Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Blath
Dr. Marcel Ortgiese

Sommersemester 2012
Ausgabe: 16. Mai 2012
Abgabe: 23. Mai 2012

Maß- und Integrationstheorie: Übung 5

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein messbarer Raum, so dass alle einelementigen Mengen $\{x\} \in \mathcal{A}$. Ein Punkt heißt Atom, wenn $\mu(\{x\}) > 0$. Ein Maß heißt stetig wenn es keine Atome hat.

(i) Zeigen Sie, dass das eindimensionale Lebesgue stetig ist und geben Sie ein Beispiel an für ein nicht stetiges Maß.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ zerlegt werden kann in $\mu + \nu$, wobei μ stetig und ν atomar ist (d.h. man kann ν als $\nu = \sum_i \varepsilon_i \delta_{x_i}$ schreiben). *[Hinweis: Wie viele Punkte y kann es geben mit $\mu(\{y\}) \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$.]*

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

(a) Es seien μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und F_μ die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: F_μ ist genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ gilt.

(b) Welchem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ entspricht die Verteilungsfunktion $F_\mu \colon \mathbb{R} \to [0,1], F_\mu(x) : 0 \vee (x \wedge 1)$? Berechnen Sie dazu $\mu((a,b))$ für beliebige $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

(a) Seien f und g zwei messbare reelle Funktionen auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ messbare reelle Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

(b) Es sei $f_n, n = 1, 2, \ldots$ eine Folge messbarer reeller Funktionen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbare Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

(c) Es sei $f_n, n = 1, 2, \ldots$ eine Folge messbarer reeller Funktionen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie:

$$\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert } \} \in \mathfrak{A}.$$

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie, dass f $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass f $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist.