TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Pinkall / Knöppel
http://www.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS11/DGI SS 11

Differentialgeometrie I: Kurven und Flächen

Aufgabenblatt 9

(Flächeninhalt)

Abgabe: 21.6./22.6.2011

Definition: Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Das Flächeninhaltsfunktional A ist dann gegeben durch

$$\mathcal{A}(f) = \int_U \|f_x \times f_y\| \, dxdy.$$

Aufgabe 1 — 6 Punkte

a) Gegeben ist die Kurve $\gamma(t) = (r(t), h(t)) : [a, b] \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ sowie die dazugehörige Rotationsfläche

$$f(t, \alpha) := (r(t) \cos\alpha, r(t) \sin\alpha, h(t))$$

für $(t, \alpha) \in U := [a, b] \times [0, 2\pi]$. Berechne den Flächeninhalt von $f(U)$.

b) Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma'' \neq 0$. Betrachte die Röhrenfläche f vom Radius 1 um γ bzgl. des Frenet–Rahmens $\sigma = (T, N, B)$, d.h.

$$f(x, y) = \gamma(x) + \cos(y) N(x) + \sin(y) B(x).$$

Berechen den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Länge von γ unter der Annahme, dass $\kappa < 1$.

Aufgabe 2 — 6 Punkte

Zu einer Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit ihrer Normalen N erklären wir die Parallelfläche

$$f^s\colon U \to \mathbb{R}^3,\ f^s(x, y) := f(x, y) + sN(x, y)$$

für ein $s \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Ist f^s regulär, so ist N auch die Gaussabbildung von f^s.

b) Sei f nun Krümmungslinienparametrisiert, also

$$N_x = \kappa_1 f_x \text{ und } N_y = \kappa_2 f_y,$$

wobei κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen bezeichnen. Zeigen Sie

$$f_x^s \times f_y^s = \left(1 + 2Hs + Ks^2\right) f_x \times f_y,$$

wobei H die mittlere und K die Gausskrümmung von f bezeichnen.

c) Folgern Sie für den Flächeninhalt $A\left(f^s\right)$ der Parallelfläche die Entwicklung

$$\mathcal{A}\left(f^s\right) = \mathcal{A}\left(f\right) + 2s \int_U H(x,y) dO + s^2 \int_U K(x,y) dO + \cdots$$

mit $dO := \|f_x \times f_y\| \, dxdy$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Skizziere die durch $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ beschriebene Fläche und bestimme eine Krümmungs- und eine Asymptotenlinienparametrisierung.