Abschlussklausur

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: XXX

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter.
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		15
3		20
4		20
5		15
Σ		100

Einige nützliche Konstanten

Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Atmosphärischer Luftdruck bei 20°C = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
Dichte von Luft bei 20° = $1{,}20$ kg/m^3

Name: Muster Lösung

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, ggf. mit kurzer Rechnung) auf die folgenden Fragen.

a) Zu Beginn des *Superbowls* (dem Endspiel der US-amerikanischen Football Meisterschaft) fliegt eine Formation von Düsenjets mit konstanter Geschwindigkeit $v = 800$ km/h über das Stadium. Im Stadium und im Luftraum darüber hat die Luft Normaldruck und eine Temperatur von 20°C. Fliegen die Düsenjets schneller oder langsamer als die Schallgeschwindigkeit in der Luft?

$$V = 800 \text{km/h} \cdot \frac{1000 \text{ m/km}}{3600 \text{ s/h}} = 222 \text{ m/s}$$

$$c_{Schall} \cong 340 \text{ m/s}$$

$\Rightarrow$ Die Düsenjets fliegen langsamer als Schallgeschwindigkeit

b) Beim *Kickoff* (dem Anstoß) wird ein langer und hoher Ball getreten. Der Ball befinde sich, im Inertialsystem des Stadions gemessen, genau für 4 s in der Luft. Wenn einer der Piloten (siehe erste Teilaufgabe) in seinem Inertialsystem die Zeit misst, die der Ball in der Luft ist, misst er ein längeres oder kürzeres Zeitinterval als 4 s? Kann ein Pilot diesen Zeitunterschied mit seiner Armbanduhr (Ablesegenauigkeit $\delta t = 0.1$ s) messen?

Eigenzeitintervall $\Delta t_0 = 4{,}0\,s$

Piloten messen $\Delta t = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$, da $\gamma > 1$

d.h. sie messen ein längeres Zeitintervall.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{222 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2\right)^{1/2}} \cong 1{,}000\ldots \Rightarrow$$ Unterschied ist nicht meßbar mit $\delta t = 0.1 s$

c) Der Ball beim *Kickoff* (siehe die letzten beiden Teilaufgaben) lege insgesamt eine horizontale Distanz L zurück, bis er auf dem Spielfeld landet. Zum Zeitpunkt an dem der Ball seine größte (vertikale) Höhe erreicht, hat er eine horizontale Distanz von kleiner, gleich oder größer $L/2$ zurückgelegt? Warum?

Die horizontale Distanz bei der größten Höhe ist größer als $L/2$.

Sie wäre $L/2$ ohne Luftreibung, d.h. im Vakuum. Mit Luftreibung nimmt die horizontale Geschwindigkeit kontinuierlich ab und der Ball legt in der zweiten Hälfte des Fluges eine geringere Strecke zurück.

Name: Muster Lösung

d) *Otto von Guericke* ließ zwei abgedichtete hohle Halbkugeln mit 40 cm Durchmesser herstellen und mit der von ihm erfundenen Luftpumpe evakuieren. Welche Kraft war zur Trennung nötig (in einer Umgebung mit normalem atmosphärischen Luftdruck)?

Der externe Luftdruck hält die Kugeln zusammen.

$F = p_{Luft} \cdot A$ und $A = \pi R^2$; $R = 0{,}2\,m$

$F = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}126\,m^2 = 1{,}27 \cdot 10^4\,N$

Hinweis: Wir nutzen $A = \pi R^2$ (die Querschnittsfläche) und nicht $4\pi R^2$ (die Gesamtoberfläche), da die tangentialen Kräfte nicht beitragen;

e) Wie ändert sich die Volumenflussrate durch ein Rohr, wenn statt der Nennweite 10 (Innendurchmesser 12,5 mm) die Nennweite 50 (Innendurchmesser 53 mm) verwendet wird? Alle anderen Parameter (unter anderem die Länge, die Druckdifferenz zwischen den Enden und die Viskosität des Fluids) sollen gleich bleiben und die Strömung als laminar und viskos angenommen werden.

Nach Hagen-Poiseuille ist die Volumenflußrate $\frac{dV}{dt} \sim R^4 \Rightarrow$ Die Flußrate nimmt um einen Faktor $\left(\frac{53\,mm}{12{,}5\,mm}\right)^4 \approx 323$ zu.

f) Ein Schiff schwimmt in einem großen Becken. Wie verändert sich der Wasserspiegel im Becken, wenn das Schiff sinkt? Warum?

Der Wasserspiegel sinkt!

Das Schiff sei aus einem Material der Dichte ρ_S und habe ein Volumen V_S.

Wenn es schwimmt verdrängt es seine Masse an Wasser: (nach Archimedes) $\rho_{H_2O} V_{schwimmt} = V_S \rho_S$

$\Rightarrow V_{schwimmt} = \rho_S / \rho_{H_2O}\, V_S$

Wenn es gesunken ist, verdrängt es nur noch sein Volumen an Wasser: $V_{gesunken} = V_S$, daher $V_{gesunken} = V_S < V_{schwimmt} = \rho_S / \rho_{H_2O}\, V_S$, da $\rho_S > \rho_{H_2O}$ (sonst würde das Schiff nicht sinken!)

Name: Muster Lösung

g) Unter welchen Voraussetzungen zeigt ein schwingungsfähiges System harmonisches Verhalten?

Wenn es eine lineare Rückstellkraft gibt, d.h.
$$\text{Rückstellkraft} = -\underbrace{(\text{positive Konstante})}_{\text{z.B. } k} \cdot \text{Auslenkung}$$

h) Wie ändert sich die Kreisfrequenz ω und die Gesamtenergie E_{ges} des Systems aus der letzten Teilaufgabe, wenn sich die Amplitude $x_{\max}$ halbiert?

$\omega = \sqrt{k/m}$ ist unabhängig von der Auslenkung und ändert sich nicht.
$E_{ges} = E_{pot,max} = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \Rightarrow E_{ges}$ wird um 1/4 reduziert, wenn x_{max} um 1/2 reduziert wird.

i) Eine Vollkugel und eine Hohlkugel, deren Masse in einem dünnen Rand konzentriert ist, rollen die gleich schiefe Ebene hinab. Wenn beide Kugeln die gleiche Masse M, die gleiche Oberflächenbeschaffenheit und den gleichen Radius haben und zeitgleich aus der Ruhelage losgelassen werden, welche Kugel erreicht das untere Ende der schiefen Ebene zuerst? Warum?

Durch die Rollbedingung $v = \omega \cdot R$ ist die lineare Bewegung an Drehung gekoppelt. Die Vollkugel hat ein kleineres Trägheitsmoment, bei gleicher Masse und somit geht weniger Energie in Rotationsenergie, und mehr in (lineare) kinetische Energie
$\Rightarrow$ Die Vollkugel rollt schneller und ist schneller unten.

j) Wie ändert sich das Ergebnis aus der letzten Teilaufgabe, wenn die Kugeln rutschen und nicht rollen? Sie können davon ausgehen, dass beim Rutschen keinerlei Drehbewegung auftritt.

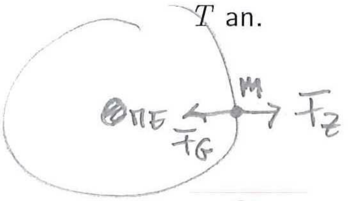
Für reines Rutschen ist die Reibungskraft unabhängig von der Masseverteilung und beide Kugeln sind gleich schnell.

Name: Muster Lösung

Aufgabe 2

Geostationärer Satellit (15 Punkte). Für Wetter- und Kommunikationssatelliten ist ist oft vorteilhaft, wenn ihre Umlaufbahnen *geostationär* sind, d.h. wenn ihre Umlaufzeit T um die Erde genau der Rotationsperiode der Erde, d.h. $T = 1$ Tag, entspricht. In diesem Fall befindet sich der Satellit immer über demselben Punkt auf der Erdoberfläche, so dass z.B. Antennen oder Beobachtungsinstrumente nicht kontinuierlich neu ausgerichtet werden müssen. Für den Rest der Aufgabe können Sie die Erdrotation und Reibung vernachlässigen und die Erde als perfekte Kugel betrachten.

a) Stellen Sie eine Gleichung für stabile, kreisförmige Umlaufbahnen um die Erde auf. Geben Sie einen Ausdruck für den Radius der Umlaufbahn als Funktion der Umlaufzeit T an.



$$F_{Zentripetal} = F_{Gravitation}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{G M_E m}{r^2} = m\omega^2 r$$

$\boxed{\text{mit } v = \omega \cdot r}$

$$\Rightarrow G M_E = \omega^2 r^3 \quad \text{und mit } \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \text{ folgt}$$

$$\Rightarrow G M_E = \frac{(2\pi)^2}{T^2} r^3$$

$$\Rightarrow r^3 = \left(\frac{G M_E}{4\pi^2} T^2\right) \Rightarrow r = \left(\frac{G M_E}{4\pi^2} T^2\right)^{1/3}$$

b) Wie weit über der Erdoberfläche befindet sich ein Satellit in einer *geostationären* Umlaufbahn?

$$r = \left(\frac{G M_E}{4\pi^2} T^2\right)^{1/3} = \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg \cdot s} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\, kg}{4\pi^2} (86400\, s)^2\right)^{1/3}$$

$= 4{,}22 \cdot 10^7\, m = 4{,}22 \cdot 10^4\, km$ vom Zentrum der Erde.

Mit $R_E = 6400\, km$ folgt $(4{,}22 \cdot 10^4 - 6{,}4 \cdot 10^3)\, km \simeq \underline{\underline{36\,000\, km}}$ über der Erdoberfläche

c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Satellit auf einer *geostationären* Umlaufbahn?

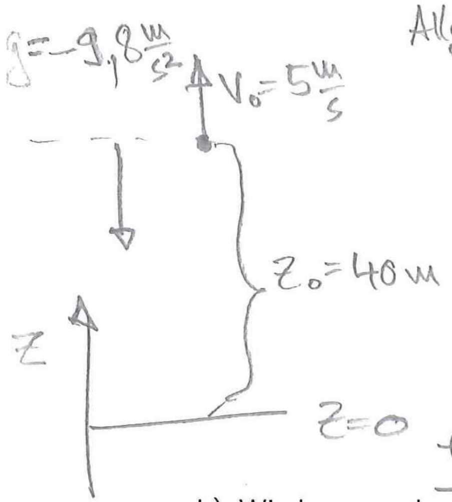
$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{86400\, s} \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\, m \simeq 3{,}1 \cdot 10^3\, \frac{m}{s}$$

Name: Muster Lösung

Aufgabe 3

Abgeworfener Sandsack (20 Punkte). Ein Heißluftballon steigt vertikal mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 m/s. Als der Ballon genau 40 m über dem Erdboden ist, koppelt die Besatzung einen Sandsack ab (der zunächst mit dem Ballon verbunden war und mit ihm aufgestiegen ist). Nach dem Loskoppeln befindet sich der Sandsack im freien Fall. Sie können die Luftreibung vernachlässigen.

a) In welcher Höhe befindet sich der Sandsack 0,5 und 2,0 s nach seinem Abkoppeln?



Allgemein: $a = -g = -9{,}8\,m/s^2$

$v = v_0 + gt = 5\,m/s - 9{,}8\,m/s^2\,t$

$z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

$= 40\,m + 5\,m/s \cdot t - \frac{1}{2}\, 9{,}8 \frac{m}{s^2}\, t^2$

$\underline{t = 0{,}5\,s} \Rightarrow z = 40\,m + 5 \frac{m}{s} \cdot 0{,}5\,s - \frac{1}{2}\, 9{,}8 \frac{m}{s^2} (0{,}5)^2 s^2$

$= \underline{41{,}3\,m}$

$\underline{t = 2\,s} \Rightarrow z = 40\,m + 5 \frac{m}{s}\, 2\,s - \frac{1}{2}\, 9{,}8 \frac{m}{s^2} (2\,s)^2 = \underline{30{,}4\,m}$

b) Wie lange nach seinem Abkoppeln schlägt der Sandsack auf dem Boden auf?

Boden: $z = 0$

$0 = 40\,m + 5\,m/s \cdot t - \frac{1}{2}\, 9{,}8\,m/s^2\, t^2$

$\Rightarrow t^2 - 1{,}02\,t - 8{,}15 = 0$ für t in s,

Löse mit p-q-Formel: $t_{1,2} = \frac{1{,}02}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1{,}02}{2}\right)^2 + 8{,}15}$

$\Rightarrow t_{1,2} = 0{,}51 \pm 2{,}9 \Rightarrow t = 3{,}41\,s$ ist der Aufschlagzeitpunkt.

(Die Lösung mit negativer Zeit ist hier nicht relevant)

c) Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Sandsack auf dem Boden auf?

$v = 5\,m/s - 9{,}8\,m/s^2\, t$

$t = 3{,}41\,s \Rightarrow v = 5\,m/s - 9{,}8\,m/s^2\; 3{,}41\,s = \underline{\underline{-28{,}5\,m/s}}$

Name: Muster Lösung

d) Was ist die maximale Höhe über dem Erboden, die der Sandsack erreicht?

$$z = 40\,m + 5\,m/s\,t - \frac{1}{2}\,9{,}8\,m/s^2\,t^2 \quad \text{für alle } t;$$

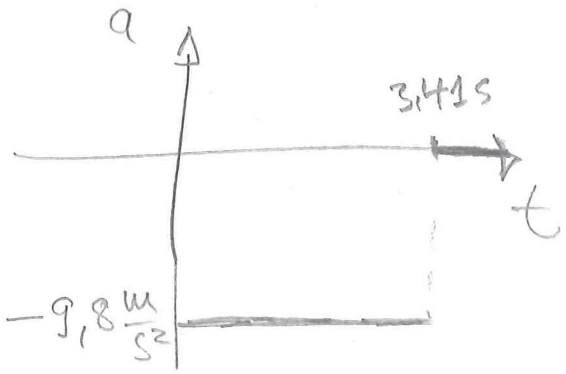
Maximal für $\frac{dz}{dt} = 0$, d.h. wenn die Geschwindigkeit Null ist.

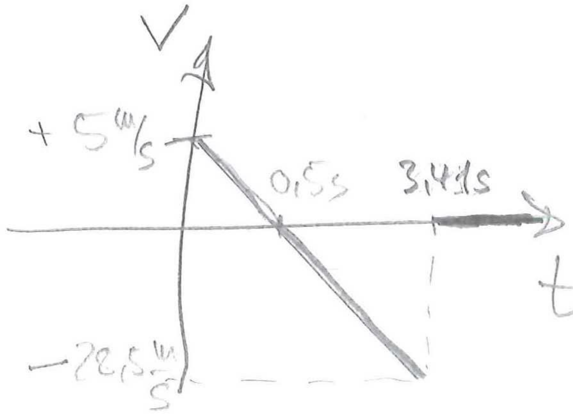
$$\frac{dz}{dt} = v = 5\,m/s - 9{,}8\,m/s\,t \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t = \frac{5\,m/s}{9{,}8\,m/s^2} = 0{,}51\,s$$

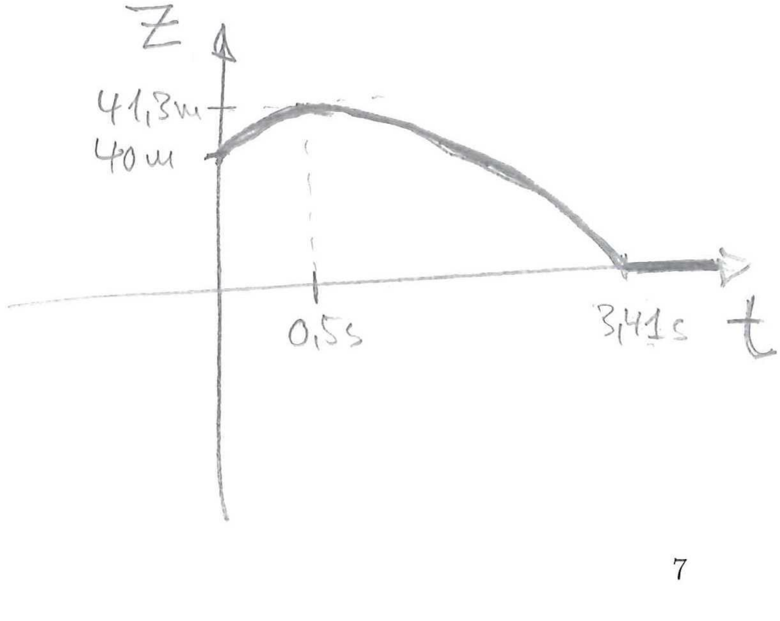
Zu diesem Zeitpunkt ist

$$z = z_{max} = \underline{41{,}3\,m}$$

e) Skizzieren Sie die Graphen von Beschleunigung a gegen Zeit t, Geschwindigkeit v gegen t, und Höhe z gegen t.







Name: Muster Lösung

Aufgabe 4

Projekt Gyrobus (20 Punkte). Ein *Gyrobus* der Masse $M = 1000$ kg wird durch die in einem Schwungrad gespeicherte Energie angetrieben. Das Schwungrad ist eine zylinderförmige Scheibe mit Radius $r = 50$ cm und Dicke $d = 10$ cm aus Stahl mit einer Dichte $\rho = 7000$ kg/m^3.

a) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω muss sich die Schwungscheibe am Anfang der Fahrt mindestens drehen, damit der Bus eine Paßstrasse mit einem Gesamthöhenunterschied von h = 500 m hinauffahren kann? In dieser Teilaufgabe können Sie Reibung vernachlässigen.

Masse der Schwungscheibe: $m = V \cdot \rho = \pi r^2 \cdot d \cdot \rho$
$= \pi (0{,}5\,m)^2\, 0{,}1\,m \cdot 7000\,kg/m^3$
$= 550\,kg$

Trägheitsmoment der Scheibe: $I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 550\,kg\,(0{,}5\,m)^2 = 68{,}75\,kg\,m^2$

Benötigte Energie: $E_{pot} = M g \cdot h = 1000\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 500\,m = \underline{4{,}9 \cdot 10^6\,J}$

Energie in der Schwungscheibe: $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \overset{!}{=} E_{pot}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_{pot}}{I}} = \left(\frac{2 \cdot 4{,}9 \cdot 10^6\,J}{68{,}75\,kg\,m^2}\right)^{1/2} = \underline{378\,rad/s} = 60{,}2\ \frac{\text{Umdrehungen}}{s}$

b) Wir gehen davon aus, dass die Schwungscheibe im Bus mit der in Teilaufgabe a) bestimmten minimalen Winkelgeschwindigkeit aufgeladen ist (d.h. also auf die gleiche Rotationsenergie wie in a) aufgeladen ist). Wie weit kann der Bus auf einer ebenen Strecke mit 50 km/h fahren? Berücksichtigen Sie den Luftwiderstand; der Widerstandskoeffizient des Buses betrage $C_w = 0.5$ und seine Querschnittsfläche 4 m^2 und die Temperatur 20°C. Sie können Energieverluste im Bus und die Rollreibung vernachlässigen.

Luftreibung: Nutze Newton-Reibungsformel $\boxed{50\,\frac{km}{h} = 13.9\,m/s}$

$F_R = \frac{1}{2} \rho_{Luft} \cdot A \cdot c_W \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,kg/m^3 \cdot 4\,m^2 \cdot 0{,}5 \left(13{,}9\,\frac{m}{s}\right)^2$

$\hat{=} 230\,N$

Beim Fahren geleistete Arbeit: $W = F \cdot x$

$\Rightarrow x = \frac{W}{F} = \frac{E_{pot}}{F} = \frac{4{,}9 \cdot 10^6\,N \cdot m}{230\,N} = 2{,}1 \cdot 10^4\,m$

$= \underline{\underline{21\,km}}$

Name: Muster Lösung

c) An einer Haltestelle soll die sich in Ruhe befindliche Schwungscheibe wieder auf die im Aufgabenteil a) bestimmte Winkelgeschwindigkeit beschleunigt werden. Dazu steht eine konstante elektrische Leistung von $P_{el} = 3000$ W zur Verfügung. Wie lange dauert der Aufladevorgang, wenn die Energieverluste beim Aufladen 20% betragen?

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$, wobei der Wirkungsgrad nur $\eta = 80\% = 0{,}8$ beträgt, also nur $P = \eta P_{el}$ an Leistung zur Verfügung steht.

$$\rightarrow \Delta t = \frac{\Delta W}{P} = \frac{E_{rot}}{\eta P_{el}} = \frac{4{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{0{,}8 \cdot 3000\,\mathrm{J/s}} = 2{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{s}$$

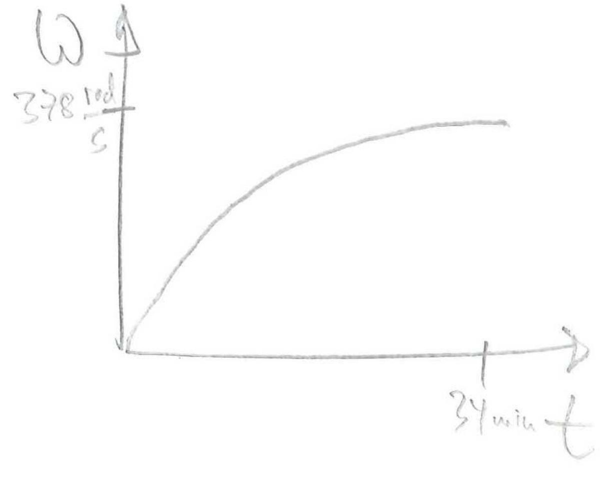
$$= \underline{\underline{34\ \mathrm{min}}}$$

d) Skizzieren Sie i) die Rotationsenergie und ii) die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit während des Aufladevorgangs.

$E_{rot} = \eta \cdot P_{el} \cdot t$

$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \eta P_{el} t$

$\rightarrow \omega = \left(\frac{2\eta P_{el} t}{I}\right)^{1/2}$



Name: Muster Lösung

Aufgabe 5

Kommunikation mit Seilwellen (15 Punkte). Eine $m_K = 20$ kg schwere Kiste hängt am Ende eines $L = 80$ m langen Seils, das in einen Schacht hinuntergelassen ist. Die Masse des Seils betrage $m_S = 2$ kg. Ein Höhlenforscher am Boden des Schachtes kommuniziert mit seinem Kollegen an der Erdoberfläche, in dem er das Seil am Ende, an dem auch die Kiste hängt, seitwärts auslenkt und eine transversale Welle im Seil anregt.

a) Was ist die Spannung im Seil (d.h. welche Kraft wirkt an seinem Ende), wenn Sie das Eigengewicht des Seiles vernachlässigen?

Spannung: $F = m \cdot g = 20\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 = 196\,\text{N}$

b) Was ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der transversale Seilwellen? Leiten Sie das Ergebnis aus einer Einheitenbetrachtung her, in dem Sie annehmen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur von der Spannkraft aus dem Aufgabenteil a) und der Masse pro Seillänge $\mu = m_S/L$ abhängt.

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196\,\text{N} \cdot 80\,\text{m}}{2\,\text{kg}}} = \underline{\underline{88{,}5\,\text{m/s}}}$$

Die Spannkraft hat Einheiten $\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$, die Masse pro Seillänge kg/m; wir wollen eine Geschwindigkeit in m/s, somit müssen wir F/μ teilen und die Wurzel ziehen.

c) Im Seil wird eine transversale harmonische Welle mit einer maximalen Auslenkung von 5 cm und einer Frequenz von 2,0 Hz angeregt. Was ist die Wellenlänge der harmonischen Schwingung? (Wenn Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der letzten Teilaufgabe nicht ausrechnen konnten, rechnen Sie mit $c_{\text{Seil}} = 100$ m/s weiter).

Allgemein: $c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{88{,}5\,\text{m} \cdot \text{s}}{2\,\text{s}} = \underline{\underline{44{,}25\,\text{m}}}$

d) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck an, der die Auslenkung des Seils ($y(x,t)$) als Funktion von Zeit und Ort für die in der letzten Teilaufgabe besprochene Situation beschreibt.

Allgemein: $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$

$A = 5\,\text{cm}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{0{,}14}{\text{m}}$ $\quad \omega = 2\pi f = 12{,}6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\Rightarrow y(x,t) = 5\,\text{cm} \cdot \sin(0{,}14/\text{m} \cdot x - 12{,}6\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + \phi)$

Natürlich könnte man ϕ weglassen oder einen cos(·) nehmen.