Technische Universität Berlin SoSe 2012
Institut für Mathematik http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS12/LinAlg1/
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. S. Jokar Stand: 11. Mai 2012

Lineare Algebra I
5. Hausaufgabe

Abgabe: 21.05.12 bis 25.05.12

---

1. Aufgabe (5 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien $A_{11} \in R^{n_1,n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1,n_2}$, $A_{21} \in R^{n_2,n_1}$ und $A_{22} \in R^{n_2,n_2}$. Weiter sei

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in R^{n_1+n_2,n_1+n_2}.$$

(i) Sei $A_{11} \in \mathrm{GL}_{n_1}(R)$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ invertierbar ist.
Finden Sie eine Formel für A^{-1}, falls A invertierbar ist.

(ii) Sei $A_{22} \in \mathrm{GL}_{n_2}(R)$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ invertierbar ist.
Finden Sie eine Formel für A^{-1}, falls A invertierbar ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -6i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

(i) Berechnen Sie die Treppennormalform von A und geben Sie in jedem Schritt die verwendeten Elementarmatrizen an.

(ii) Untersuchen Sie, ob A invertierbar ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls A^{-1} und überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Berechnung von $A^{-1}A$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K^{2,2}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie ohne die Produkte $A^{-1}A$ oder AA^{-1} zu benutzen, dass A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

4. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie die Treppennormalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{F}_2)^{3,4},$$

unter Angabe der verwendeten Elementarmatrizen (man beachte, dass $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$). Bestimmen Sie die Pivotpositionen von A.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Menge

$$G := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \,\middle|\, \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \right\}$$

mit der Matrixmultiplikation eine kommutative Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist. Wenn nicht, welche Eigenschaften sind noch erfüllt?

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen ohne Beweis verwenden.

Gesamtpunktzahl: 20