Sommersemester 2003
Prof. Fredi Tröltzsch
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

10. Übungsblatt – Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabe 1: Explizite und implizite Verfahren (1+2+2+1+1 Punkte)
Wozu sind implizite Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen gut? Betrachte das Beispiel

$$y' = \lambda y, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Berechne die exakte Lösung des Anfangswertproblems und beschreibe das asymptotische Lösungsverhalten für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Berechne die Näherung, die sich bei Anwendung des *expliziten* Eulerverfahrens mit konstanter Schrittweite h ergibt. Für welche Werte von h stimmt das asymptotische Verhalten der Näherungslösung zumindest qualitativ mit dem der exakten Lösung überein?

(c) Löse Teil (b) für das *implizite* Eulerverfahren:

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Für welche Werte von h stimmt jetzt das asymptotische Verhalten der Näherungslösung zumindest qualitativ mit dem der exakten Lösung überein?

Betrachte nun das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y, \quad t > 0, \quad y(0) = \alpha \tag{1}$$

für $y = (y_1, y_2)^T, \alpha \in \mathbb{R}^2$. Es sei $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \ll 0$.

(d) Berechne die exakte Lösung. Welcher Teil der Lösung ist für $t \to \infty$ dominant?

(e) Welcher Teil der Lösung bestimmt bei der Anwendung des expliziten Eulerverfahrens die Wahl der Schrittweite, wenn die Näherungslösung sich qualitativ wie die exakte Lösung verhalten soll?

Aufgabe 2: LR-Zerlegung (3+1 Punkte)

(a) Berechne die LR-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschungen) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Gib die Matrizen L und R explizit an.

(b) Löse mit Hilfe der LR-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2, 8, 10)^T$.

Aufgabe 3: Determinante und Kondition (1+3+1 Punkte)
Bei Anwendungen hat man es oft mit sehr großen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also mit großen Werten von n zutun.

(a) Berechne Determinante und Kondition (bzgl. einer beliebigen Norm) der Matrix $D = diag(0.1, \ldots, 0.1) \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$, d.h. eine Diagonalmatrix mit 0.1 auf der Diagonalen, sonst Nullen.

(b) Berechne Determinante und Kondition (bzgl. einer beliebigen Norm) der $(n \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Hinweis: Es gilt } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^0 & 2^1 & \ldots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 2^0 & \ldots & 2^{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2^0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie verhalten sich Determinante und Kondition für sehr große Werte von n, also für $n \to \infty$?

(c) Eine Matrix A mit $\det A = 0$ ist singulär. Ist eine Matrix mit sehr kleiner positiver Determinante also schlecht konditioniert? Kann man von dem Wert der Determinante auf die Kondition schließen?

Programmieraufgabe: (2+3+1+3+1+2 Punkte)
MATLAB hat mehrere eingebaute Löser für gewöhnliche Differentialgleichungen (Ordinary differential equations - ODEs), nämlich

`ode23` – eingebettetes explizites Runge-Kutta 2./3. Ordnung
`ode45` – eingebettetes explizites Runge-Kutta 4./5. Ordnung
`ode15s` – implizites Verfahren mit variabler Ordnung.

Alle Verfahren haben eine Schrittweitensteuerung wie in der VL beschrieben. Die Syntax ist

$$[\mathtt{t}, \mathtt{y}] = \mathtt{ode23}(@\mathtt{F}, \mathtt{tspan}, \mathtt{y0}, \mathtt{options})$$

und analog für die anderen Verfahren. Dabei ist `tspan` ein Zeilenvektor mit Anfangs- und Endzeit.
Man kann zusätzliche Optionen wie die relative Genauigkeit **vorher** mit

$$\mathtt{options} = \mathtt{odeset}('\mathtt{RelTol}', \mathtt{1e-4})$$

setzen, vgl. `help ode23` usw.

(a) Löse das AWP (1) für zwei fest gewählte Werte $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \ll 0$ mit dem expliziten Euler-Verfahren. Was passiert, wenn die Schrittweite nicht entsprechend dem Ergebnis von Aufgabe 1(b) gewählt wird?

(b) Löse das AWP (1), aber diesmal mit einem der MATLAB–Löser. Welcher ist am besten geeignet?

(c) Wieviele Schritte braucht der MATLAB–Löser, wieviele das explizite Euler-Verfahren?

(d) Löse die Programmieraufgabe vom 2.Übungsblatt mit einem der MATLAB–Löser. Setze die relative Genauigkeit so, dass die periodische Lösung wiederum gut gefunden wird.

(e) Vergleiche bei dem gewählten Verfahren und beim Eulerverfahren die Anzahl der benötigten Zeitschritte.

(f) Kommentiere das Ergebnis dieser Aufgabe: Was bewirken Schrittweitensteuerung und/oder ein implizetes Verfahren?

Abgabe/Vorführen in der Woche vom 30.6.–4.7.03