Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 7

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei I das von dem Polynom $X^2 + 1$ erzeugte Hauptideal im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ über den reellen Zahlen. Zeige, dass es einen Isomorphismus von Ringen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/I$ gibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring. Ein Ideal $I \subseteq A$ heißt *maximal*, wenn $I \neq A$ und es kein Ideal J mit $I \subsetneq J \subsetneq A$ gibt. Zeige:

(a) Ein Ideal $I \subseteq A$ ist genau dann prim, wenn A/I ein Integritätsbereich ist.
(b) Ein Ideal $I \subseteq A$ ist genau dann maximal, wenn A/I ein Körper ist.

Ergo: Jedes maximale Ideal ist prim.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Wir fragen uns, ob es Ringe A und B und eine Abbildung $\phi : A \to B$ gibt, so dass für alle $a, b \in A$ die Gleichungen $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ gelten, außerdem $\phi(0) = 0$, aber $\phi(1) \neq 1$. Finde ein solches Beispiel oder beweise, dass keines existiert.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Seien A und B kommutative Ringe. Seien $I \subseteq A$ und $J \subseteq B$ jeweils Ideale. Zeige:

(a) Das Produkt $I \times J$ ist ein Ideal von $A \times B$.
(b) Jedes Ideal von $A \times B$ ist von dieser Form.
(c) Es existiert ein Isomorphismus $A/I \times B/J \cong (A \times B)/(I \times J)$.
(d) Unter welcher Bedingung an I und J ist $I \times J$ ein Primideal von $A \times B$?

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring, welcher einen Körper $\Bbbk$ als Unterring enthält. Dann kann A als $\Bbbk$-Vektorraum aufgefasst werden. Man nennt A auch eine kommutative $\Bbbk$-*Algebra*. Wir setzen voraus, dass dieser Vektorraum endlichdimensional ist. Zeige:

(a) Jedes Element von $A \setminus \{ 0 \}$ ist entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.
(b) Punkt (a) ist im Allgemeinen falsch, wenn A nicht endlichdimensional ist.

Aufgabe 6 (8 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring mit einem nilpotenten Element $a \in A \setminus \{ 0 \}$, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$. Zeige, dass $A^\times \subsetneq A[X]^\times$, d.h. die Einheitengruppe $A^\times$ ist eine *echte* Untergruppe der Einheitengruppe $A[X]^\times$.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **11.12.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!