Prof. T. Nipkow
K. Kappelmann, J. Rädle, L. Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Logik und Verifikation

KEINE ABGABE

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2020 – Übungsblatt 9

AUFGABE 9.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- semi-entscheidbar
- rekursiv-aufzählbar
- Satz von Rice(-Shapiro)
- Triviale Teilmenge

AUFGABE 9.2. (*Reductio ad absurdum*) Stufe B

Sei $A \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion: Definiere $f : H_0 \to A$ mit $f(w) \coloneqq \mathsf{aaa}$.

(b) Behauptung: $\mathsf{H}_0 \leq A$
Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} \mathsf{aaa} & \text{falls } w \in \mathsf{H}_0 \\ \mathsf{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Behauptung: $A \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x ab, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine “Ja” (1) oder “Nein” (0) aus.

(d) Behauptung: $\overline{\mathsf{H}_0} \leq \mathsf{H}_0$
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ simuliert. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ hält, geht $\mathsf{M}_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathsf{M}_w[\varepsilon]$ nicht hält, hält $\mathsf{M}_{f(w)}$.

(e) Behauptung: $H_{\Sigma^*} \leq \mathsf{H}_0$ mit $H_{\Sigma^*} \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \mathsf{M}_w[x]\downarrow\}$.
Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $\mathsf{M}_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht, dann nichtdeterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $\mathsf{M}_w[x]$ simuliert.

AUFGABE 9.3. (*Vier Fäuste gegen Rice*) Stufe C

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $\mathsf{L}_1 = \big\{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\big\}$ ist regulär$\}$

(b) $\mathsf{L}_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \varphi_w(n) = n * (n - 23) + 42\}$

(c) $\mathsf{L}_3 \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $\mathsf{L}_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \land p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$, wobei $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w bezeichnet.

AUFGABE 9.4. (*Sie nannten ihn Rice*) Stufe C

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Betrachten Sie die folgende Menge:

$$A \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ \varphi_w(x) \neq |x|\},$$

Zeigen Sie:

(a) A ist nicht semi-entscheidbar durch geeignete Reduktion eines nicht semi-entscheidbaren Problemes.

(b) A ist nicht semi-entscheidbar mit dem Satz von Rice-Shapiro.

AUFGABE 9.5. (*Kurzer Prozess*) Stufe B/C

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Beweisskizze oder geben Sie ein passendes Gegenbeispiel an.

(a) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für alle $A \subseteq \Sigma^*$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Sigma^*$ gilt $A \leq \overline{A}$.

(b) Das Problem, ob $\mathsf{L}(\mathsf{M}) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

(c) Das Problem, ob $\mathsf{L}(\mathsf{M}) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.