Blatt 2

Ausgabe: Freitag, 13.11.20; Abgabe bis: Freitag, 20.11.2020, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Fourier Transformation [12 Punkte]

In der QM wird uns die Fourier Transformation regelmäßig begegnen wenn wir zwischen Orts- und Impulsdarstellung der quantenmechanischen Wellenfunktion wechseln. Dies wird uns erlauben Differentialgleichungen auf einfache algebraische Gleichungen zurückzuführen und Symmetrien quantenmechanischer Systeme (Translationen in Raum und Zeit) auszunutzen.

Wir definieren die Fouriertransformation für Funktionen f, die im Unendlichen ausreichend schnell verschwinden:

$$F(k) = \mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x), \tag{1}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx} F(k). \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

(1.a) (**2 Punkte**) Zeigen Sie die Konsistenz unserer Definition, d.h. dass Gl. (2) aus Gl. (1) folgt, bzw. dass:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f, \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}F = F. \tag{4}$$

(1.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie die *Parsevalsche Identität*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f^*(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ F^*(k) G(k). \tag{5}$$

(1.c) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass Ableitungen von der Fourier-Transformation in Produkte verwandelt werden:

$$F(k) = \mathcal{F}f \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}(df/dx) = ikF(k). \tag{6}$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Funktionen f und F stetig differenzierbar sind.

(1.d) (**2 Punkte**) Gegeben sei

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\ p(x - x') f(x'). \tag{7}$$

Zeigen Sie das *Faltungstheorem*:

$$\mathcal{F}g(k) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}p(k) \cdot \mathcal{F}f(k). \tag{8}$$

(1.e) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die Fouriertransformation $F(k)$ von ($\sigma, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

und skizzieren Sie $f(x)$ und $F(k)$. Wie steht die "Breite" von $f(x)$ in Relation zu der von $F(k)$? *Hinweis: Überlegen Sie zuerst, welcher Parameter die "Breite" von $f(x)$ charakterisiert.*

Aufgabe 2 Fourier-Transformation in Bra-Ket-Notation [8 Punkte]

In der Vorlesung und der letzten Übung haben wir bereits gesehen, dass die Bra-Ket-Notation sehr nützlich ist, um Vektoren und Operatoren, sowie deren Wirkung auf Vektoren, kompakt und abstrakt aufzuschreiben. In dieser Aufgabe wollen wir diese Notation verwenden, um Fourier-Transformationen elegant und allgemein darzustellen. Gleichzeitig sehen wir in diesem Zusammenhang, wie einfach die Bra-Ket-Notation unendlich-dimensionale Hilberträume erfassen kann.

(2.a) (**2 Punkte**) Verwenden Sie die Fourier-Transformation aus der vorherigen Aufgabe, um die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Differentialoperators $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ zu finden, d.h. bestimmen Sie *alle* Lösungen der Eigenwertgleichung

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x) = pf_p(x). \tag{10}$$

Bemerkung: Die Eigenfunktionen sind nur bis auf Normierung eindeutig. Die Normierungskonstante werden wir in einer der nächsten Teilaufgaben bestimmen.

Der Differentialoperator $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist eine Art, den Impulsoperator in der QM darzustellen (dazu später mehr in der Vorlesung). Die abstrakten Eigenzustände des Impulsoperators bezeichnen wir fortan mit $|p\rangle$, ihre Ortsdarstellung, die sie in Teil (2.a) bestimmt haben, schreiben wir als $f_p(x) = \langle x|p\rangle$. Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für den Hilbertraum, der 1-dimensionale QM-Probleme erfasst. Es gilt daher die Identität

$$\hat{\mathbb{1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\ \ |p\rangle\langle p|\,. \tag{11}$$

(2.b) (**1 Punkt**) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (2.a), um den (abstrakten) Vektor $|x\rangle$, der später ein Teilchen am Ort x beschreiben wird, in der Impulsbasis $\{|p\rangle\}$ darzustellen. *Hinweis*: $\langle x|p\rangle \propto \exp[ipx/\hbar]$.

(2.c) (**3 Punkte**) Die Bra-Ket-Notation ist besonders nützlich, wenn man Skalarprodukte von Vektoren bestimmen möchte. Zeigen Sie, dass für beliebige Orte $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \tag{12}$$

wenn Sie die Normierung der Eigenfunktionen des Impulsoperators richtig wählen. Bestimmen Sie die Normierungskonstante!

Wir betrachten nun einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$ für ein eindimensionales, quantenmechanisches Teilchen. Wir werden bald in der Vorlesung sehen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, so einen Zustand mathematisch darzustellen. Die wohl klassisch-intuitivste Möglichkeit ist mittels seiner Ortswellenfunktion, $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Eine andere Darstellung ist mittels der Impulswellenfunktion, $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$.

(2.d) (**2 Punkte**) Finden Sie einen einfachen (!) Zusammenhang zwischen Orts- und Impulswellenfunktion. Verwenden Sie dazu die Bra-Ket-Notation und die Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben.

Literaturhinweis: Weitere Informationen unter anderem zur Orts- und Impulsdarstellung finden Sie im Buch von Claude Cohen-Tannoudji et al. (Bd. 1) in Kapitel 2.