Lösungshinweise zu den Aufgaben aus Kapitel 4

Hinweis zu Aufgabe 4.8. (a) Für "$\Longleftarrow$" gehe man genauso vor wie beim Quadratwurzelverfahren zur Berechnung der Cholesky-Faktorisierung für symmetrische, positiv definite Matrizen. Für "$\Longrightarrow$" überlege man sich, dass man aus einer LR-Faktorisierung für A unmittelbar für jede der oben angegebenen Hauptuntermatrizen eine LR-Faktorisierung gewinnt.

Hinweis zu Aufgabe 4.9. (a) Man nutze die positive Definitheit der Matrix A mit einem speziellen wohlbekannten Vektor aus.

(b) Für fixierte Indizes j und k nutze man die positive Definitheit der Matrix A für den Vektor

$$x = (x_s) \in \mathbb{R}^N \quad mit \;\; x_s = \begin{cases} 1, & s = j, \\ 0, & s \neq j, \; s \neq k, \\ \alpha, & s = k, \end{cases}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Daraus erschließt man, dass die zugehörige quadratische Gleichung keine reelle Lösung α besitzt, was schließlich die Lösung des Problems liefert.

(c) Eine Widerspruchsannahme führt auf einen Widerspruch zur Aussage von (b).

Hinweis zu Aufgabe 4.14. Es sei die Matrix A als positiv definit angenommen. Sei $(*)$ $A = LL^\top$ mit der unteren Dreiecksmatrix $L = (\ell_{jk}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Für fixierten Index $j \in \{m+2, m+3, \ldots, N\}$ weise man induktiv über $k \in \{1, 2, \ldots, j-m-1\}$ die Identität $\ell_{jk} = 0$ nach (unter Verwendung der aus $(*)$ resultierenden Bestimmungsgleichungen für die Zahlen ℓ_{jk}).

Hinweis zu Aufgabe 4.16. Mit den Notationen

$$U = \left(u_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, u_N \right), \qquad V = \left(v_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, v_N \right), \qquad \langle u, v \rangle_2 = u^\top v$$

überlege man sich als Erstes, dass die Darstellung

$$Ax \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \langle x, u_k \rangle_2 v_k \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

richtig ist. Diese Darstellung $(*)$ ist im Folgenden beständig auszunutzen.

(a) Man gebe $\| A \|_2$ in Abhängigkeit von σ_1 an, und Gleiches tue man für $\| A^{-1} \|_2$ und σ_N.

(b) Man setze mit $x = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k$ an und überlege sich, unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ die Gleichheit $\| b \|_2 = \| A \|_2 \| x \|_2$ vorliegt. Entsprechend setze man mit $\Delta x = \sum_{k=1}^N \beta_k u_k$ an und überlege sich, unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ die Gleichheit $\| \Delta x \|_2 = \| A^{-1} \|_2 \| \Delta b \|_2$ vorliegt. Als Konsequenz aus diesen Aussagen erhält man die Lösung der dritten Teilaufgabe in (b).

(c) Zunächst reduziere man das Problem auf die Bestimmung derjenigen Vektoren $b \in \mathbb{R}^N$, für die $\| x \|_2 = \| A^{-1} \|_2 \| b \|_2$ gilt.

Hinweis zu Aufgabe 4.19. Mit den Notationen

$$A = \left(a_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_N \right), \qquad Q = \left(q_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, q_N \right), \qquad R = (r_{jk})$$

berechne man einerseits $|\det A|$ unter Verwendung der Matrixidentität $A = QR$. Andererseit gilt $a_k = \sum_{j=1}^k r_{jk} q_j$ mit den paarweise orthonormalen Vektoren $q_1, q_2, \ldots, q_k$; damit lässt sich $\| a_k \|_2$ geeignet nach unten abschätzen.

Hinweis zu Aufgabe 4.20. Für (a) multipliziere man

$$(A + uv^\top)\Big(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A{-}1}{1 + v^\top A^{-1} u}\Big)$$

aus.