Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 8

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring. Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt maximal, falls für jedes Ideal J mit $I \subseteq J$ gilt, dass $J \in \{I, R\}$. Zeige, dass $I \subseteq R$ genau dann maximal ist, wenn R/I ein Körper ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring, welcher einen Körper $\mathbb{K}$ enthält. Dann kann R als $\mathbb{K}$-Vektorraum aufgefasst werden.

(1) Nimm an, dass $\dim_{\mathbb{K}} R$ endlich ist. Zeige: Jedes Element in $R \setminus \{0\}$ ist entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

(2) Gilt die Aussage aus (1) auch, wenn $\dim_{\mathbb{K}} R = \infty$?

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring, welcher ein nilpotentes Element $a \neq 0$ enthält. D.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $a^n = 0$ gilt. Zeige, dass $R^\times \subsetneq R[X]^\times$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Wie auf Zettel 7 sei wieder $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \left\{ a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Zeige:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \cong \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 2 \rangle$.

(2) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$.

Die Isomorphismen sind hier als Ringisomorphismen gemeint.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **18.12.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!