# Kompaktseminar Analysis

3. bis 7. März 2008

Es wird vormittags und nachmittags jeweils eine Arbeitseinheit von drei Stunden geben. In den ersten anderthalb Stunden sollen Sie in Gruppen (2-4 Leute) jeweils ein Thema vorbereiten und darüber dann ein halbstündiges Referat geben.
Dozent und Mitarbeiter stehen für Hilfestellung bereit.

**Übersicht:**

| | Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag |
|---|---|---|---|---|---|
| V | Topologie | Differentiation | Diff.gleichungen | Lebesgueintegral II | Stokes |
| N | Reihen | Mannigfaltigk. | Lebesgueintegral I | Differentialformen | |

Die Themen auf den folgenden Seiten sind Vorschläge. Bei Bedarf können wir davon auch abweichen.

# 1 Montag vormittag: Topologie

## 1.1 Topologie metrischer Räume

- Definitionen: offene & abgeschlossene Mengen, Rand, Inneres, abgeschlossene Hülle, Hausdorff-Eigenschaft, Beispiele, Zusammenhänge, Beweise.

**Z** Induzierte Metrik, welche Eigenschaften bleiben erhalten? Topologische Räume.

## 1.2 Konvergenz, Kompaktheit

- Konvergenz, Häufungspunkt, Vollständigkeit, Schachtelungsprinzip, Banachscher Fixpunktsatz (Wurzelfolge Ana 1)
- Kompaktheit, Heine-Borel, Bolzano-Weierstraß

**Z** Kompaktheit und Vollständigkeit. Topologische Räume.

## 1.3 Stetige Abbildungen, Kompaktheit, Zusammenhang

- Verschiedene Definitionen der Stetigkeit
- Kompaktheit, Zusammenhang, Wichtige Sätze

**Z** Gleichmäßige Stetigkeit, Vervollständigung metrischer Räume

# 2 Montag nachmittag: Reihen

## 2.1 Konvergenz von Reihen

- Konvergenzkriterien, Beispiele
- Absolute und bedingte Konvergenz

**Z** Differentiation und Integration von Funktionenreihen

## 2.2 Potenzreihen

- Konvergenzverhalten
- Abelscher Grenzwertsatz, Beispiele
- Gliedweise Differentiation, Taylorreihe

## 2.3 Klassische Fourierreihen

- Fourierkoeffizienten, Orthogonalitätsrelationen
- Dirichlet-Bedingungen, Beispiele

**Z** Sätz von Fejér und Weierstraß, Basiseigenschaft (Vollständigkeit)

# 3 Dienstag vormittag: Differentiation

## 3.1 Differenzierbarkeit

- Definition, partielle Differenzierbarkeit, Beispiele, Ana 1
- Höhere Ableitungen, Darstellung höherer Ableituungen, Satz von Schwarz
- Richtungsableitungen, Produktregel, Beispiele

**Z** Lemma von Sard

## 3.2 Taylor und Extrema

- Satz von Taylor (Ana 1 vs. Ana 2)
- Lokale und globale Extrema

**Z** Konvexität, Hauptminorenkriterium

## 3.3 Kettenregel, Umkehrsatz

- Kettenregel, Beweis
- Umkehrsatz, Ana 1

**Z** "Umkehrsatz" der linearen Algebra

# 4 Dienstag nachmittag: Mannigfaltigkeiten

## 4.1 Implizite Funktionen

- Formulierung, Beweisidee
- Geometrische Veranschaulichung

**Z** Rangsatz

## 4.2 Untermannigfaltigkeiten

- Definition, Beispiele
- Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten
- Tangentialraum

**Z** Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten.

## 4.3 Extrema mit Nebenbedingungen

- Satz über Extrema mit Nebenbedingungen
- Lagrangemultiplikatoren
- Beispiele

# 5 Mittwoch vormittag: Differentialgleichungen

## 5.1 Existenz und Eindeutigkeit

- Picard-Lindelöf, Beweis
- Beispiele

**Z** Separierbare DGL

## 5.2 Lineare DGL-Systeme

- Existenz und Eindeutigkeit
- Struktur des Lösungsraumes, Wronskitest
- Lösunsmethoden

**Z** Matrix-Exponential-Lösung, Jordansche Normalform

## 5.3 Skalare lineare DGL

- Homogene LDGL mit konstanten Koeffizienten
- Doppelte und komplexe Nullstellen

# 6 Mittwoch nachmittag: Lebesgueintegral I

## 6.1 Definitionen

- Definition, Nullmengen, messbare Mengen
- Integrierbarkeitskriterien

**Z** Relation zu Regel- und Riemannintegral

## 6.2 Konvergenzsätze

- Beppo Levi, $\mathcal{L}^1_+$, Anwendungen
- Lebesgue, Anwendungen

## 6.3 Fubini

- Satz von Fubini, Beispiele
- Volumina unter Graphen
- Satz von Tonelli

# 7 Donnerstag vormittag: Lebesgueintegral II

## 7.1 Transformationssatz

- Satz und Beweis, Substitutionsregel aus Ana 1
- Beispiele

## 7.2 $L^p$-Räume

- Definition der $L^p$-Räume, Ungleichungen von Hölder und Minkowski
- Verschiedene Konvergenzbegriffe für Funktionen
- Satz von Fischer-Riesz

## 7.3 Abstrakte Fourierreihen

- Hilberträume und ON-Systeme
- Bessel und Parseval
- $L^2$-Fourierreihen reell und komplex

# 8 Donnerstag nachmittag: Differentialformen

## 8.1 Multilineare Algebra

- Alternierende Formen, Beispiele
- Dachprodukt
- Basisdarstellung

## 8.2 Differentialformen

- Definition, Beispiele
- Cartansche Ableitung

**Z** Vektoranalysis mittels Differentialformen

## 8.3 Potentiale

- Notwendige und hinreichend Bedingungen
- Lemma von Poincaré
- Beispiele, Berechnung von Potentialen

**Z** De Rhamsche Kohomologie

# 9 Freitag vormittag: Satz von Stokes

## 9.1 Integration von Differentialformen

- Integraldefinition
- Volumen von Abbildungen
- Umlaufzahl, Flußintegral

## 9.2 Stokes

- Ketten und Randoperator
- Satz von Stokes und Beweis

## 9.3 Anwendungen

- Brouwerscher Fixpunktsatz
- Integralsatz von Cauchy

**Z** Integralformel von Cauchy