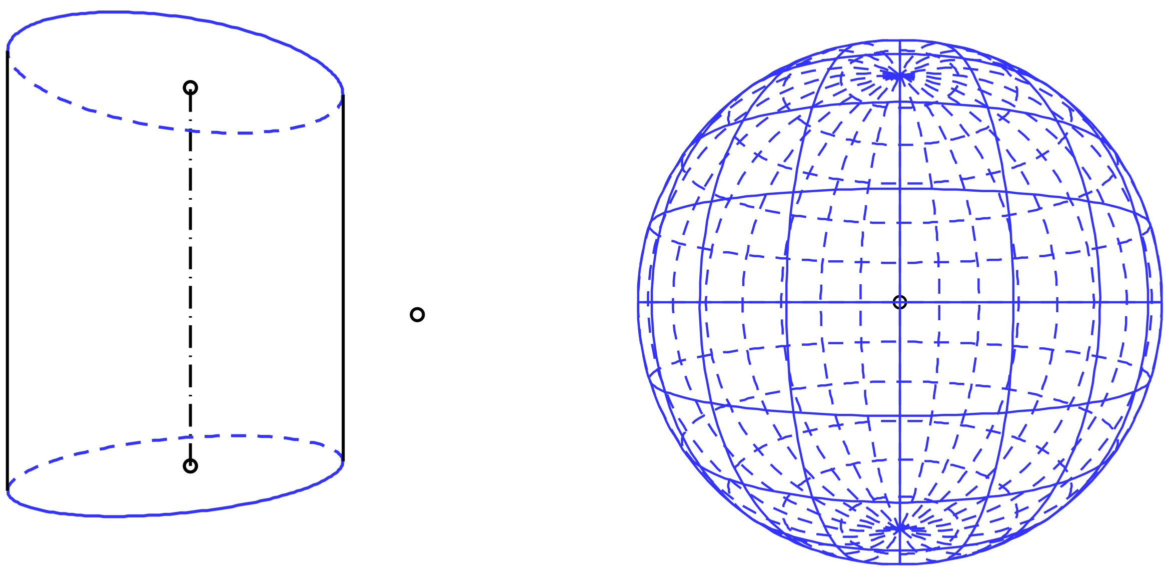


Abbildung 5.69: Zentralprojektionen von Kreisen

Aufgabe 5.28 *Zeichne die Projektion einer Kurve k in der Standebene (Fig. 5.70) .*

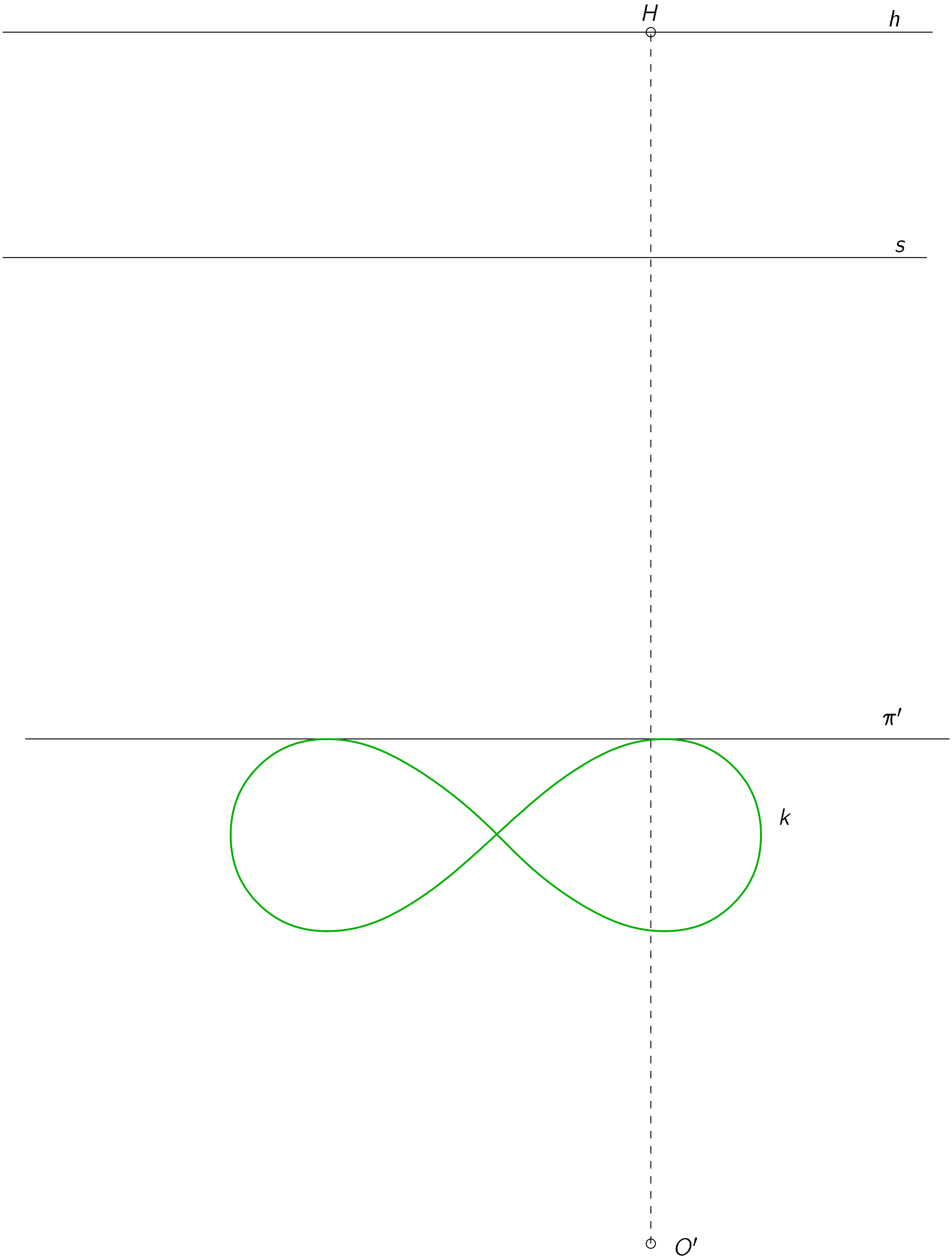


Abbildung 5.70: Zentralprojektion einer Kurve: Beispiel

5.9 Abbildung von Kreisen

Bei der Abbildung von Kreisen unterscheiden wir die folgenden 5 Fälle:
Es sei k ein Kreis.

1. Die Kreisebene ε geht **durch** den **Augpunkt** O: Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Strecke*.
2. Die Kreisebene ε ist **parallel** zur **Bildtafel** π: Das Bild $\overline{k}$ ist ein *Kreis*.
   (Der vom Kreis k und dem Augpunkt O erzeugte (i.a.) schiefe Kreiskegel wird wegen $\varepsilon || \pi$ von π in einem Kreis geschnitten.)

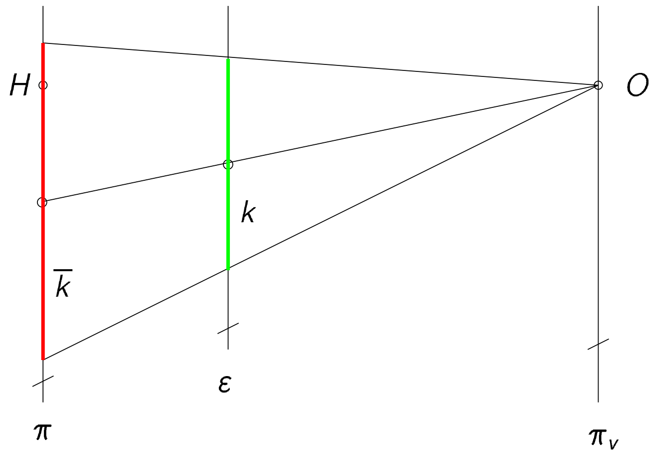


Abbildung 5.71: Zentralprojekrion eines Kreises parallel zur Bildtafel

3. Der Kreis k **trifft** die **Verschwindungsebene** π_v **nicht**:
   Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Ellipse*.

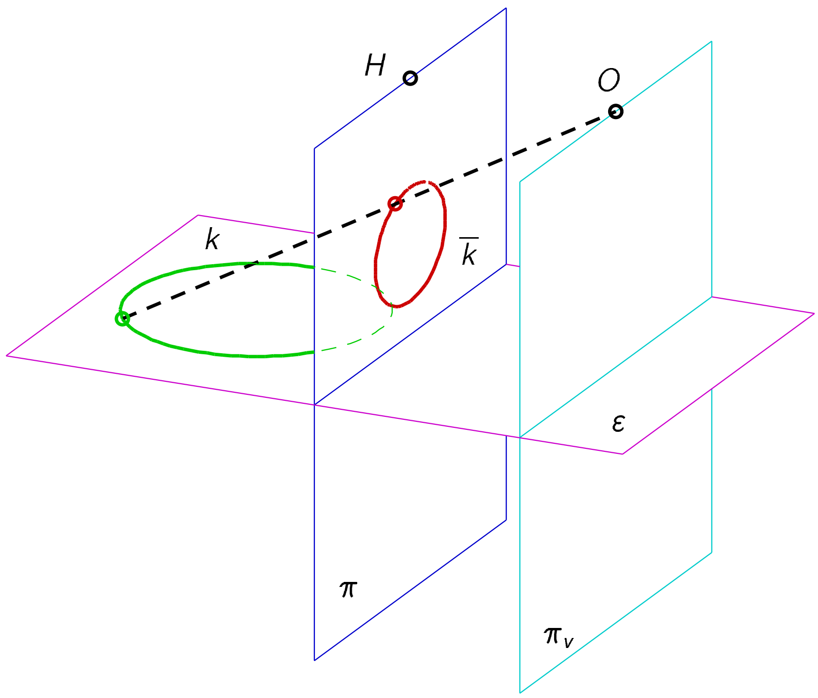


Abbildung 5.72: Zentralprojekrion eines Kreises in der Standebene: Bild ist Ellipse

4. Der Kreis k **berührt** die **Verschwindungsebene** π_v im Punkt V: Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Parabel*.
   (Der Projektionskegel des Kreises wird von π parallel zu einer Mantellinie geschnitten.
   Das Urbild der Achse der Bildparabel geht durch V.)

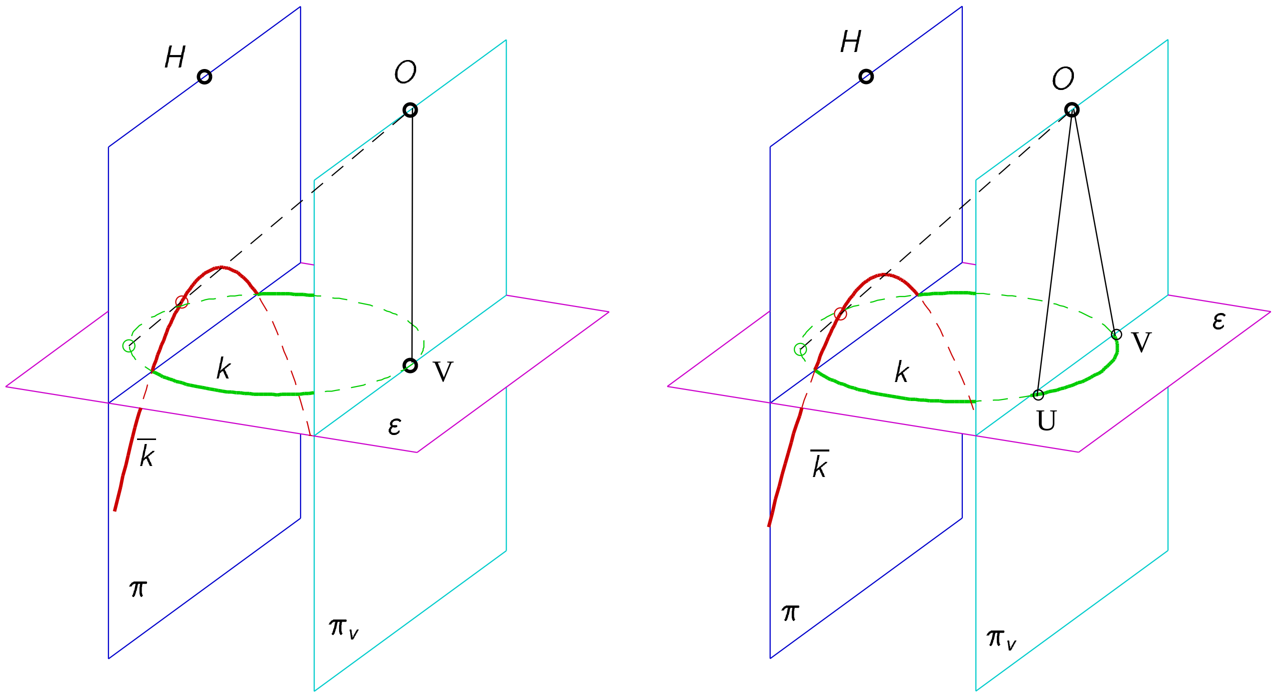


Abbildung 5.73: Zentralprojekrion eines Kreises in der Standebene: Hyperbel/Parabel

5. Der Kreis k **schneidet** die **Verschwindungsebene** π_v in **zwei** Punkten U, V:
   Das Bild $\overline{k}$ ist ein Ast einer *Hyperbel*.
   (Die Asymptoten der Hyperbel sind die Bilder der Kreistangenten in U, V. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist das Bild des Tangentenschnittpunktes.)

Im Folgenden setzen wir immer eine **senkrechte Bildtafel** voraus.

Zum Fall 3.: „k **trifft** die **Verschwindungsebene** π_v **nicht**“ (Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Ellipse*.):
Wir können das Bild $\overline{k}$ des Kreises k zeichnen, wenn wir zwei **konjugierte Durchmesser** von $\overline{k}$ kennen.

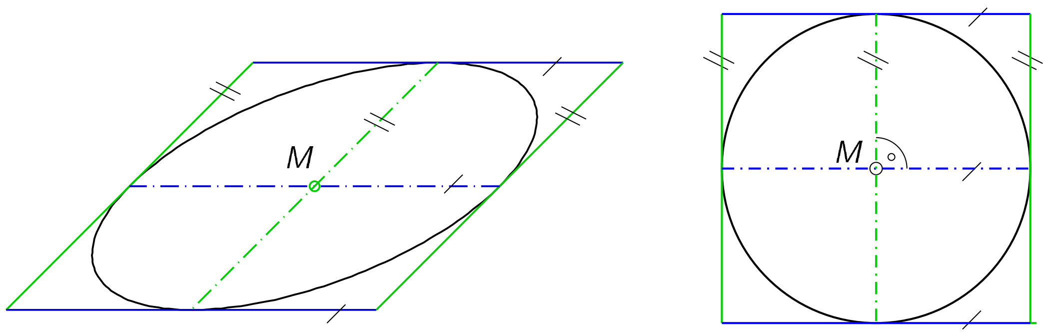


Abbildung 5.74: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Zur Erinnerung: Zwei Sehnen einer Ellipse sind *konjugierte Durchmesser*, wenn die Tangenten in den Endpunkten der einen Sehne parallel zur anderen Sehne (oder umgekehrt) sind. Der Schnittpunkt zweier konjugierter Durchmesser ist der Mittelpunkt der Ellipse (s. Fig. 5.74).

Um zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse $\overline{k}$ zu erhalten, müssen wir ein Tangentenviereck an k so bestimmen, dass sein Bild ein Parallelogramm wird. Hierzu verwenden wir die folgende Tatsache.

Die Bilder zweier Geraden, die sich auf der Verschwindungsebene π_v schneiden, sind parallel:

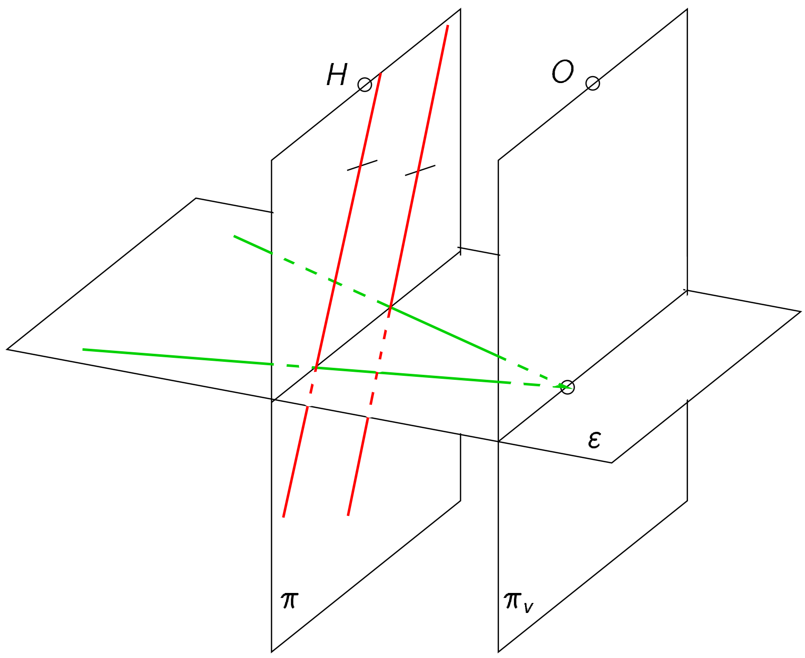


Abbildung 5.75: Urbilder paralleler Geraden in der Standebene

Wir müssen also ein Tangentenviereck P_1, P_2, Q_1, Q_2 so wählen, dass die Tangenten in P_1, P_2 und die Gerade Q_1Q_2 sich auf der Verschwindungsebene schneiden. Das analoge gilt dann auch für die Tangenten in Q_1, Q_2 . . . .

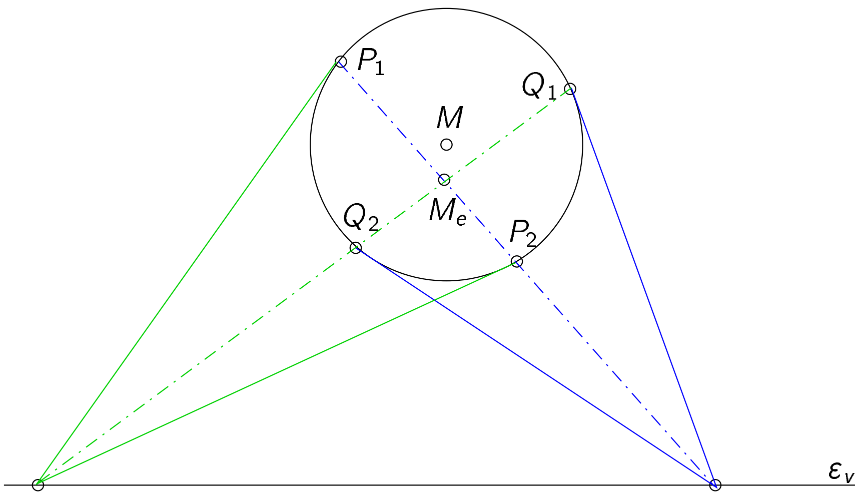


Abbildung 5.76: Projektion eines Kreises als Ellipse: Urbilder konjugierter Durchmesser

Um uns die Arbeit zu erleichtern, werden wir immer P_1, P_2 **so wählen**, dass sie auf dem Lot l vom Kreismittelpunkt M auf die Verschwindungsgerade ε_v ($= \varepsilon \cap \pi_v$) liegen. Dann sind die Tangenten in P_1, P_2 parallel zur Bildtafel (und zu ε_v) und ihre perspektiven Bilder sind parallel zur Spur s_ε (und Fluchtgerade f_ε). Die Tangenten in Q_1, Q_2 müssen durch den Lotfußpunkt $L = l \cap \varepsilon_v$ gehen.

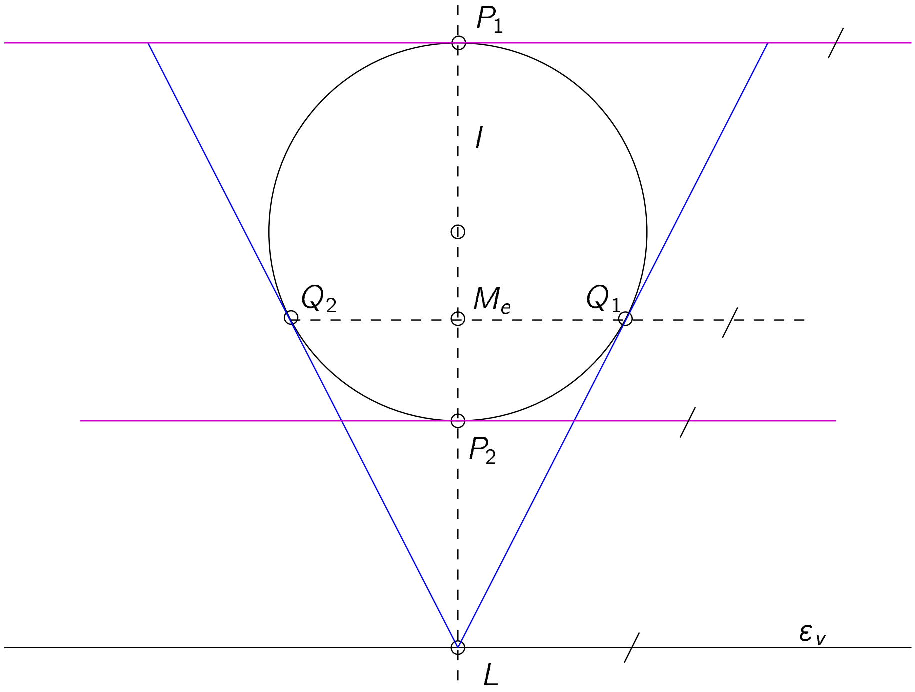


Abbildung 5.77: Projektion eines Kreises als Ellipse

Durchführung für den Fall „Kreis in der Standebene" (Fig. 5.78):

1. Zeichne in den Grundriss die Verschwindungsgerade ε_v.
   (ε_v' geht durch O' und ist parallel zur Spur s_ε.)
2. Fälle das Lot l vom Kreismittelpunkt M auf ε_v. Lotfußpunkt ist L. $l \cap k$ liefert die Punkte P_1, P_2.
   (Die Tangenten in P_1, P_2 sind parallel zu ε_v.)
3. Zeichne die Tangenten durch L an den Kreis k.
   Die Berührpunkte sind Q_1, Q_2.
4. Der Schnittpunkt der Sehnen P_1P_2 und Q_1Q_2 ist M_e.
   (M_e ist das Urbild des Mittelpunktes der Bildellipse.)
5. Bilde M_e, P_1 und Q_1 ab.
   ($\overline{M}_e$ ist der Mittelpunkt der Bildellipse und $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$ zwei konjugierte Punkte.)
6. Bestimme mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion die Scheitel der Bildellipse.
7. Zeichne die Ellipse mit Hilfe der **Scheitelkrümmungskreise**.

Aufgabe 5.29 :
Gegeben: Kreis k in Grundrisstafel (= Standebene), Augpunkt und Bildtafel in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Perspektives Bild $\overline{k}$ des Kreises k. (Fig. 5.78).

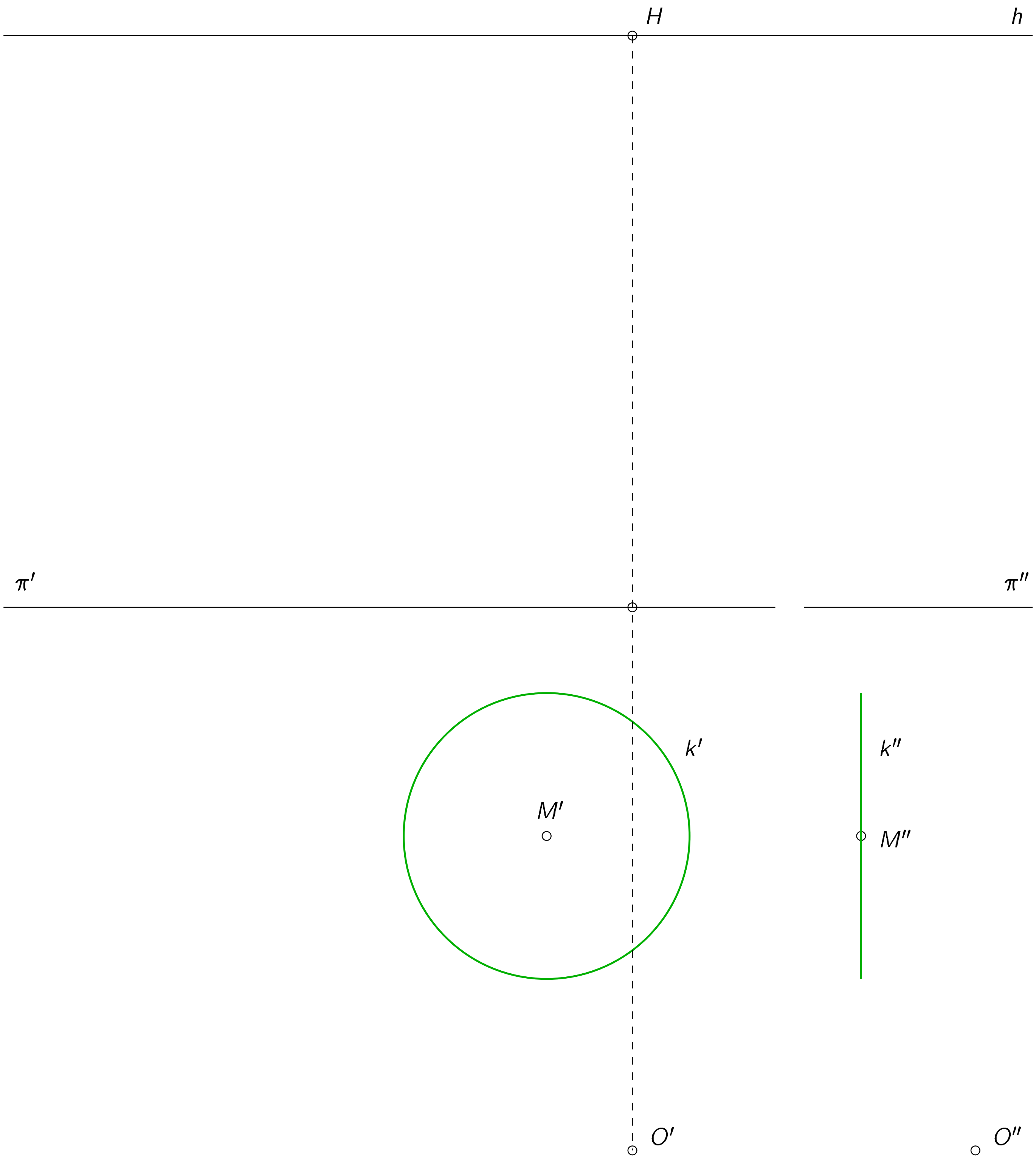


Abbildung 5.78: Projektion eines Kreises in der Standebene als Ellipse

Aufgabe 5.30 :

Zeichne die Projektion eines Kreises (Ziffernblatt einer Uhr) in der Standebene. Der Kreis berührt die Verschwindungsebene (Fig. 5.79).
Hinweis: Bilde genügend viele Punkte mit ihren Tangenten ab.

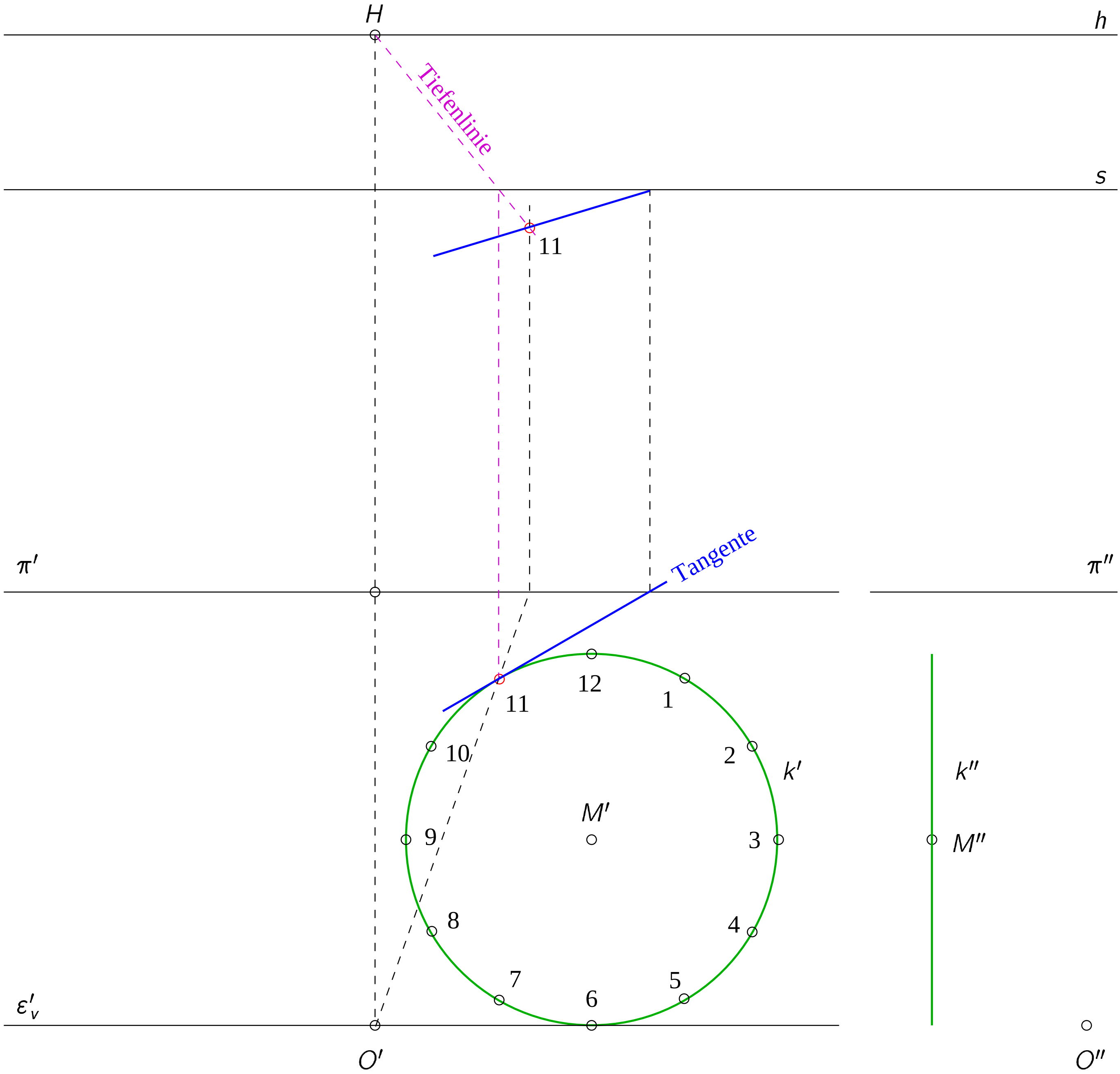


Abbildung 5.79: Projektion eines Kreises in der Standebene als Parabel

In der folgenden Aufgabe steht der Kreis senkrecht auf der Standebene. Um hier die vor Aufgabe 5.29 beschriebenen Schritte (1) - (4) durchführen zu können, dreht man den Kreis zunächst um seinen horizontalen Durchmesser, bis er parallel zur Standebene liegt.

Aufgabe 5.31 *Zeichne die Projektion eines Kreises der* **senkrecht** *auf der Standebene steht.*

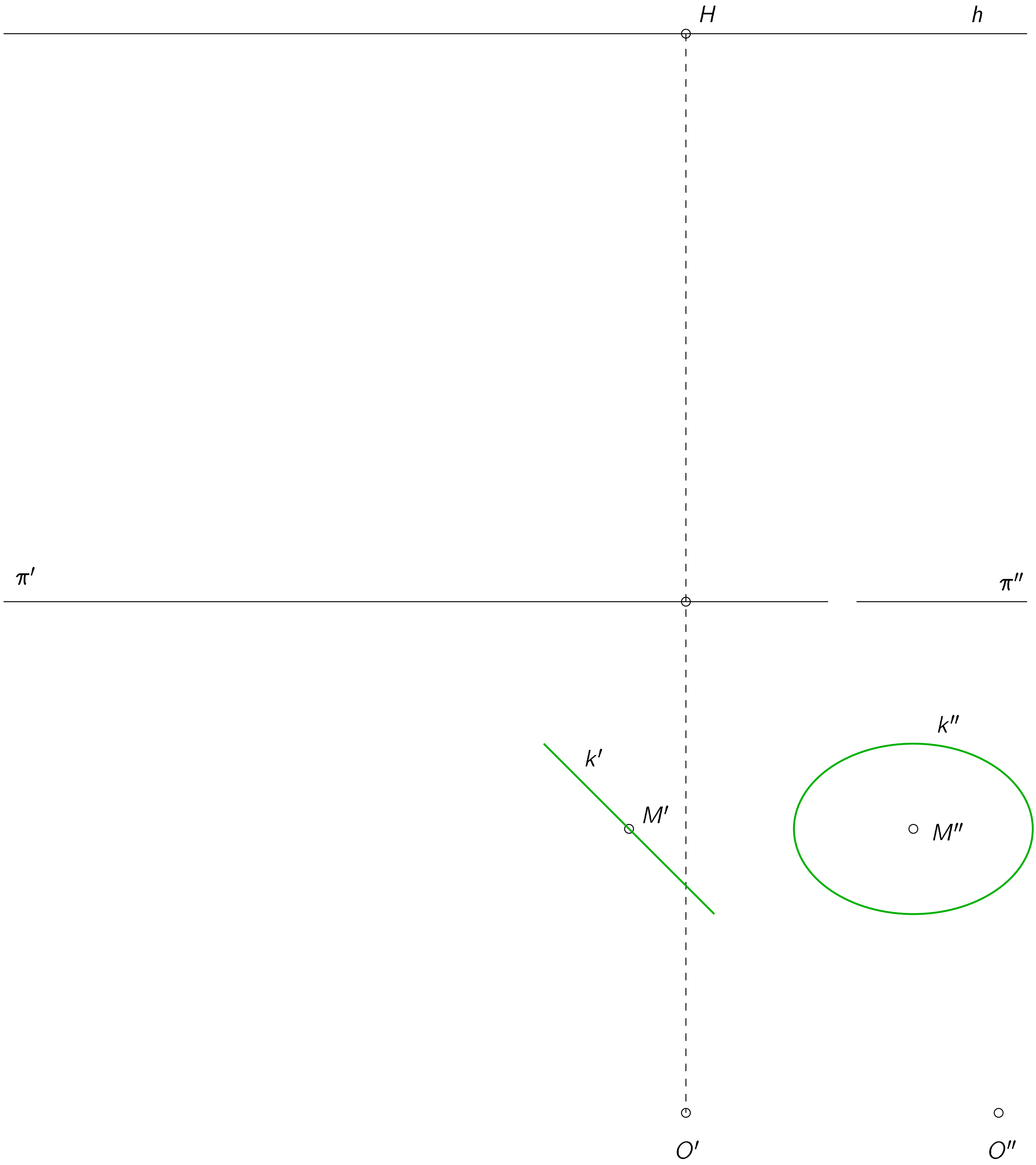


Abbildung 5.80: Projektion eines Kreises senkrecht zur Standebene als Ellipse

5.10 Abbildung von Flächen

Das perspektive Bild einer Fläche lässt sich im Prinzip genauso konstruieren wie der Schatten einer Fläche bei Zentralbeleuchtung. Zur Konstruktion der Flächenumrisse verwendet man berührende Geraden oder Ebenen durch den Augpunkt O. Diese aufwendige Konstruktionsmethode lässt sich in konkreten Fällen oft durch einfachere Verfahren ersetzen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Umrisse von Zylindern und Kegeln bestehen aus den Bildern vorgegebener Kreise und Tangenten an die Bildellipsen:

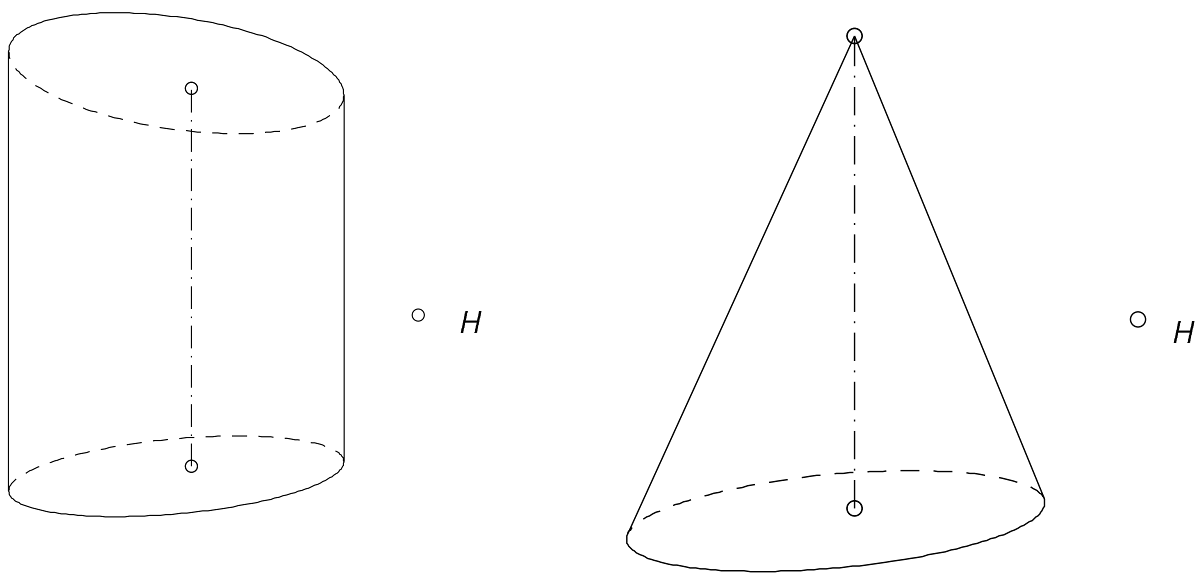


Abbildung 5.81: Zentralprojektion von Zylinder und Kegel

Der Umriss einer **Kugel** ist ein Kreis und die Zentralprojektion einer Kugel ist die Zentralprojektion dieses Umrisskreises.

Das Bild des Umrisses einer Kugel kann also eine Ellipse bzw. Parabel bzw. Hyperbel sein, je nachdem, ob der wahre Umrisskreis die Verschwindungsebene in O bzw. 1 bzw. 2 Punkten schneidet.

Wir wollen uns hier auf den Fall „**Kugel vor der Verschwindungsebene**“ beschränken. Der Umriss ist dann eine **Ellipse**.
Die Bildellipse des Umrisses kann man durch Abbildung des Umrisskreises erhalten. Einfacher ist aber eine „direkte“ Methode. Hierbei verwendet man die folgenden Eigenschaften eines Kegels (s. Graf-Barner, S.291):

a) Schneidet eine Ebene einen Kegel in einer Ellipse, so sind die Brennpunkte die Berührpunkte der **DANDELINschen Kugeln**.

b) Schneidet man einen Kegel mit einer Schar paralleler Ebenen, so dass Ellipsen entstehen, dann liegen entsprechende **Brennpunkte** der Ellipsenschar auf einer **Geraden** durch die Kegelspitze

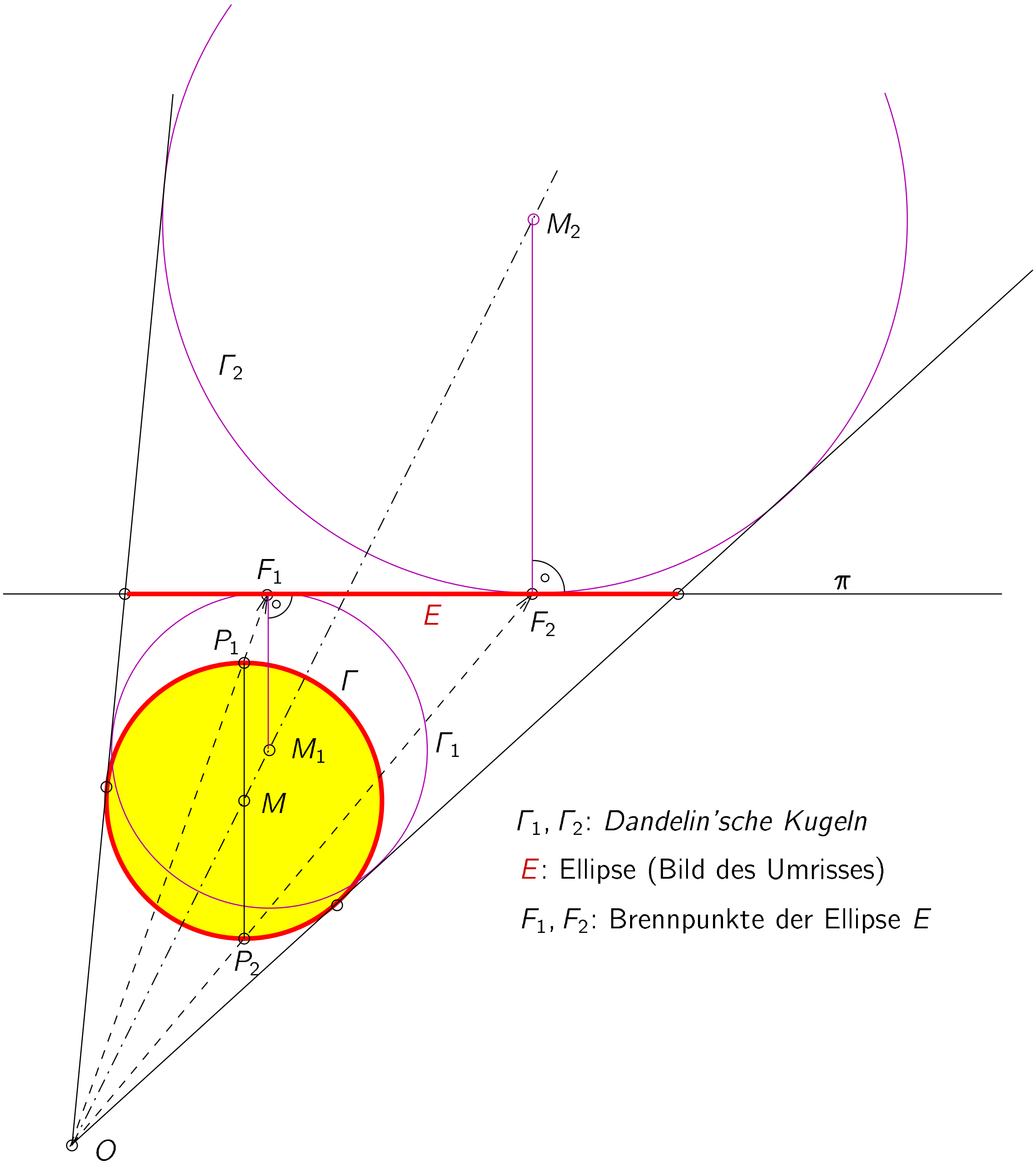


Abbildung 5.82: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse: Dandelin'sche Kugeln

Idee: Liegt der Kugelmittelpunkt auf der Geraden OH, so ist das Bild des Umrisses ein Kreis. Im anderen Fall sind die Kugelpunkte, die auf dem zur Bildtafel senkrechten Durchmesser liegen, die Urbilder der Brennpunkte F_1, F_2 der Umrissellipse (wegen a), b) !). Der Mittelpunkt M_e von F_1, F_2 ist der Mittelpunkt der Ellipse. Der kleine Scheitelkreis ist das Bild des Kreises (auf der Kugel), dessen Mittelpunkt das Urbild von M_e ist und der parallel zur Bildtafel liegt.

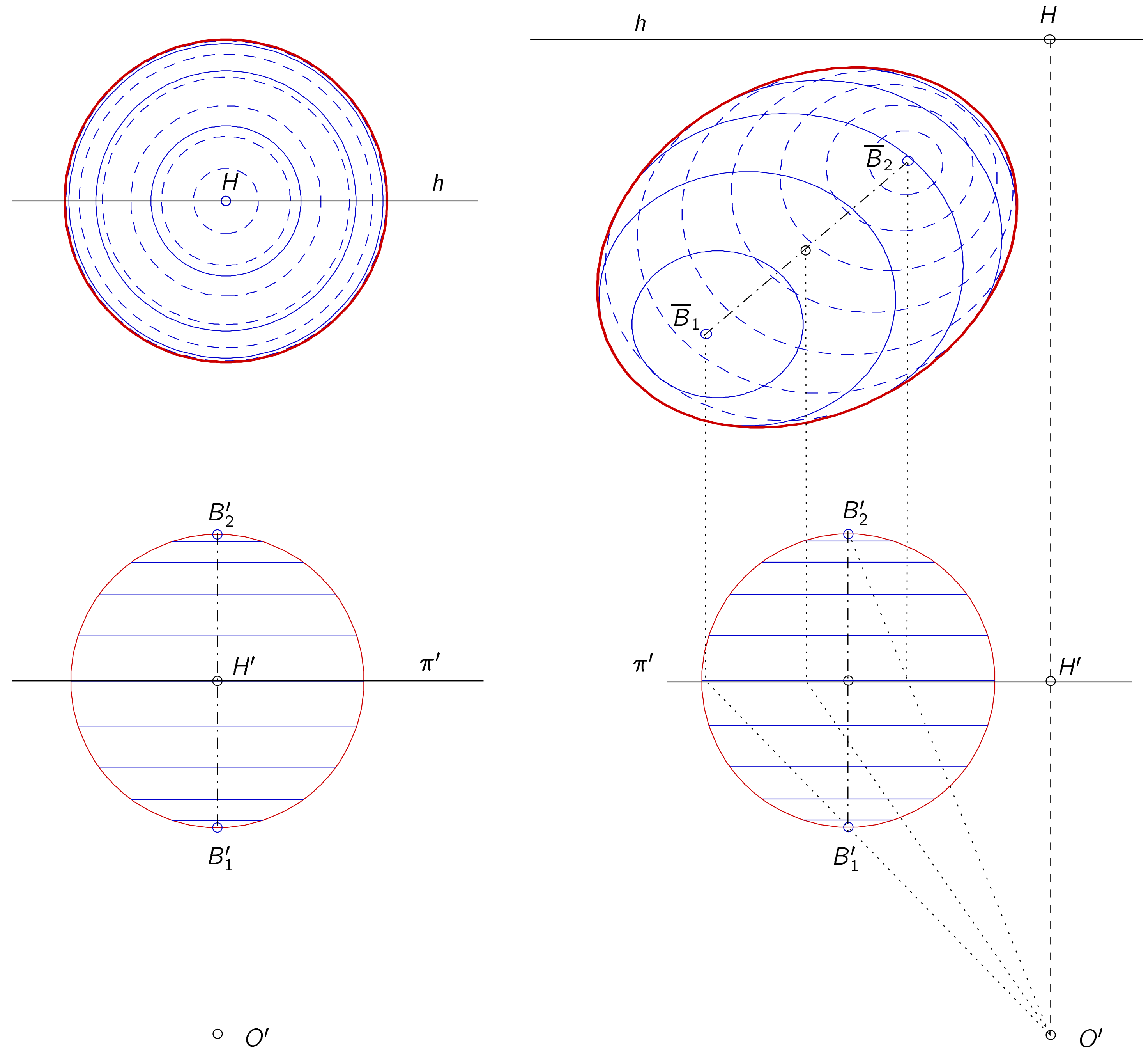


Abbildung 5.83: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse: Beispiel

Durchführung, falls der Umriss eine Ellipse ist:

1. Bestimmung der Punkte B_1, B_2 auf dem zur Bildtafel senkrechten Durchmesser d_0.
   Die Bilder von B_1, B_2 sind die **Brennpunkte** $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ der Umrissellipse.
2. Der Mittelpunkt $\overline{M}_e$ der Strecke $\overline{B}_1\overline{B}_2$ ist der **Mittelpunkt** der Ellipse.
   Bestimmung des Urbildes M_e von $\overline{M}_e$ (auf d_0).
3. Das Bild k_1 des Kreises (auf der Kugel) mit Mittelpunkt M_e, der parallel zur Bildtafel liegt, ist der **kleine Scheitelkreis**.
4. Aus der Länge der kleinen Halbachse b und der Brennweite e lässt sich mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks die **große Halbachse** a bestimmen ($a^2 = e^2 + b^2$!).

Aufgabe 5.32 *Bestimme das perspektive Bild des Umrisses der in Grund- und Aufriss gegebenen Kugel.*

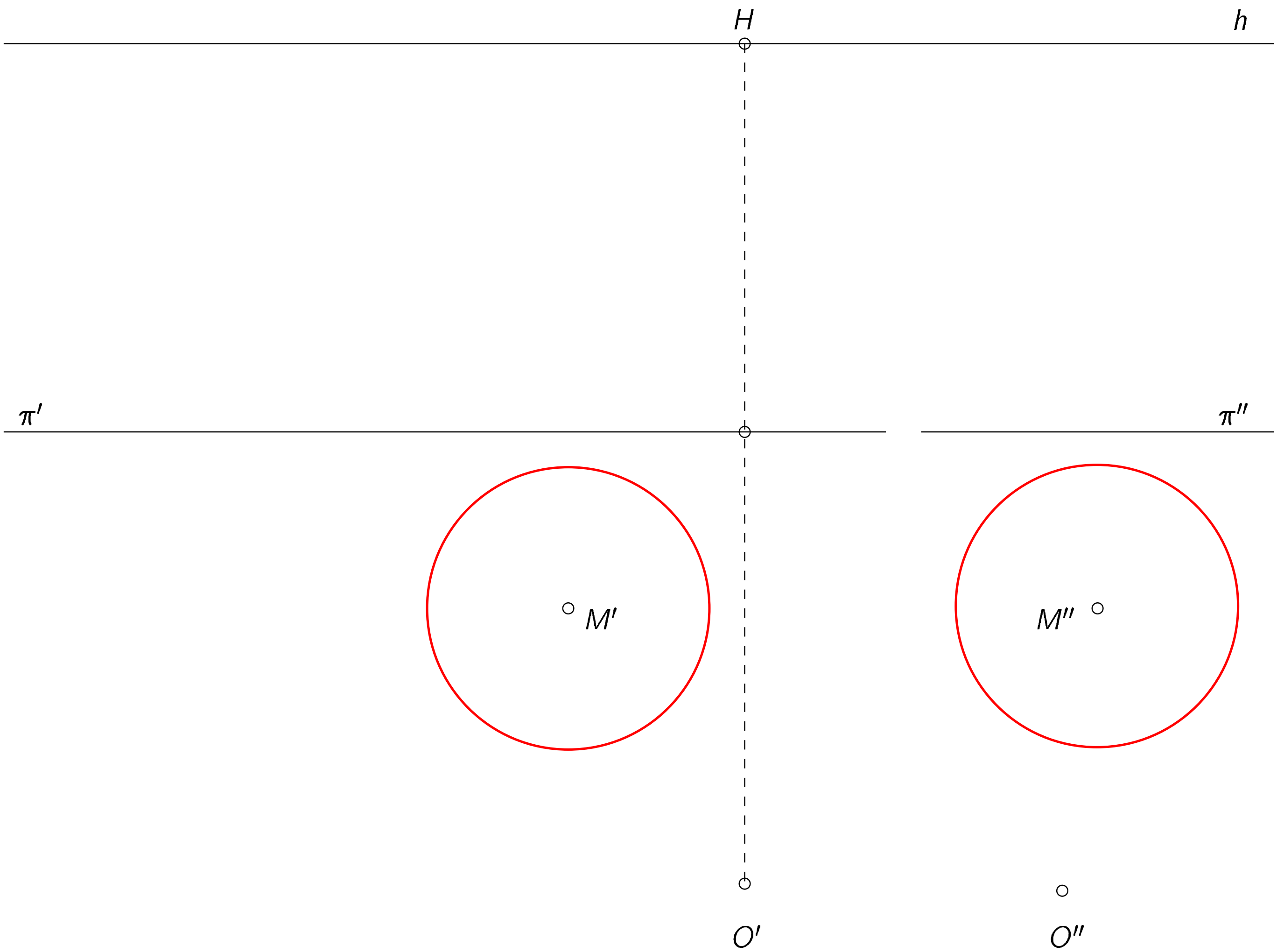


Abbildung 5.84: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse

Aufgabe 5.33 :
Gegeben: Grundriss zweier Türme (Zylinder mit Kugelteil), der Aufriss eines Turmes und Grund- und Aufriss der Bildtafel und des Augpunktes.
Gesucht: Das perspektive Bild .

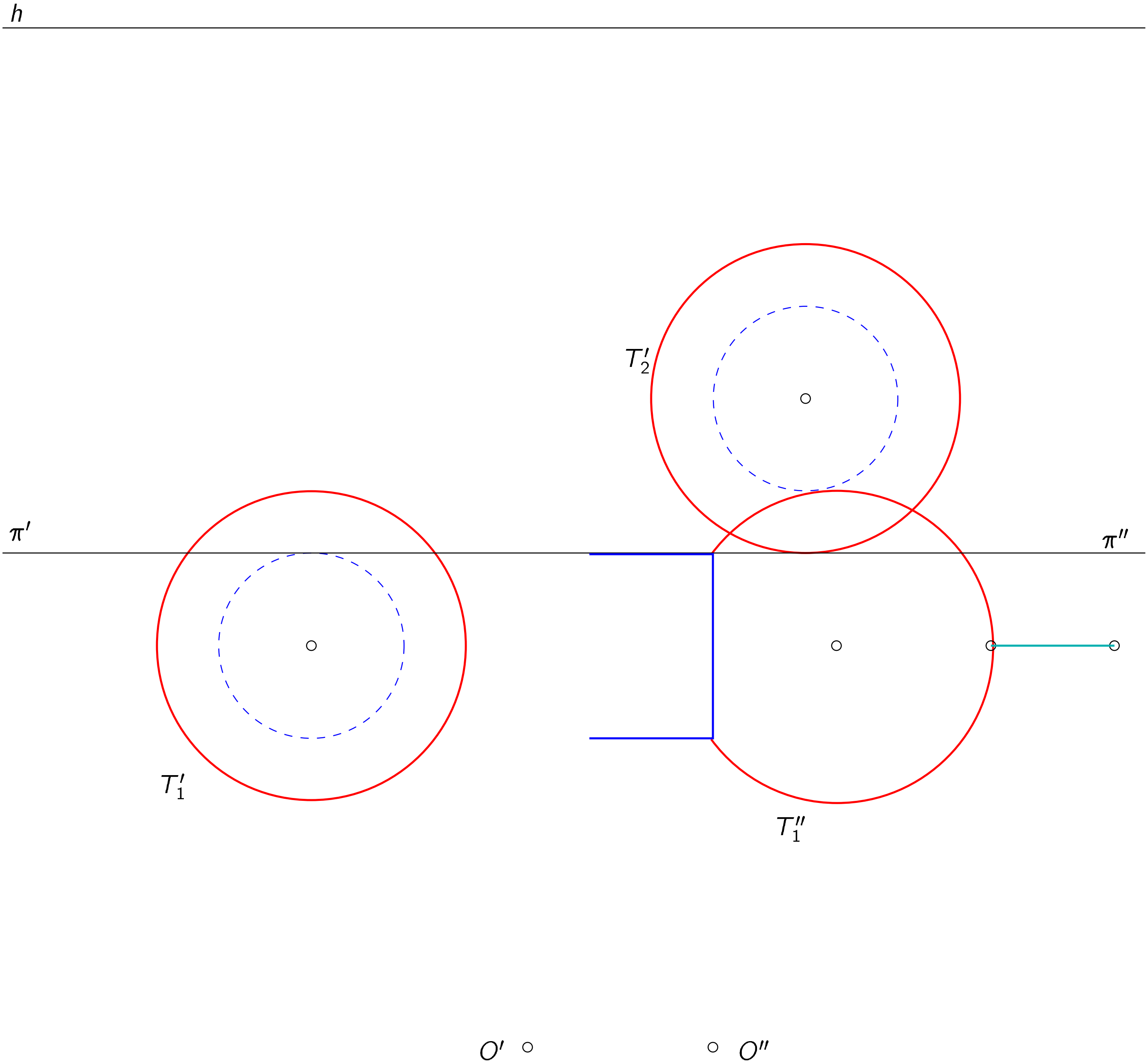


Abbildung 5.85: Projektion zweier Türme

Beispiel 5.2 *Abb. 5.86 zeigt Zentralprojektionen einer Kugel. Im oberen Bild fällt der Hauptpunkt mit dem Bild des Kugelmittelpunktes zusammen. Da der Umriss der Kugel in diesem Fall ein zur Bildtafel paralleler Kreis ist, ist das Bild des Umrisses auch ein Kreis. Im unteren Bild ist dies nicht der Fall. Der Umrisskreis ist nicht parallel zur Bildtafel und sein Bild damit kein Kreis, sondern eine Ellipse. Da die Verschwindungsebene in beiden Fällen nicht die Kugel schneidet, sind die Bilder aller Kreise Ellipsen oder Strecken.*

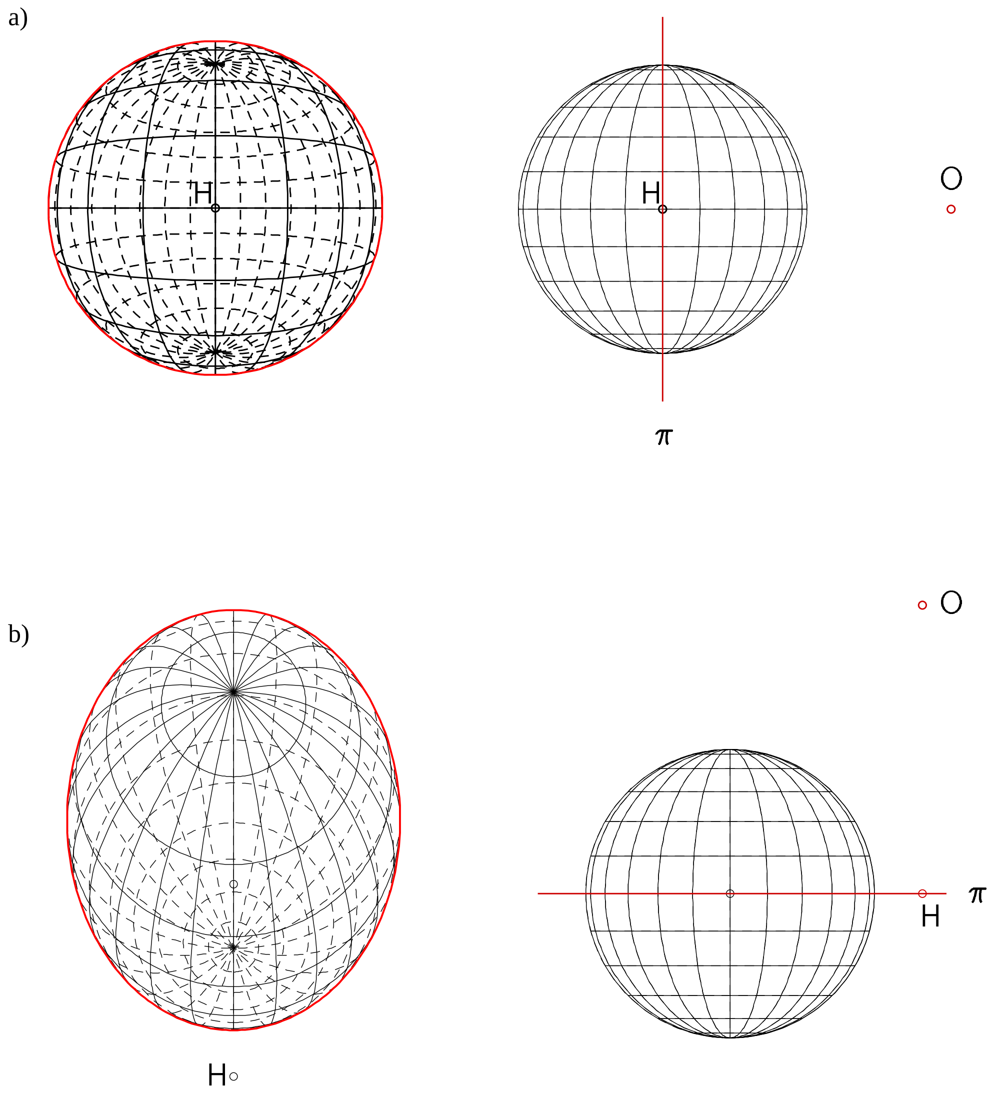


Abbildung 5.86: Zentralprojektion einer Kugel: Zentrum außerhalb der Kugel a) horizontale b) vertikale Sicht

Prinzipiell gilt:
Das perspektive Bild eines Kreises kann a) eine Ellipse b) eine Parabel c) eine Hyperbel oder eine Strecke sein (siehe Abb. 5.87).

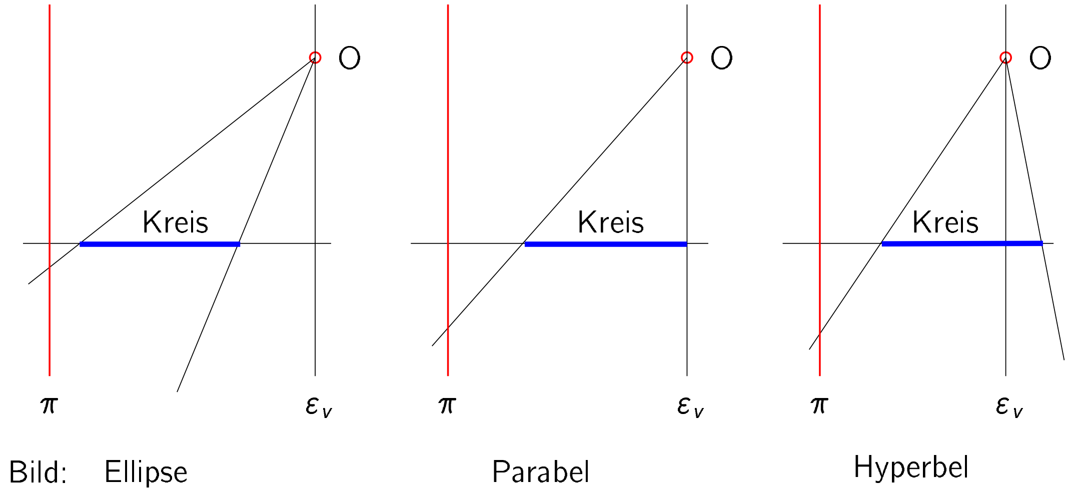


Abbildung 5.87: Zentralprojektion eines horizontalen Kreises, der die Verschwindungsebene a) meidet b) berührt c) schneidet

Beispiel 5.3 *Das Beispiel in Abb. 5.88 zeigt ein perspektives Bild einer Kugel mit dem Augpunkt* **in** *der Kugel. Bei der Projektion von Längen– und Breitenkreisen können alle drei Fälle (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten.*

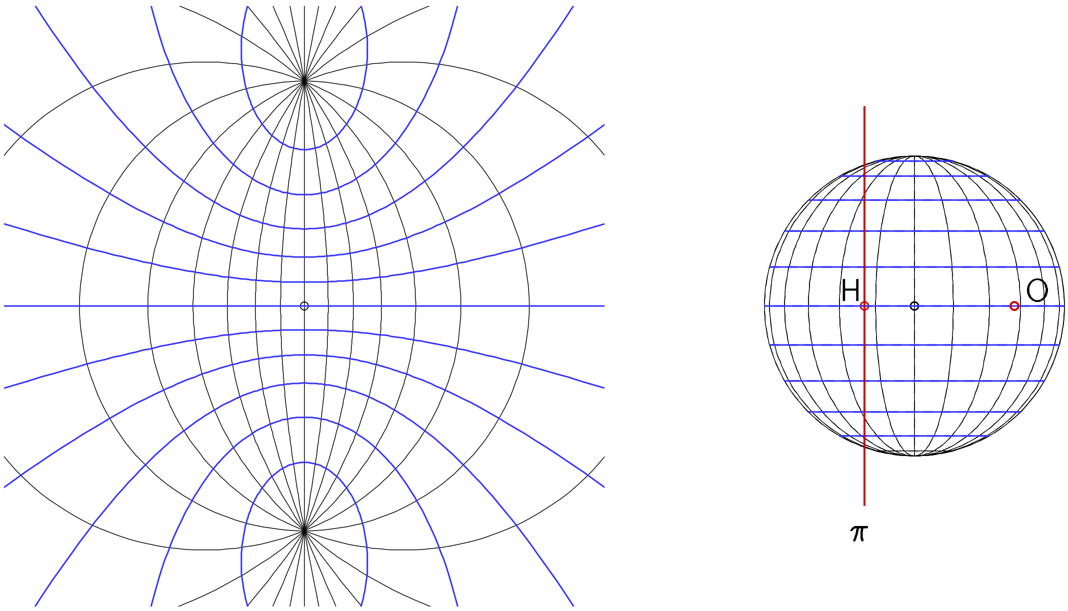


Abbildung 5.88: Zentralprojektion einer Kugel: Augpunkt **in** der Kugel

5.11 Zum Schluss: Aufgaben

Aufgabe 5.34 *:*
Gegeben: Das perspektive Bild eines Quaders, Hauptpunkt und Distanz und der Mittelpunkt M der Kugel, die den Quader in der Mitte des Deckelquadrats berührt.
Gesucht: Der Umriss der Kugel (im perspektiven Bild).
Hinweis: Da keine wahren Längen angetragen werden müssen, kann man annehmen, dass M in der Bildtafel liegt. Zeichne einen Grundriss für die Kugel (vgl. Fig. 5.84).

$d = 6cm$

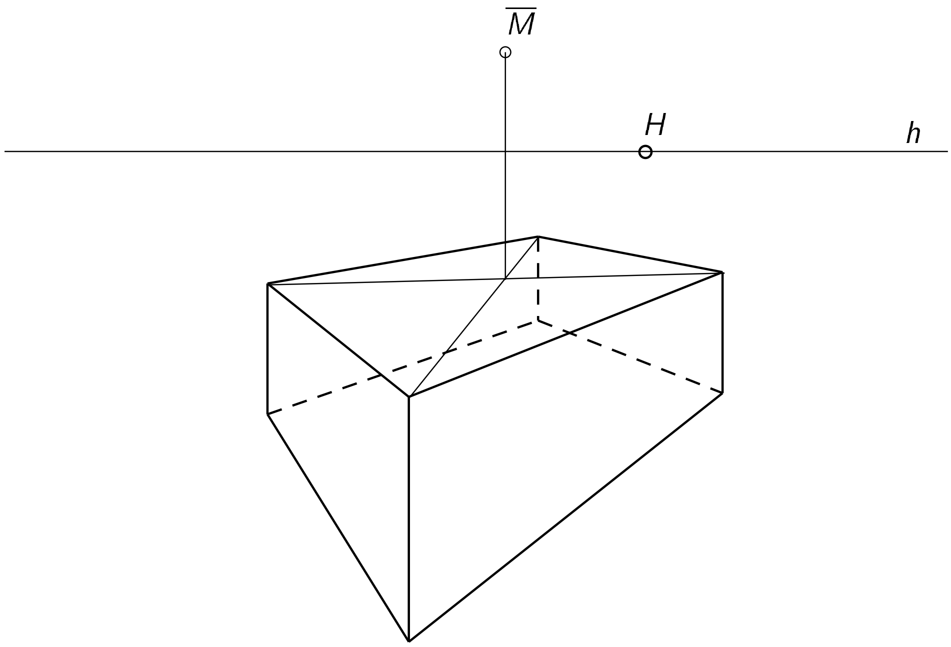


Abbildung 5.89: Konstruktion eines Kugelumrisses im perspektiven Bild

Aufgabe 5.35 *:*
Gegeben: *Grund- und Aufriss einer Kapelle (Quader mit aufgesetzter Halbkugel) mit Portal (Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis) und Blitzableiter (Strecke), sowie das perspektive Bild des Quaders in Architektenanordnung.*
Gesucht: *Vervollständigung des perspektiven Bildes (Konstruktion der Halbkugel, des Portals und Blitzableiters). Zeichnen Sie nur sichtbare Kanten/Strecken.*

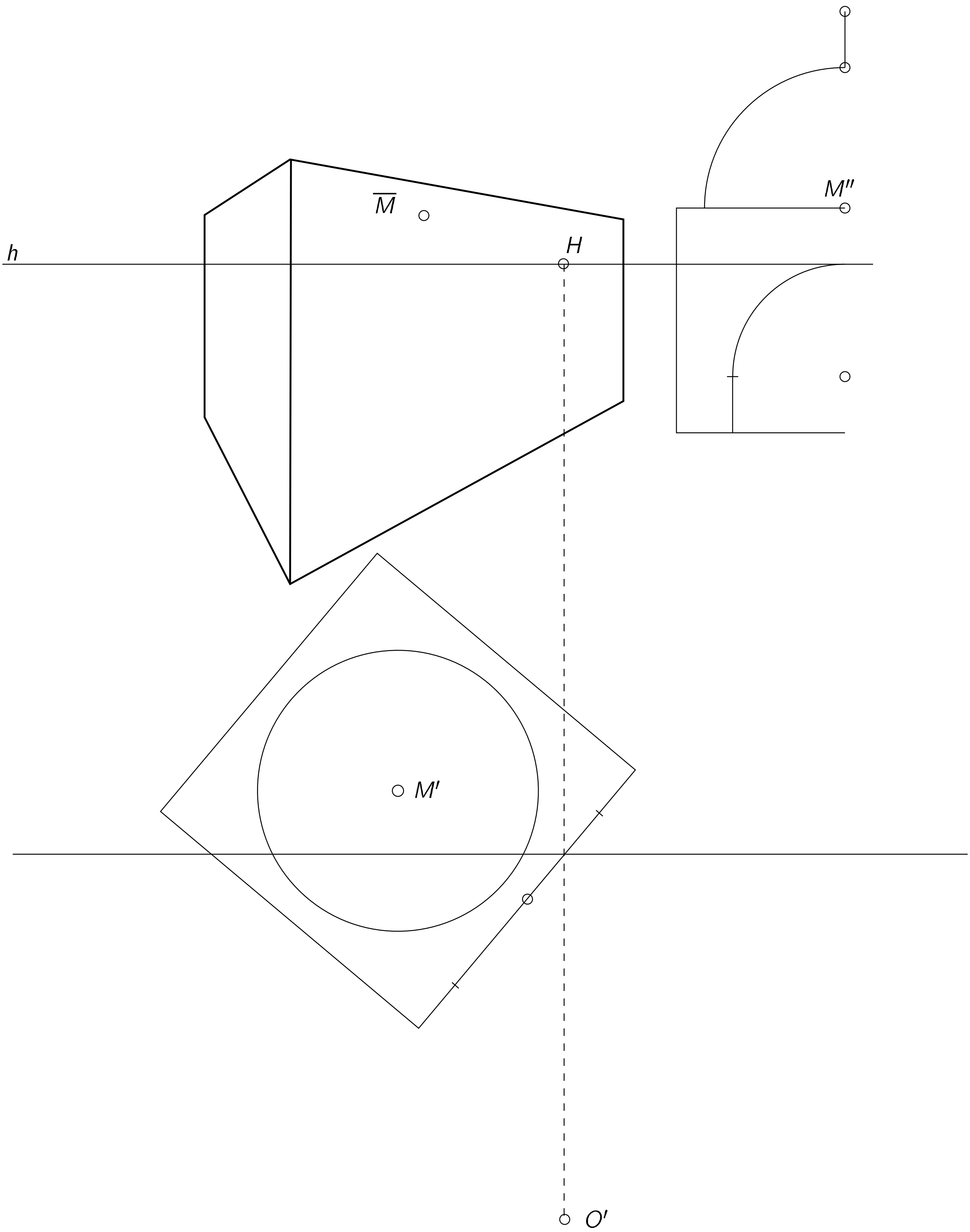


Abbildung 5.90: Projektion von Quader, Kugel und Kreis

Aufgabe 5.36 :

Gegeben: Grund-, Aufriss und perspektives Bild eines Turmes mit angrenzender Mauer. In der Mauer soll ein Torbogen nach Vorgabe in Grund- und Aufriss installiert werden.

Gesucht: Torbogen (zwei Ellipsen) im perspektiven Bild.

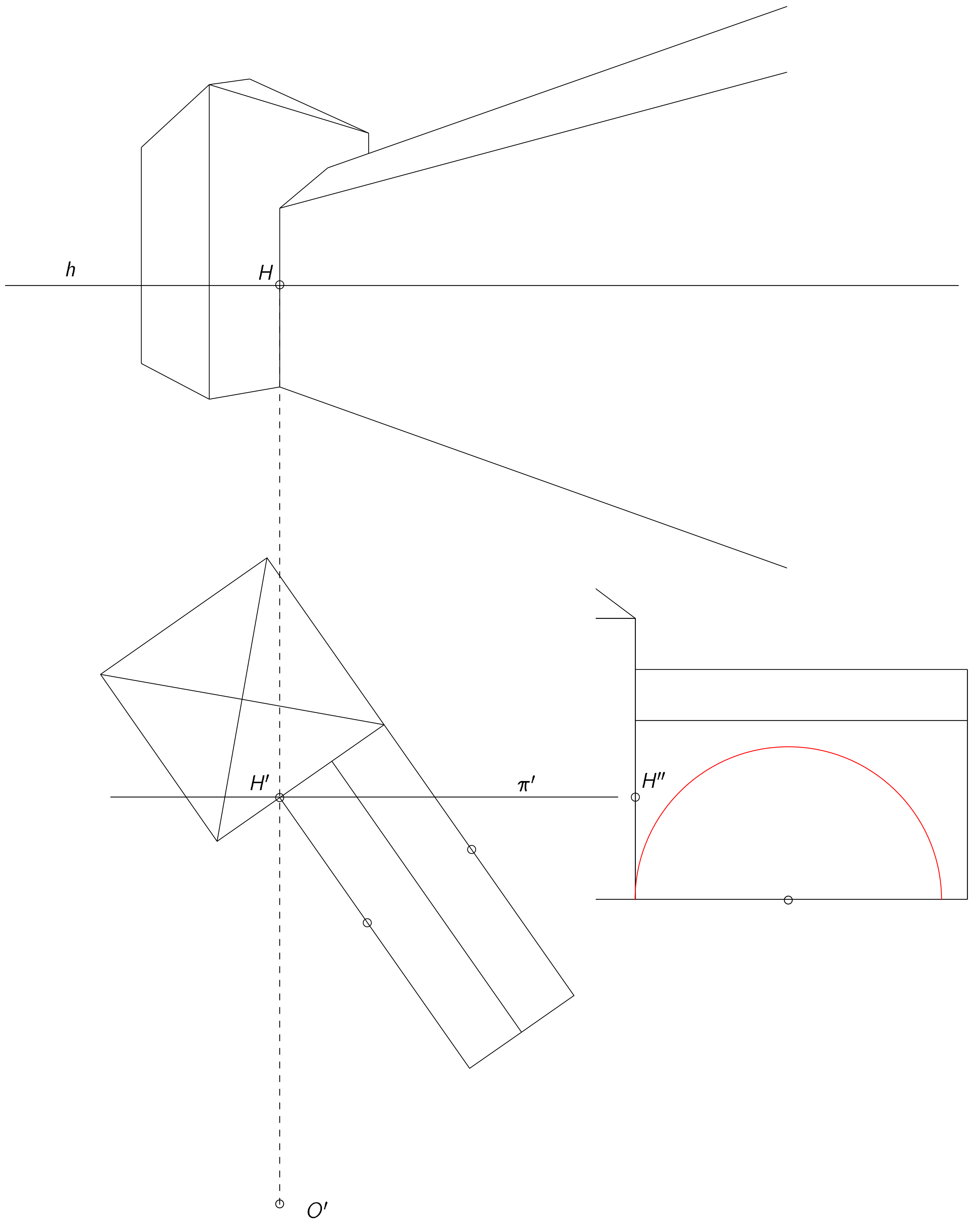


Abbildung 5.91: Projektion eines Torbogens (stehende Kreise)

Aufgabe 5.37 :
Gegeben: Das perspektive Bild eines Torbogens und die Sonnenpunkte S und S_F.
Gesucht: Der zugehörige Schatten des Torbogens.
Hinweis: Konstruiere den Schatten einiger Punkte (der Ellipse(n)).

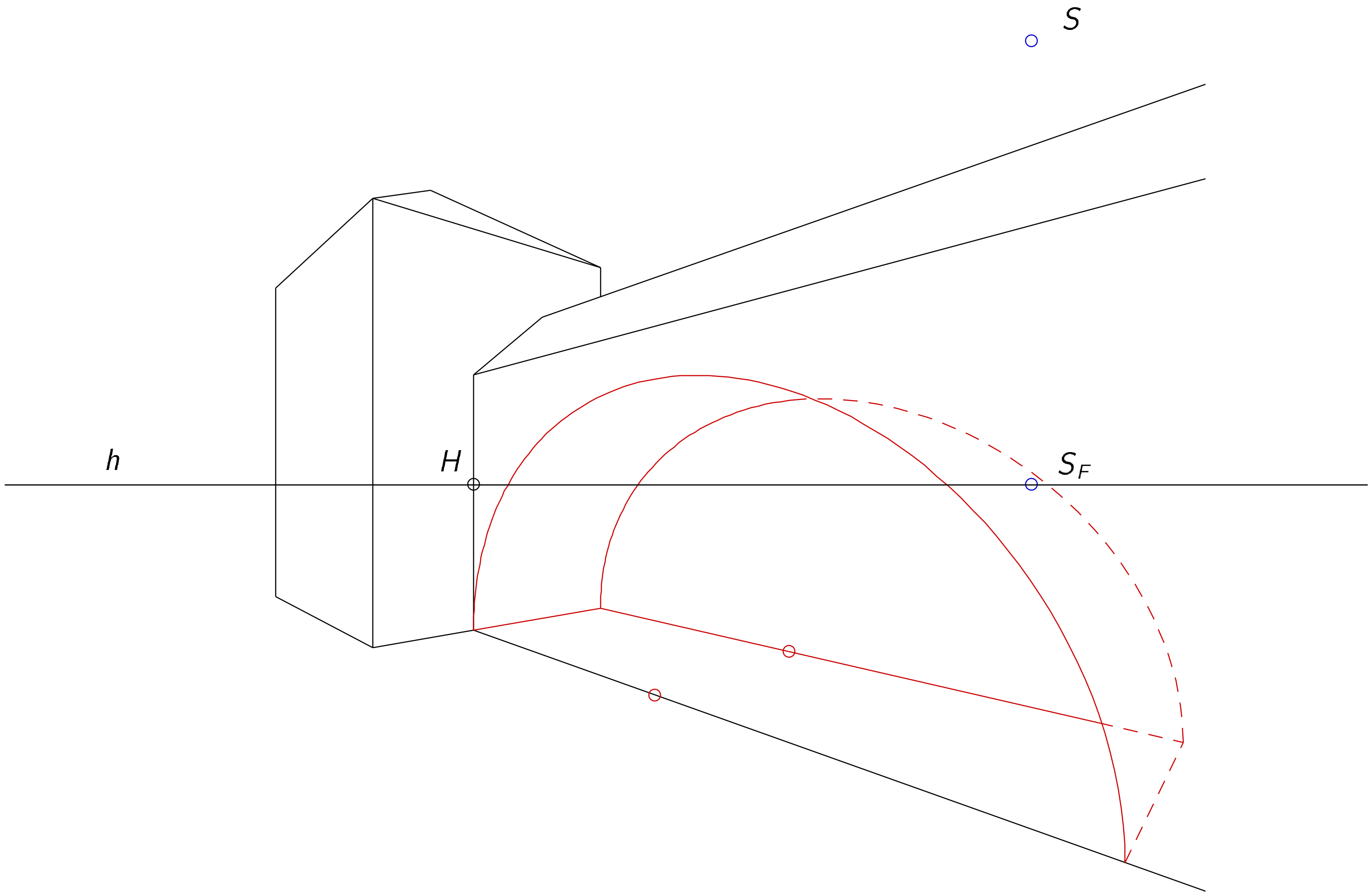


Abbildung 5.92: Schatten eines Torbogens bei gegebenem Sonnenlicht

Aufgabe 5.38 :
Gegeben: Perspektives Bild eines Hauses und eines Turmes. Die Traufhöhe des Hauses ist 2.5*cm*.
Gesucht: Wahre Abmessungen der Gebäude.
Frage: Wie könnte man den Hauptpunkt rekonstruieren, wenn er nicht gegeben wäre ?

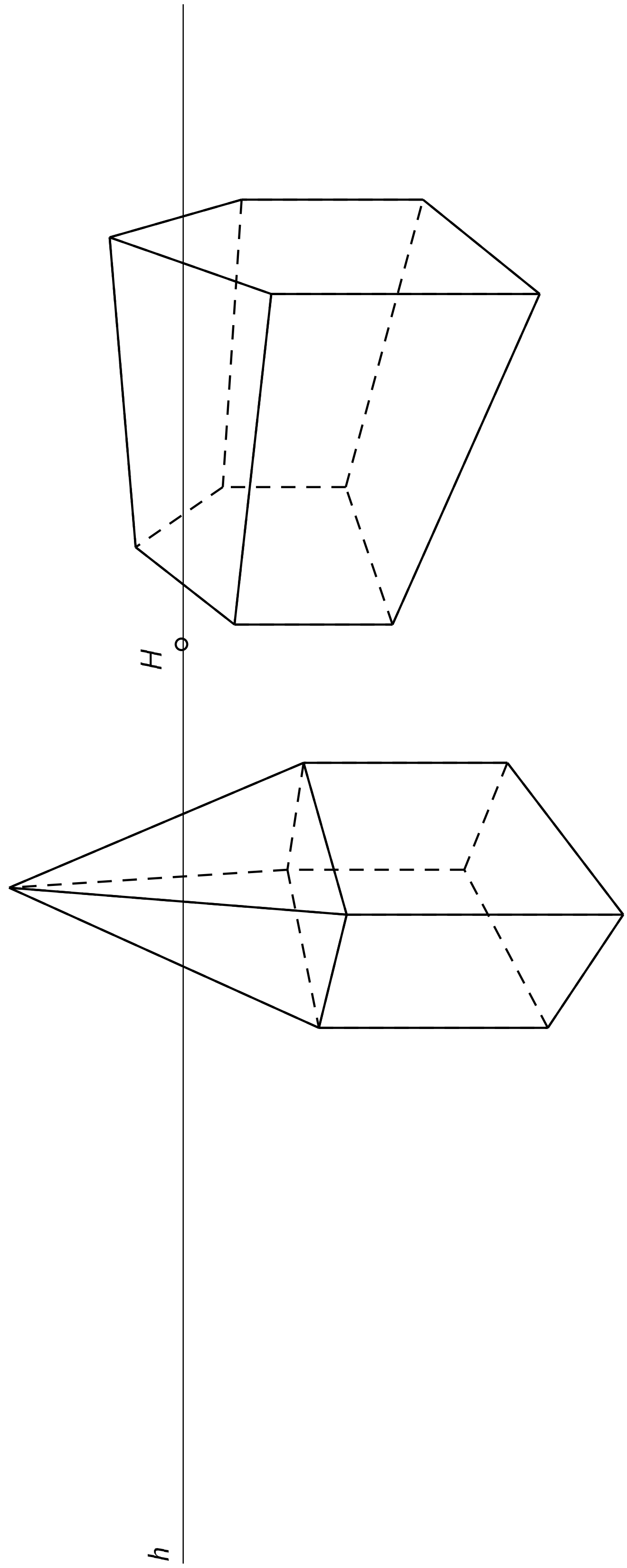


Abbildung 5.93: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss

Aufgabe 5.39 :
Gegeben: Perspektives Bild eines Hauses und eines Turmes.
Gesucht: Schlag– und Eigenschatten der Gebäude.

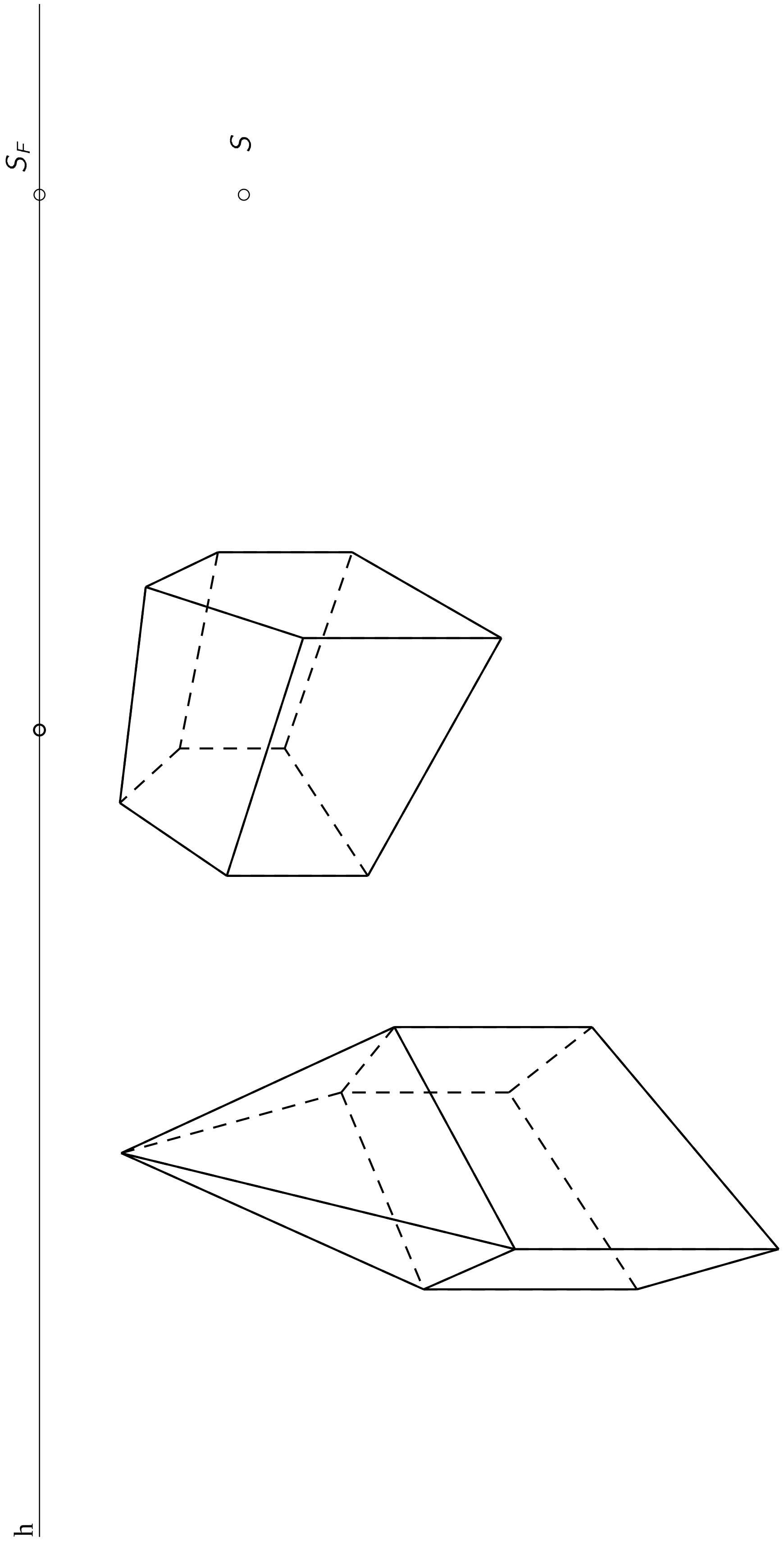


Abbildung 5.94: Schatten bei vorgebenem Sonnenpunkt S

Aufgabe 5.40 :
Gegeben: *Grund- und Aufriss einer Brücke über einer Eisenbahnlinie, sowie die Bildtafel eines perspektiven Bildes im Grundriss und der Augpunkt in Grund- und Aufriss.*
Gesucht: *Das zugehörige perspektive Bild. Nehmen Sie dabei an, dass die Geleise und Kanten der Böschungen geradlinig bis ins "Unendliche" verlaufen. Zeichnen Sie mindestens 13 Schwellen (vereinfacht als Strecken dargestellt).*
Hinweis: *Da die Bildtafel die Vorderfront der Brücke enthält, entsteht eine sog.* Frontalperspektive *und Sie können den gegebenen Aufriss im perspektiven Bild verwenden (Architektenanordnung !, $O'' = H$).*

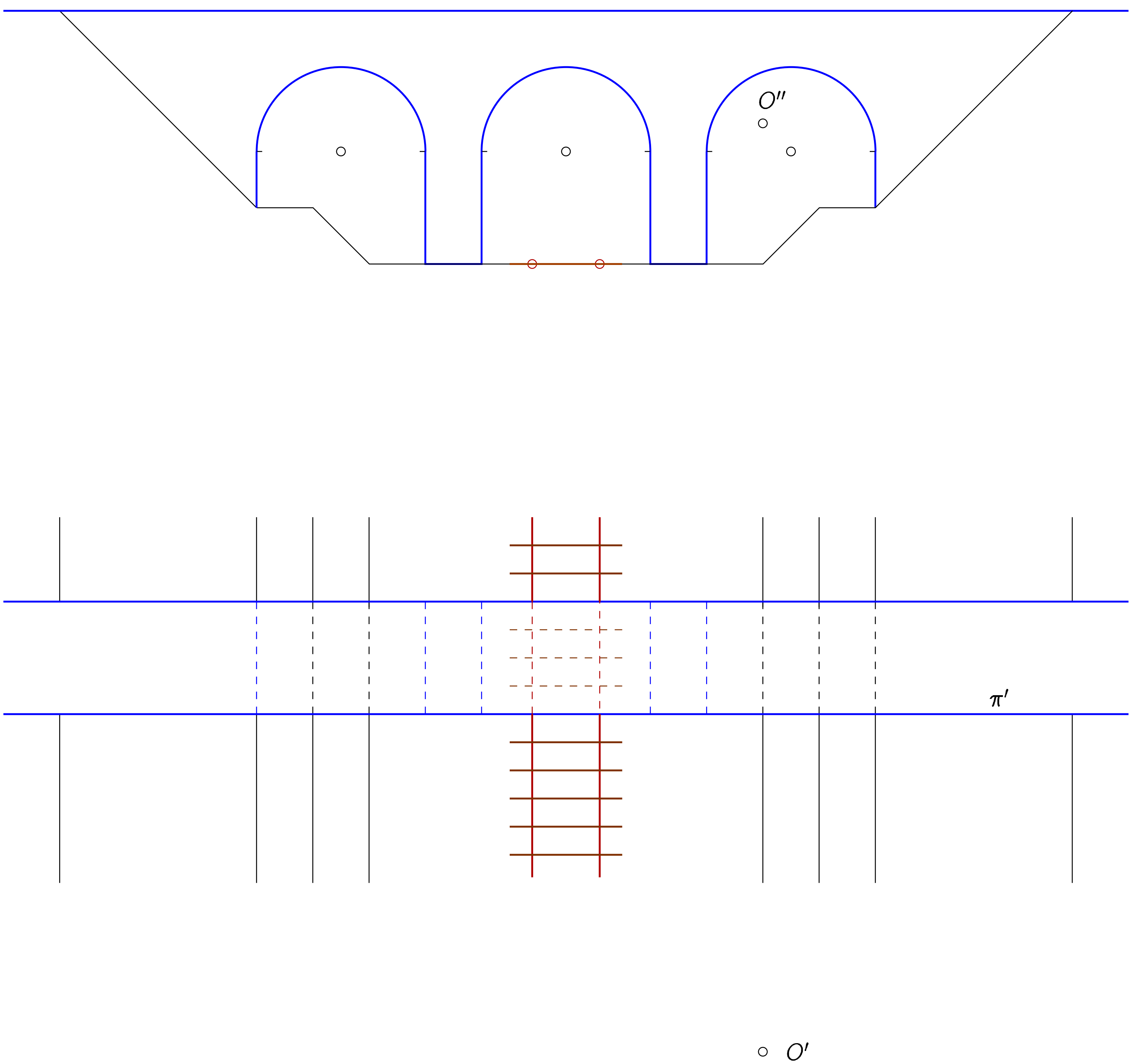


Abbildung 5.95: Frontalprojektion einer Bruecke