Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 - SS2009
2. Klausur, 22.6.2009

1. **System von Differentialgleichungen / Differentialgleichung 2. Ordnung**

   Betrachten Sie folgendes System von Differentialgleichungen auf $x \in \mathbb{R}$ mit $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$)

   $$\begin{aligned} y_1'(x) &= \mathrm{i}\, y_2(x) \\ y_2'(x) &= \mathrm{i}\, y_1(x) \end{aligned}$$

   (a) (2 P.) Lösen Sie das System durch gegenseitiges Einsetzen der Gleichungen und damit Zurückführen auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung unter den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$.

   (b) (1 P.) Formulieren Sie das Problem in Matrix-Schreibweise um, d.h. bestimmen Sie $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $y' = Ay$, wobei

   $$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   (c) (2 P.) Lösen Sie das Problem erneut durch explizites Aufsummieren der Exponentialreihe für $\exp(Ax)$ und notieren Sie die allgemeine Lösung y mit Anfangsbedingung

   $$y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2. **Fourierreihe / Parsevalsche Gleichung**

   Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f(x) = x(2\pi - x)$ auf $x \in [0, 2\pi]$.

   (a) (1 P.) Fertigen Sie eine Skizze dieser Funktion über mindestens drei Perioden an.

   (b) (3 P.) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

   $$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   (c) (1 P.) Die Parsevalsche Gleichung lautet

   $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

   Nutzen Sie diese Identität, um den Wert der konvergenten Reihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

   zu berechnen.

3. **Fouriertransformation**

   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben als

   $$f(t) = \begin{cases} \cos(\Omega t) & \text{für } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) (3 P.) Berechnen Sie die Fouriertransformierte

   $$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

   (b) (2 P.) Das Ergebnis kann in zwei identische Funktionen $\tilde{f}(\omega) = g(\omega - \Omega) + g(\omega + \Omega)$ zerlegt werden. Bei welchen Frequenzen ω findet man so für großes $T \gg 0$ die globalen Maxima von $\tilde{f}$ (ohne Rechnung)? Bestimme den Abstand zwischen den zwei betragsmäßig kleinsten Nullstellen von g. Wie hängt dieser mit dem Beobachtungszeitraum T zusammen?