Lehrstuhl für Logik und Verfikation
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Eexam
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:
- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Einführung in die theoretische Informatik

Klausur: IN0011 / Endterm **Datum:** Freitag, 9. August 2019
Prüfer: Prof. Tobias Nipkow, PhD **Uhrzeit:** 16:00 – 19:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								
II								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **20 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Auch Textaufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von ___________ bis ___________ / Vorzeitige Abgabe um ___________

Aufgabe 1 **Quiz 1: Reguläre Sprachen, kontextfreie Sprachen, Sprachen allgemein (9 Punkte)**

0
1
2
3
4
5
6
7
8

a)* Beantworten Sie die folgenden Ja/Nein-Fragen. Begründen Sie jeweils *kurz*. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet. Falls eine Aussage nicht gilt, geben Sie (soweit angebracht) entsprechende Gegenbeispiele an. Antworten wie „Ja, siehe Vorlesung" sind ohne weiteren Kontext *nicht* ausreichend.

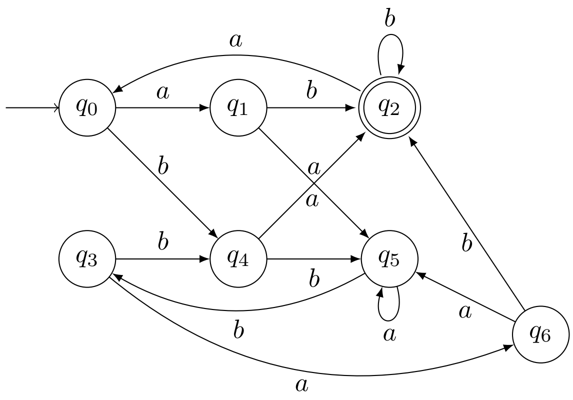
1. Falls $|A| = |A^*|$ ist, ist entweder $|A| = \infty$ oder $A = \{\varepsilon\}$.
2. Sei $w \in \Sigma^*$ und $A \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann ist $B = \{u \mid u \in A \land u \text{ ist Präfix von } w\}$ regulär. (Dabei ist u ein Präfix von w gdw. es ein v gibt mit $w = uv$.)
3. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $a \in \Sigma$. Dann ist die Sprache aller Wörter aus A, die das Zeichen a nicht enthalten, ebenfalls regulär.
4. Die Äquivalenz zweier regulärer Ausdrücke ist entscheidbar.
5. Sei M ein minimaler DFA, in dem jeder Zustand ein Endzustand ist. Dann hat M genau einen Zustand.
6. Zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ mit den gleichen Myhill–Nerode-Klassen sind immer gleich.
7. Sei CFL die Menge der kontextfreien Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Dann ist $\mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{P}$.
8. Wir nennen eine Produktion *linear*, falls sie die Form $A \to a$, $A \to aB$, oder $A \to Ba$ hat für irgendwelche Nichtterminale A, B und/oder irgendein Terminal a. Wir nennen eine kontextfreie Grammatik linear falls alle ihre Produktionen linear sind. Dann erzeugt jede lineare Grammatik eine reguläre Sprache.

b)* Gegeben sei die CFG $G = (\{S, T, U\}, \{a, b, c\}, \{S \to aT, T \to Sb, U \to cc\}, S)$. Geben Sie eine geschlossene Form für $\mathsf{L}(G)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort *kurz*.

0
1

Aufgabe 2 **Myhill-Nerode Äquivalenzklassen (8 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten den folgenden DFA M:



0
1

a)* Zeigen Sie, dass $q_1 \not\equiv_M q_3$ gilt.

0
1
2
3
4
5
6

b)* Minimieren Sie den gegebenen DFA M. Geben Sie dazu die vollständige Minimierungstabelle nach Vorlesungsalgorithmus an und zeichnen Sie den resultierenden minimalen DFA.

c) Geben Sie für jeden Zustand des minimalen Automaten das lexikographisch kleinste kürzeste Wort in der entsprechenden Myhill-Nerode Äquivalenzklasse an.

0

1

Aufgabe 3 **Rekursion auf regulären Ausdrücken (7 Punkte)**

Für ein Wort w und eine Position $1 \leq i \leq |w|$ definieren wir das Wort, das man erhält, indem man das Zeichen an Position i löscht:

$$\mathrm{del}_i(w) = w_1 \dots w_{i-1} w_{i+1} \dots w_{|w|}$$

Sei nun $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Für ein Zeichen $a \in \Sigma$ definieren wir $\mathrm{Del}_a(A)$ als die Menge aller Wörter w, die man erhält, indem man ein Wort aus A nimmt und **genau ein** Vorkommen des Zeichens a daraus löscht.

Formal:

$$\mathrm{Del}_a(A) = \{\mathrm{del}_i(w) \mid w \in A, 1 \leq i \leq |w|, w_i = a\}$$

Beispiel:

$$\mathrm{del}_3(acbdc) = acdc \qquad \mathrm{Del}_a(\{aa, acab, abba\}) = \{a, cab, acb, abb, bba\} \qquad \mathrm{Del}_a(\{bc\}) = \emptyset$$

0 a)* Finden Sie für $A, B \subseteq \Sigma^*$ einen einfachen Ausdruck für $\mathrm{Del}_a(AB)$ in Abhängigkeit von A, B, $\mathrm{Del}_a(A)$ und $\mathrm{Del}_a(B)$. Beweisen Sie Ihre Behauptung. Falls bei einer Fallunterscheidung zwei Fälle komplett analog

1 sind, dürfen Sie einen davon mit einem entsprechenden Hinweis weglassen.

2

3

b)* Geben Sie eine rekursive Prozedur $f_a(r)$ an, die für einen gegebenen regulären Ausdruck r einen regulären Ausdruck zurückgibt mit $\mathsf{L}(f_a(r)) = \mathrm{Del}_a(\mathsf{L}(r))$.

0
1
2

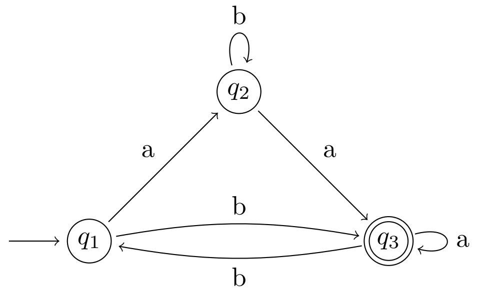
0
1
2

c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion durch strukturelle Induktion über r. Sie müssen dabei *nur* die Fälle $r = a$ (einzelnes Zeichen $a \in \Sigma$) und $r = r_1 r_2$ (Konkatenation) behandeln und dürfen die anderen 4 Fälle weglassen. Außerdem dürfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe a) verwenden, selbst wenn Sie es nicht beweisen konnten.

Geben Sie in beiden Fällen klar an, was jeweils zu zeigen ist und ggf. was die Induktionshypothesen sind und wo Sie sie verwenden!

Aufgabe 4 **DFA → RegEx (7 Punkte)**

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$:



a)* Berechnen Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$. Verwenden Sie dafür eines der beiden aus der Vorlesung bekannten Verfahren (Tabellarisches Verfahren oder Lösen eines Gleichungssystems mithilfe von Ardens Lemma).

0
1
2

b)* Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $L(M)$ mit **höchstens 3** Nichtterminalen an.

Aufgabe 5 **Kontextfreie Sprachen (7 Punkte)**

Wir betrachten die Sprache $\mathsf{L} = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\} \cup \{\mathsf{a}^{2n}\mathsf{b}^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$.

a)* Geben Sie einen Kellerautomaten (PDA) $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ mit einelementigem $\Gamma = \{Z_0\}$ an, der L mit leerem Keller akzeptiert. Sie dürfen dabei **höchstens 6 Zustände** verwenden. Zeichnen Sie den Automaten.

0 1 2

b)* Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit **höchstens 3 Nichtterminalen** an, die L erzeugt.

Aufgabe 6 Kontextfreie Sprachen (2) (5 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $\mathsf{L} = \{w \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \land |w|_{\mathsf{a}} \leq |w|_{\mathsf{b}}\}$ und die Grammatik $G = (\{S, X\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P:

$$S \to XS\,\mathsf{b} \mid \mathsf{b}\,SX \mid \varepsilon \qquad X \to \mathsf{a} \mid \varepsilon$$

Zeigen Sie $\mathsf{L}(G) \subseteq \mathsf{L}$.

0
1
2
3
4
5

Aufgabe 7 Seminarproblem (8 Punkte)

Wir wollen ein Seminar über m Wochen abhalten und dafür jede Woche eine(n) Vortragenden einladen. Dafür stehen uns l potenzielle Vortragende zur Verfügung. Jede(r) Vortragende ist nur in bestimmten Wochen verfügbar. Zudem deckt jede(r) Vortragende eine gewisse Menge von Themengebieten ab. Am Ende des Seminars wollen wir insgesamt eine bestimmte Menge von Themengebieten abgedeckt haben.

Wir betrachten das Entscheidungsproblem SEMINAR:

Gegeben: Eine Menge S und Listen von Mengen $L = (L_1, \dots, L_l)$ und $T = (T_1, \dots, T_l)$, wobei L_i angibt, in welchen Wochen der/die Vortragende i verfügbar ist. Die Menge T_i gibt an, welche Themengebiete der/die Vortragende i abdeckt. Die Menge S definiert die abzudeckenden Themengebiete.

Zu entscheiden: Gibt es eine Reihung von Vortragenden $v_1, \dots, v_m$, so dass $i \in L_{v_i}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $S \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq m} T_{v_i}$?

0
1

a)* Zeigen Sie, dass SEMINAR $\in$ NP.

0
1
2
3
4
5
6
7

b)* Zeigen Sie, dass SEMINAR NP-schwer ist, indem Sie eine polynomielle Reduktion von 3KNF-SAT auf SEMINAR angeben und deren Korrektheit beweisen. Führen Sie Ihre Reduktion auch explizit für die Formel $(x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3)$ durch.

Aufgabe 8 **Quiz 2: Berechenbarkeit und Komplexität (9 Punkte)**

0 1 2 3 4 5 6

a)* Beantworten Sie die folgenden Ja/Nein-Fragen. Begründen Sie jeweils *kurz*. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet. Falls eine Aussage nicht gilt, geben Sie (soweit angebracht) entsprechende Gegenbeispiele an. Antworten wie „Ja, siehe Vorlesung“ sind ohne weiteren Kontext *nicht* ausreichend.

1. Es gibt eine Turingmaschine M, deren Halteproblem $\{w \mid M[w]\downarrow\}$ entscheidbar ist.
2. Es gibt eine Turingmaschine M, deren Halteproblem $\{w \mid M[w]\downarrow\}$ unentscheidbar ist.
3. Die Menge $\{w \mid \varphi_w$ ist LOOP-berechenbar$\}$ ist unentscheidbar.
4. Die Menge $\{w \mid \varphi_w$ ist WHILE-berechenbar$\}$ ist unentscheidbar.
5. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Wenn $A \leq B$ ist und $B \leq A$, dann ist $A = B$.
6. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und f berechenbar. Dann sind alle Sprachen in $\mathrm{NTIME}(f(n))$ entscheidbar.

b)* Beantworten Sie für die folgenden „Beweise“ jeweils folgende Fragen:

0
1
2
3

- Was ist der Fehler an dem „Beweis“? (je 1 Punkt)
- Gilt die behauptete Aussage trotzdem? (je 0,5 Punkte)

Achtung: „Beweis ist falsch, weil die Aussage nicht gilt“ reicht *nicht* als Begründung. Erklären Sie, welcher Schritt in dem Beweis genau falsch ist und warum.

1. Das PCP (Post'sches Korrespondenzproblem) ist in NP, denn eine Lösung $i_1 \dots i_n$ stellt ein in polynomieller Zeit verifizierbares Zertifikat dar.
2. Wir nennen eine Turingmaschine *kreisfrei*, wenn ihr Zustandsübergangsgraph (in der aus der Vorlesung bekannten graphischen Notation für Turingmaschinen) keine Zyklen enthält. Dann ist die Menge $\{w \mid M_w \text{ kreisfrei} \wedge \varphi_w(0) = 0\}$ nach Satz von Rice unentscheidbar, da es offensichtlich sowohl Turingmaschinen gibt, die darin enthalten sind als auch welche, die nicht darin enthalten sind.

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.