Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2007**
Institut für Informatik **Aufgabenblatt 1**
Dr. Brandt / Fischer & Harrenstein **23. April 2007**

Übung zur Vorlesung Multiagentensysteme

Tutorübung: 25. April 2007 Abgabetermin Hausaufgaben: 2. Mai 2007

Aufgabe 1 (*Repräsentation von Präferenzen durch Nutzenfunktionen*)

(a) Welche der folgenden Nutzenfunktionen v, w und x repräsentieren die gleiche Präferenzrelation über der Ergebnismenge $\{a, b, c\}$ wie u? (**T**)

$$\begin{array}{lll} u(a) = 0 & u(b) = 3 & u(c) = 9 \\ v(a) = 2 & v(b) = \pi & v(c) = \pi + 1 \\ w(a) = 0 & w(b) = 0 & w(c) = 1000 \\ x(a) = 0 & x(b) = -3 & x(c) = -9 \end{array}$$

(b) Sei $u\colon A \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion, d.h. $x > y$ impliziert $f(x) > f(y)$. Definieren Sie $v\colon A \to \mathbb{R}$, so dass $v(x) = f(u(x))$. Beweisen Sie, dass u die Präferenzen über A genau dann repräsentiert wenn v das auch tut. (**H**)

Aufgabe 2 (*Lexikographische Präferenzen*)

Bekanntlich kann man jede (rationale) Präferenzordnung über einer *endlichen* Menge A von Ergebnissen durch eine Nutzenfunktion $u\colon A \to \mathbb{R}$ repräsentieren. Falls die Menge der Ergebnisse jedoch unendlich ist, muss dies nicht länger der Fall sein. Betrachten sie die *lexikographische Ordnung* $\succsim$ auf $> \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. für alle $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) \succsim (x', y') \text{ genau dann wenn } x > x' \text{ oder } x = x' \text{ und } y \geq y'.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\succsim$ transitiv und vollständig ist. (**H**)

(b) Zeigen Sie, dass $\succsim$ nicht repräsentiert werden kann durch eine Nutzenfunktion, das heißt, es gibt keine Funktion $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $u(x, y) \geq u(x', y')$ genau dann wenn $(x, y) \succsim (x', y')$. (**T**)

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Ergebnismenge. Eine *einfache Lotterie* ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über A. Sei $p = (p_1, \ldots, p_n)$, so dass $\sum_{1 \leq i \leq n} p_i = 1$, dann schreiben wir $[p_1 \colon a_1, \ldots, p_n \colon a_n]$ für die Lotterie, die Wahrscheinlichkeit p_i an Ergebnis a_i zuweist. Ergebnisse mit Wahrscheinlichkeit 0 werden in dieser Schreibweise manchmal ausgelassen. Sei $a \in A$, dann schreiben wir $[a]$ für diejenige Lotterie, die dem Ergebnis a Wahrscheinlichkeit 1 zuweist. Eine *zusammengesetzte Lotterie* ist eine Lotterie über Lotterien. Zwei Lotterien heißen äquivalent, falls sie der gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ergebnissen entsprechen. Wir setzen voraus, dass Agenten indifferent gegenüber äquivalenten Lotterien sind.

Aufgabe 3 (*St. Petersburg Paradoxon*)

Betrachten Sie das folgende Glücksspiel für $k \geq 1$. Nachdem man einen Einsatz e gezahlt hat, wird eine faire Münze k Mal geworfen. Falls sich nach dem n-ten Wurf ($n \leq k$) zum ersten Mal Kopf ergibt bekommt man €2^n. Hat sich nach k Würfen noch kein einziges Mal Kopf ergeben, erhält man keinen Gewinn.

(a) Zeigen Sie, dass der monetäre Erwartungswert dieses Glücksspiels gleich €$k - e$ ist. (**T**)

(b) Führen Sie Argumente dafür an, dass sich das St. Petersburg Paradoxon umgehen lässt, indem man zwischen Präferenzen über erwarteten Geldbeträgen und Präferenzen über Lotterien unterscheidet. (**H**)

Aufgabe 4 (*Präferenzen über Lotterien*)

Sei die Ergebnismenge durch Geldbeträge zwischen €0 und €9000 gegeben. Seien die Präferenzen eines Agenten von einer Nutzenfunktion u gegeben, so dass für jeden Betrag €$0 \leq x \leq$ €9000 gilt:

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < €1000, \\ 1 & \text{falls } €1000 \leq x \leq €2000, \\ 2 & \text{sonst, d.h. falls } x > €2000. \end{cases}$$

Momentan verfügt Agent i über €1500. Ihm wird angeboten, an einem fairen Glücksspiel teilzunehmen. Ein *faires Glücksspiel* ist definiert durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Geldbeträge mit Erwartungswert €0. Das Glücksspiel worin i €150 mit 40% Wahrscheinlichkeit verliert und €100 mit 60% Wahrscheinlichkeit gewinnt ist fair.

(a) Zeigen Sie, dass eine Teilnahme an folgendem Glücksspiel den erwarteten Nutzen des Agenten nicht verändert: Mit Wahrscheinlichkeit 60% gewinnt der Agent €100, mit Wahrscheinlichkeit 40% verliert der Agent €150. (**T**)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die Behauptung, dass die Teilnahme an einem beliebigen fairen Glücksspiel den Nutzen des Agenten nicht erhöhen kann. (**H**)

Definition 1 *(Axiome für Präferenzen über Lotterien)* Sei $\succsim$ eine Präferenzrelation über Lotterien $\mathscr{L}(A)$ über einer Ergebnismenge A.

(I) $\succsim$ erfüllt das *Unabhängigkeitsaxiom* falls für alle $\ell, \ell', \ell'' \in \mathscr{L}(A)$ und jedes $p \in (0,1)$:

$$\ell \succsim \ell' \text{ genau dann wenn } [p\colon \ell, (1-p)\colon \ell''] \succsim [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell''].$$

(C) $\succsim$ erfüllt das *Kontinuitätsaxiom* falls für alle $\ell, \ell', \ell'' \in \mathscr{L}(A)$:

$$\text{falls } \ell \succ \ell' \succ \ell'', \text{ dann gibt es ein } p \in (0,1), \text{ so dass } \ell' \sim [p\colon \ell, (1-p)\colon \ell''].$$

Beobachten Sie, dass, wenn die Präferenzen über Lotterien das Unabhängigkeitsaxiom erfüllen, für alle $p \in (0,1)$ und alle Lotterien $\ell, \ell', \ell'', \ell''' \in \mathscr{L}(A)$ gilt:

(a) $\ell \succ \ell'$ genau dann wenn $[p\colon \ell, (1-p)\colon \ell''] \succ [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell'']$.

(b) $\ell \sim \ell'$ genau dann wenn $[p\colon \ell, (1-p)\colon \ell''] \sim [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell'']$.

Aufgabe 5 (*"Worst-case behavior"*)

Sei $\succsim$ eine Präferenzrelation über einer Ergebnismenge A. Wir erweitern $\succsim$ zu einer Präferenzrelation $\succsim_{wc}$ über Lotterien $\mathscr{L}(A)$ über A in einer Art und Weise, die einem 'worst-case behavior' von Lotterien entspricht. Das heißt, Lotterie L wird genau dann gegenüber Lotterie L' bevorzugt, wenn das schlechteste Ergebnis, das unter L eine positive Wahrscheinlichkeit erhält, gegenüber dem schlechtesten Ergebnis, das unter L' eine positive Wahrscheinlichkeit erhält bevorzugt wird. Formal definieren wir für Lotterien L und L':

$$L \succsim_{wc} L' \text{ genau dann wenn } \min\{a \mid L(a) > 0\} \succsim \min\{a \mid L'(a) > 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\succsim_{wc}$ das Kontinuitätsaxiom verletzt. (**H**)

(b) Zeigen Sie, dass $\succsim_{wc}$ das Unabhängigkeitssaxiom verletzt. (**T**)

Es gibt viele verschiede Möglichkeiten, Präferenzen über Lotterien zu definieren. Manchmal können diese Präferenzen durch eine Nutzenfunktion repräsentiert werden, manchmal aber auch nicht. Eine besondere Art von Nutzenfunktionen über Lotterien sind Nutzenfunktionen in der sogenannten Erwartungswertform. Wir zeigen, dass eine Präferenzrelation $\succsim$ über Lotterien genau dann durch eine Nutzenfunktion in der Erwartungswertform repräsentiert werden kann, wenn sie das Unabhängigkeitsaxiom und das Kontinuitätsaxiom erfüllt.

Definition 2 *(Erwartungswertform von Nutzenfunktionen)* Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine endliche Ergebnismenge. Eine Nutzenfunktion $U : \mathscr{L}(A) \to \mathbb{R}$ hat die *Erwartungswertform*, falls es eine Nutzenfunktion $u : A \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Lotterie $L = [p_1 : a_1, \ldots, p_n : a_n]$:

$$U(L) = p_1(u(a_1)) + \cdots + p_n(u(a_n)).$$

Aufgabe 6 (*Diskussion Erwartungswertform*)

Kommentieren Sie die Behauptung, dass wegen des St. Petersburg Paradoxons Präferenzen über Lotterien, die von einer Nutzenfunktion in Erwartungswertform repräsentiert werden können, praktisch nutzlos sind. (**T**)

Aufgabe 7 (*Nutzen der Erwartungswertform*)

Sei $U\colon \mathscr{L}(A) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion über Lotterien. Zeigen Sie, dass U *genau dann* die Erwartungswertform hat *wenn* für alle (zusammengesetzten) Lotterien $[p_1 : \ell_1, \dots, p_k\colon \ell_k]$ in $\mathscr{L}(A)$:

$$U([p_1 : \ell_1, \dots, p_k\colon \ell_k]) \;=\; p_1 U(\ell_1) + \cdots + p_k U(\ell_k). \quad (\mathbf{T})$$

Aufgabe 8 (*Unabhängigkeitsaxiom*)

Sei A eine Ergebnismenge und $\succsim$ eine Präferenzrelation über Lotterien über A, die das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt.

(a) Seien ℓ und ℓ' Lotterien, so dass $\ell \succsim \ell'$. Welche der folgenden Aussagen folgen aus dem Unabhängigkeitsaxiom? (**H**)

i) $[p\colon \ell, (1-p)\colon \ell] \succsim [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell]$,

ii) $[p\colon \ell, (1-p)\colon \ell'] \succsim [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell']$,

iii) $[p\colon \ell', (1-p)\colon \ell] \succsim [p\colon \ell, (1-p)\colon \ell']$,

iv) $[p\colon \ell', (1-p)\colon \ell] \succsim [p\colon \ell', (1-p)\colon \ell']$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle Lotterien ℓ, ℓ' und alle $p \in (0,1)$ gilt:

$$\text{Wenn } \ell \succ \ell', \text{ dann } \ell \succ [p\colon \ell, (1-p)\colon \ell'] \succ \ell'. \ (\mathbf{H})$$

Aufgabe 9 (*Beste und schlechteste Lotterien*)

Sei A eine *endliche* Ergebnismenge und $\succsim$ eine rationale Präferenzrelation über Lotterien über A, die das Unabhängigkeitsaxiom und Kontinuitätsaxiom erfüllt.

(a) Beweisen Sie, dass es eine am meisten bevorzugte Lotterie $\overline{\ell}$ gibt, sowie eine am wenigsten bevorzugte Lotterie $\underline{\ell}$. (*Hinweis*: Induktion über die Größe des support der Lotterie) (**H**)

(b) Seien $p, q \in [0,1]$ und $\ell, \ell' \in \mathscr{L}(A)$. Beweisen Sie, dass $\ell \succ \ell'$ impliziert, dass:

$$[p\colon \ell, (1-p)\colon \ell'] \succ [q\colon \ell, (1-q)\colon \ell'] \text{ genau dann wenn } p > q. \quad (\mathbf{T})$$

(c) Sei $\overline{L} \succ \underline{L}$. Beweisen Sie, dass es für alle Lotterien ℓ ein *eindeutiges* $p_\ell \in [0,1]$ gibt, so dass:

$$L \sim [p_\ell\colon \overline{\ell}, (1-p_\ell)\colon \underline{\ell}]. \quad (\mathbf{T})$$

Aufgabe 10 (*von Neumann-Morgenstern, 1947*)

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Ergebnismenge und $\succsim$ eine rationale Präferenzrelation über Lotterien $\mathscr{L}(A)$ über A, die das Kontinuitätsaxiom und das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt.

(a) Beweisen Sie, dass $\succsim$ durch eine Nutzenfunktion $U\colon \mathscr{L}(A) \to \mathbb{R}$ in der Erwartungswertform repräsentiert werden kann. Das heißt, es gibt eine Nutzenfunktion $u\colon A \to \mathbb{R}$, so dass für alle Lotterien $L = [p_1 : a_1, \dots, p_n : a_n]$ und $L' = [p'_1 : a_1, \dots, p'_n : a_n]$ in $\mathscr{L}(A)$:

$$L \succsim L' \text{ genau dann wenn } p_1(u(a_1)) + \cdots + p_n(u(a_n)) \geq p'_1(u(a_1)) + \cdots + p'_n(u(a_n)). \quad \textbf{(T)}$$

(b) Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen invariant unter jeder streng monoton steigenden Transformation sind. (**H**)

Aufgabe 11 (*Affine Transformationen*)

(a) Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Ergebnismenge und $\succsim$ eine von Neumann-Morgenstern Präferenzrelation über Lotterien $\mathscr{L}(A)$ über A. Sei $U\colon \mathscr{L}(A) \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion die $\succsim$ repräsentiert. Beweisen Sie, dass jede Nutzenfunktion $U\colon \mathscr{L}(A) \to \mathbb{R}$ die Präferenzen $\succsim$ repräsentiert genau dann wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ gibt, so dass $U'(L) = \alpha U(L) + \beta$, für alle $L \in \mathscr{L}(A)$. Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktionen unter *positiven affinen Transformationen* geschlossen sind. (**T**)

(b) Welche der folgenden Nutzenfunktionen v, w und x repräsentieren die gleichen *von Neumann-Morgenstern* Präferenzen über Lotterien über der Ergebnismenge $\{a, b, c\}$ wie u? (**H**)

$$\begin{array}{lll} u(a) = 0 & u(b) = 3 & u(c) = 9 \\ v(a) = 0 & v(b) = 9 & v(c) = 81 \\ w(a) = 2 & w(b) = 3 & w(c) = 5 \\ x(a) = 2 & x(b) = 4 & x(c) = 12 \end{array}$$