Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**

Fakultät II – Institut f. Mathematik

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: Mi 11.01.2011

Assistent: M. Wilke Berenguer Abgabe: Mi 18.01.2011

11. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“

Ergodensatz und schwache Konvergenz

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $T\colon \Omega \to \Omega$ $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$-messbar. Weiterhin sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass T $\mathbb{P}$-maßerhaltend ist.

a) Zeige: $\mathcal{M}$ ist konvex, das heißt, für alle $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda\mathbb{P} + (1-\lambda)\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.

b) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ heiße T-*ergodisch*, wenn T auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ergodisch ist. Zeige: $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ ist genau dann T-ergodisch, wenn es ein Extremalpunkt von $\mathcal{M}$ ist. (Ein Punkt x aus einer konvexen Menge X heißt *Extremalpunkt* von X, wenn aus $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in [0,1]$ stets $\lambda \in \{0,1\}$ folgt.)

Hinweise zu b)

"$\Leftarrow$": Stelle ein nicht ergodisches Maß $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ als (echte) Konvexkombination zweier Maße $B \mapsto \mathbb{P}(B|A)$ und $B \mapsto \mathbb{P}(B|A^c)$ für eine geeignet gewählte Menge A dar.

"$\Rightarrow$": Betrachte ein ergodisches Maß $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$, welches kein Extremalpunkt von $\mathcal{M}$ ist, das heißt, es existieren $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}$, $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $\mathbb{P} = \lambda\mathbb{P}_1 + (1-\lambda)\mathbb{P}_2$. Zeige, dass dann auch $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ ergodisch sind und wende den Ergodensatz auf $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ an, um die Ergodizität von $\mathbb{P}$ zum Widerspruch zu führen.

2. Hausaufgabe: Wandernde Mengen **5 Punkte**

Sei T eine maßerhaltende Transformation eines Maßraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Eine Menge $W \subset \mathcal{F}$ heißt wandernd bezüglich T, wenn $\{T^{-n}(W) : n \in \mathbb{N}\}$ paarweise disjunkt sind. Sei $A \in \mathcal{F}$ eine Menge mit $\mu(A) > 0$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\mu(A \cap W) = 0$ für jede bezüglich T wandernde Menge W.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_B \circ T^n = \infty$ μ-f.ü. auf B für alle messbaren $B \subset A$ mit $\mu(B) > 0$.
Hinweis: Für „$\Rightarrow$“betrachten Sie die Menge $W_B := B \setminus \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)$.

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 1 und gleichmäßig stetig. Seien desweiteren X eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Man definiere damit für jedes $n \in \mathbb{N}$: $Z_n := g(X + (n-1)\alpha)$.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 g(u)\mathrm{d}u \qquad \text{f.s..}$$

Bemerkung: Betrachten Sie $T : [0,1[\to [0,1[, x \mapsto x + \alpha \text{ (mod)}1$.

4. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Es sei μ_n die vorgegebene Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Man untersuche, ob ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ existiert, so dass $\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$ gilt und gebe es (so es existiert) an:

(i) $\mu_n := b(n, \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$, wobei $b(m,p)$ die Binomialverteilung mit den Parametern m und p ist;

(ii) $\mu_n := U([-n,n])$, wobei $U(A)$ die Gleichverteilung auf A ist.