Technische Universität Berlin | **Sommersemester 2008**
Institut für Mathematik | 18. Juli 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Klausur zur Linearen Algebra II

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Studiengang: ______________________

Für die Klausur sind **keine** Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen zum Definitions- und Aufgabenteil sind lesbar (!) auf separaten Blättern zu erstellen. Es gibt insgesamt 34 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 17 Punkte erreicht wurden. Zur Nachklausur ist zugelassen, wer insgesamt mindestens 7 Punkte erreicht.

Einverständniserklärung: Hiermit willige ich ein, dass mein Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	5	6	7	8	$\sum$
Punkte										

Definitionen

Geben Sie jeweils die vollständige Definition an. Dabei müssen alle Voraussetzungen formuliert werden; geben Sie z.B. zu jeder Variablen die Menge an, aus der sie stammt.

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus.

b) Minimalpolynom eines Endomorphismus.

c) Fomulieren Sie den Satz von Cayley & Hamilton.

Aufgabe 2 (1+1 Punkte)
Definieren Sie:

a) Orthogonaler Endomorphismus.

b) Selbstadjungierter Endomorphismus.

Aussagen

Für jedes richtige Kreuz erhalten Sie einen Pluspunkt, für jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Sind zwei Aussagen äquivalent und Sie kreuzen nur die eine der beiden Implikationen an, so erhalten Sie einen halben Punkt. Es können jedoch keine negativen Gesamtpunktzahlen pro Aufgabe entstehen! **Pro Zeile wird maximal ein Kreuz erwartet.**

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n < \infty$ und $F \in \mathrm{End}(V)$. Seien M_F das Minimalpolynom und P_F das charakteristische Polynom von F. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$	
(a) $\lambda = 0$ ist Eigenwert von F	○	○	○	F ist nilpotent
(b) F ist diagonalisierbar	○	○	○	F^2 ist diagonalisierbar
(c) M_F zerfällt in Linearfaktoren	○	○	○	P_F zerfällt in Linearfaktoren
(d) $M_F = P_F$	○	○	○	Die Jordannormalform von F hat genau ein Jordankästchen je Eigenwert

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien A, B quadratische Matrizen über einem Körper K. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Ist 0 eine Nullstelle von P_A, dann ist 0 auch Nullstelle von P_{AB}.	○	○
(b) Sind $A, B \in O(3)$ und gilt $AB = BA$, so muss $A = B$ sein.	○	○
(c) Für $A \in O(n)$ und $B \in SO(n)$ ist $AB \in O(n)$.	○	○
(d) Ist A orthogonale Matrix und gilt $A^2 = A$, dann ist A die Einheitsmatrix.	○	○

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Kreuzen Sie an:

	wahr	falsch
(e) Sind $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V und ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$, so ist $\langle .,. \rangle_1 = \langle .,. \rangle_2$.	○	○
(f) Sind $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V. Ist $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis bzgl. $\langle .,. \rangle_1$, dann ist $\mathcal{B}$ auch Orthonormalbasis bzgl. $\langle .,. \rangle_2$.	○	○

Aufgaben

Die Rechnungen und Beweise sind (wie üblich) auszuformulieren. Alles ist zu begründen und alle benutzten Symbole sind zu erklären.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
$F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2z \\ 0 \\ 4z-2x \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume von F.

b) Ist F diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine darstellende Matrix D in Diagonalgestalt und eine dazugehörige Transformationsmatrix S mit $D = S \cdot M(F) \cdot S^{-1}$ an. (Wir empfehlen eine Probe!) Wenn nein, warum nicht?

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Hier muss nicht allzu viel gerechnet werden!)

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ eine orthonormale Menge von Vektoren aus V.

Zeigen Sie: Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonaler Endomorphismen stehen senkrecht aufeinander.

b) Sei $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. F habe bezüglich der kanonischen Basis die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass F eine Geradenspiegelung ist.