



Fixpunktgleichungen

Iterationsverfahren

Problem: Oft können wir keine direkte Lösung einer Gleichung angeben.

Anstelle einer direkten Lösung kann man aber oft ein **Iterationsverfahren** angeben:

Gegeben sei eine **Iterationsfunktion** $\Phi(x)$ und ein **Startwert** x_0 . Dann können wir eine **Folge** von Iterationen definieren: $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, $k=0,1,\dots$



Fixpunktgleichungen

Falls diese Folge konvergent ist, also:

$$x_k \rightarrow \bar{x} \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

so folgt, falls Φ stetig ist:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_{k-1}) = \Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k-1}) = \Phi(\bar{x})$$

\bar{x} heißt dann Fixpunkt von Φ in \mathbf{R} .

Beispiel: $\Phi(x) = x^2$, also $x_{k+1} := \Phi(x_k) = (x_k)^2$

oder

$$x_k = x_{k-1}^2 = x_{k-2}^4 = \cdots = x_0^{(2^k)}$$



Fixpunktgleichungen

Das Konvergenzverhalten hängt vom Startwert x_0 ab :

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad \bar{x}_1 = 0$$

$$x_0 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad \bar{x}_2 = 1$$

$$0 < |x_0| < 1 \quad \Rightarrow \quad x_k = x_0^{2^k} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty, \quad \bar{x}_1 = 0$$

$$|x_0| > 1 \quad \Rightarrow \quad x_k = x_0^{2^k} \rightarrow \infty \quad k \rightarrow \infty, \quad (\bar{x}_3 = \infty)$$

Φ hat daher den Fixpunkt 0, bzw. ist divergent
(könnte man als Fixpunkt ∞ bezeichnen).

Die Folgen sind jeweils monoton für $k > 0$.

1 ist ebenfalls Fixpunkt, kann aber nur vorkommen,
wenn man mit ± 1 startet;

1 heißt daher abstoßender Fixpunkt.



Beispiel: Ausbreitung eines Grippevirus in einem Kindergarten

Zu Zeitpunkt t_i bezeichnen wir mit k_i die relative Anzahl erkrankter Kinder, also

$$k_i = \# \text{ kranke Kinder} / \# \text{ Kinder.}$$

t_i ist diskrete Folge von Zeitpunkten.

Infektionsrate $\alpha > 1$, (hängt mit Übertragungswahrscheinlichkeit zusammen)

Bei jeder Kontaktaufnahme zweier Kinder kann daher eine Virusübertragung stattfinden; daher ist die Zahl neu Erkrankter zum nächsten Zeitpunkt direkt proportional zur Zahl der möglichen Begegnungen zwischen einem kranken und einem gesunden Kind.

Ein Kind, das zum Zeitpunkt t_i krank ist, ist zum Zeitpunkt t_{i+1} wieder gesund, kann sich aber wieder anstecken

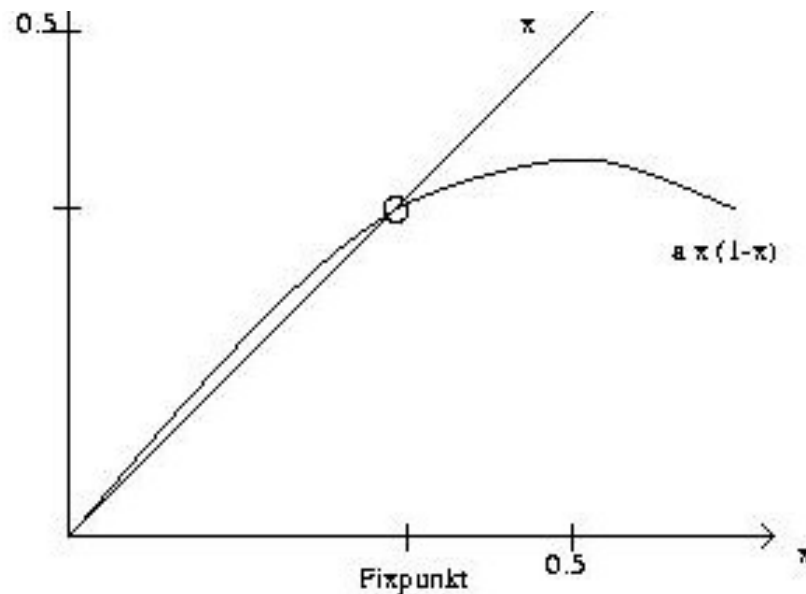
(Diese Annahme dient der Vereinfachung des Modells).



Ergibt Formel: $k_{i+1} = \alpha k_i (1 - k_i)$
 $= \alpha * \#Kranke * \#Gesunde$

Dazugehörige Iterationsfunktion: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

beschreibt eine konkave Parabel, die logistische Parabel.



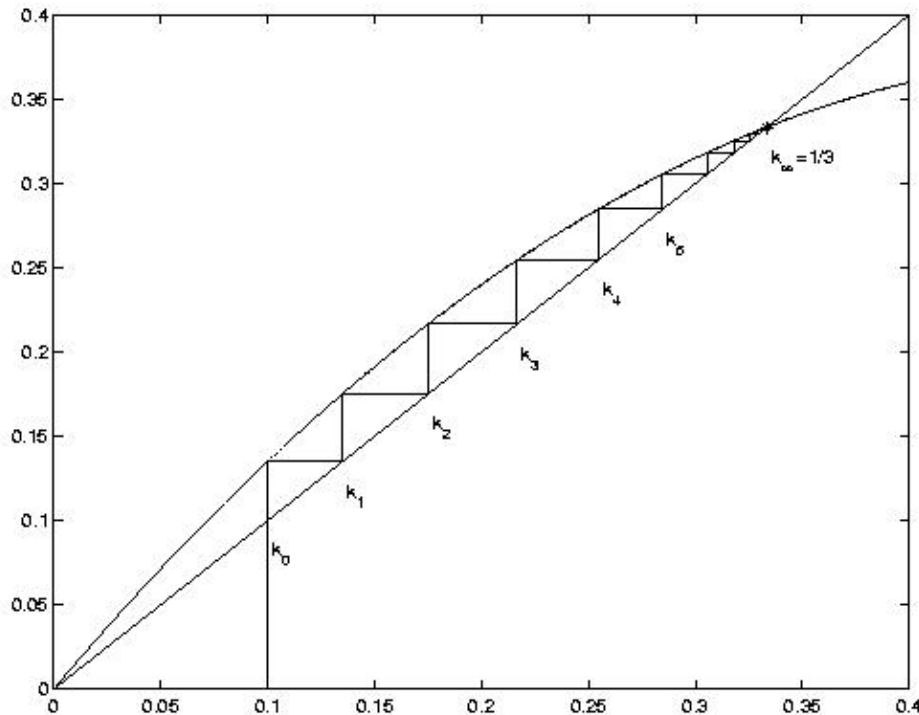
Relatives Maximum bei $x = 0.5$ mit Wert $\Phi(0.5) = 0.25\alpha$;
 Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$;



Fixpunkt als Schnittpunkt von Φ mit der Funktion $g(x) \equiv x$:

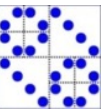
$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) = \alpha\bar{x}(1 - \bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Für $1 < \alpha < 2$ existiert genau ein eindeutiger Fixpunkt dieser Iteration zwischen 0 und 0.5.



z.B. $x_0 = 0.1$ und $\alpha = 1.5$

Konvergiert monoton wachsend gegen 1/3



Banachscher Fixpunktsatz

Frage:

Wann konvergiert die so erzeugte Folge und wann nicht?

Welche Eigenschaften müssen Φ und x_0 haben, damit Konvergenz gegen einen (ev. eindeutigen) Fixpunkt vorliegt?



Banachscher Fixpunktsatz

Sei I ein abgeschlossenes Intervall, Startwert $x_0 \in I$,
 Φ eine Abbildung $\Phi: I \rightarrow I$, d.h. $\Phi(I) \subseteq I$,
 Φ sei in I eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt eine
Konstante $0 < L < 1$ mit $x, y \in I \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

Dann konvergiert die Folge $x_{k+1} := \Phi(x_k)$
gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in I$,
also $x_k \rightarrow \bar{x} = \Phi(\bar{x})$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Offensichtlich gilt stets $x_k \in I$; daher folgt

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \\ &\leq L(L|x_{k-1} - x_{k-2}|) \leq \dots \leq L^k|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Abstand zweier Iterierter x_k und x_m für
 $m > k$:





$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| \leq \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \leq \\ &\leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + L^k) \cdot |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} L^j \cdot |x_1 - x_0| = \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$



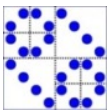
Daher wird der Abstand zwischen zwei Iterierten beliebig klein, wenn sie beide großen Index haben:

$$|x_m - x_k| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad m, k \geq N(\varepsilon)$$

Die Zahlen x_k bilden daher eine **Cauchy-Folge!**

Cauchy-Folgen sind konvergent in I , da I abgeschlossen ist!
(dies ist genau die mathematische Definition von Abgeschlossenheit).

Daher existiert eine Zahl $\bar{x} \in I$ mit $x_k \rightarrow \bar{x}$ für $k \rightarrow \infty$.





\bar{x} ist der gesuchte Fixpunkt in I , denn

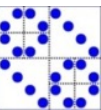
$$\begin{aligned} 0 &\leq |\bar{x} - \Phi(\bar{x})| \leq |\bar{x} - x_k| + |x_k - \Phi(\bar{x})| \leq \\ &\leq |\bar{x} - x_k| + |\Phi(x_{k-1}) - \Phi(\bar{x})| \leq \\ &\leq |\bar{x} - x_k| + L|x_{k-1} - \bar{x}| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Daher muss gelten $\bar{x} - \Phi(\bar{x}) = 0$.

Dieser Fixpunkt in I ist eindeutig, denn

$$\begin{aligned} \bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in I \quad \text{und} \quad \hat{x} = \Phi(\hat{x}) \in I \quad \text{mit} \quad \bar{x} \neq \hat{x} &\Rightarrow \\ |\bar{x} - \hat{x}| = |\Phi(\bar{x}) - \Phi(\hat{x})| \leq L \cdot |\bar{x} - \hat{x}| < |\bar{x} - \hat{x}| &\quad \text{falsch !} \end{aligned}$$

Widerspruch, daher Annahme $\bar{x} \neq \hat{x}$ falsch, also $\bar{x} = \hat{x}$



Außerdem gilt: x_k konvergiert *linear* gegen \bar{x} , denn

$$\begin{aligned} \underline{|x_{k+1} - \bar{x}|} &= |\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x})| \leq L \underline{|x_k - \bar{x}|} \leq \dots \\ \dots &\leq L^{k+1} |x_0 - \bar{x}| \rightarrow 0, \quad L < 1 \end{aligned}$$

Um den Satz anwenden zu können benötigt man also, dass Φ ein Intervall in sich abbildet, und zwar so, dass die Funktionswerte dabei näher zusammenrücken.

$L < 1$ heißt Lipschitz-Konstante.

Ist Φ diff'bar, so lassen sich diese Bedingungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes vereinfachen:

Für $x, y \in I$ ist dann nämlich

$$\Phi(y) = \Phi(x) + \Phi'(z) \cdot (y - x)$$

mit einer Zahl z zwischen x und y .

Daher gilt:
$$|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq \max_{z \in I} |\Phi'(z)| \cdot |y - x|$$

Ist nun $|\Phi'(z)| < 1$ in I , so kann man

$$L := \max_{z \in I} |\Phi'(z)| \quad \text{setzen.}$$

Wir betrachten den Mittelwertsatz jetzt speziell in der Nähe eines Fixpunktes \bar{x} . Dann gilt:

Sei $|\Phi'(\bar{x})| < 1$; dann kann man eine Umgebung U von \bar{x} angeben, in der Φ kontrahierend ist und $\Phi(U) \subseteq U$ gilt (es liegt dann also **lokale Konvergenz vor).**

Sei $|\Phi'(\bar{x})| < 1$; dann kann man eine Umgebung U von \bar{x} angeben, in der Φ kontrahierend ist und $\Phi(U) \subseteq U$ gilt (es liegt dann also **lokale** Konvergenz vor).

Beweis: Setze $U := [\bar{x}-h, \bar{x}+h]$ und wähle dabei $h > 0$ so klein, dass immer noch
gilt (Φ' ist ja stetig!).

$$L := \max_{z \in U} |\Phi'(z)| < 1$$

Für ein $x \in U$ folgt dann $|\Phi(x) - \bar{x}| = |\Phi(x) - \Phi(\bar{x})| \leq L \cdot |x - \bar{x}| < h$

und daher ist auch $\Phi(x) \in U$.

Also insgesamt: $\Phi(U) \subseteq U$ und außerdem ist Φ kontrahierend in U .

Daher ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar.

Einen Fixpunkt \bar{x} mit $|\Phi'(\bar{x})| < 1$ nennt man
„anziehenden Fixpunkt“.

Im Beispiel x^2 ist 0 anziehender Fixpunkt, da $\Phi'(0) = 2 \cdot 0 = 0 < 1$

Daher gilt für $L = 0.5$ und $U = [-0.25, 0.25]$, dass $\Phi(x) = x^2$
in U eine kontrahierende Selbstabbildung von U ist \rightarrow mit dem
Fixpunktsatz von Banach: Konvergenz in U gegen Fixpunkt 0!

Andererseits heißt ein Fixpunkt \bar{x} mit $|\Phi'(\bar{x})| > 1$
abstoßender Fixpunkt,

da keine kontrahierende Umgebung für Φ existiert.

Im Beispiel x^2 ist 1 abstoßender Fixpunkt,
da $\Phi'(1) = 2 \cdot 1 = 2 > 1$.

Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

mit Fixpunkt $\bar{x} = (\alpha - 1)/\alpha$

Dann gilt $\Phi'(\bar{x}) = \alpha(1 - 2\bar{x}) = \alpha\left(1 - 2\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) = 2 - \alpha$

$\bar{x} = (\alpha - 1)/\alpha$ ist anziehender Fixpunkt für $1 < \alpha < 3$.

Für $\alpha \geq 3$ ergibt sich abstoßender Fixpunkt!
Keine Konvergenz!

Für $\alpha \leq 1$ kein Fixpunkt im Intervall $[0, 1]$.

Wegen $x_{k+1} = \Phi(x_k) = \bar{x} + \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

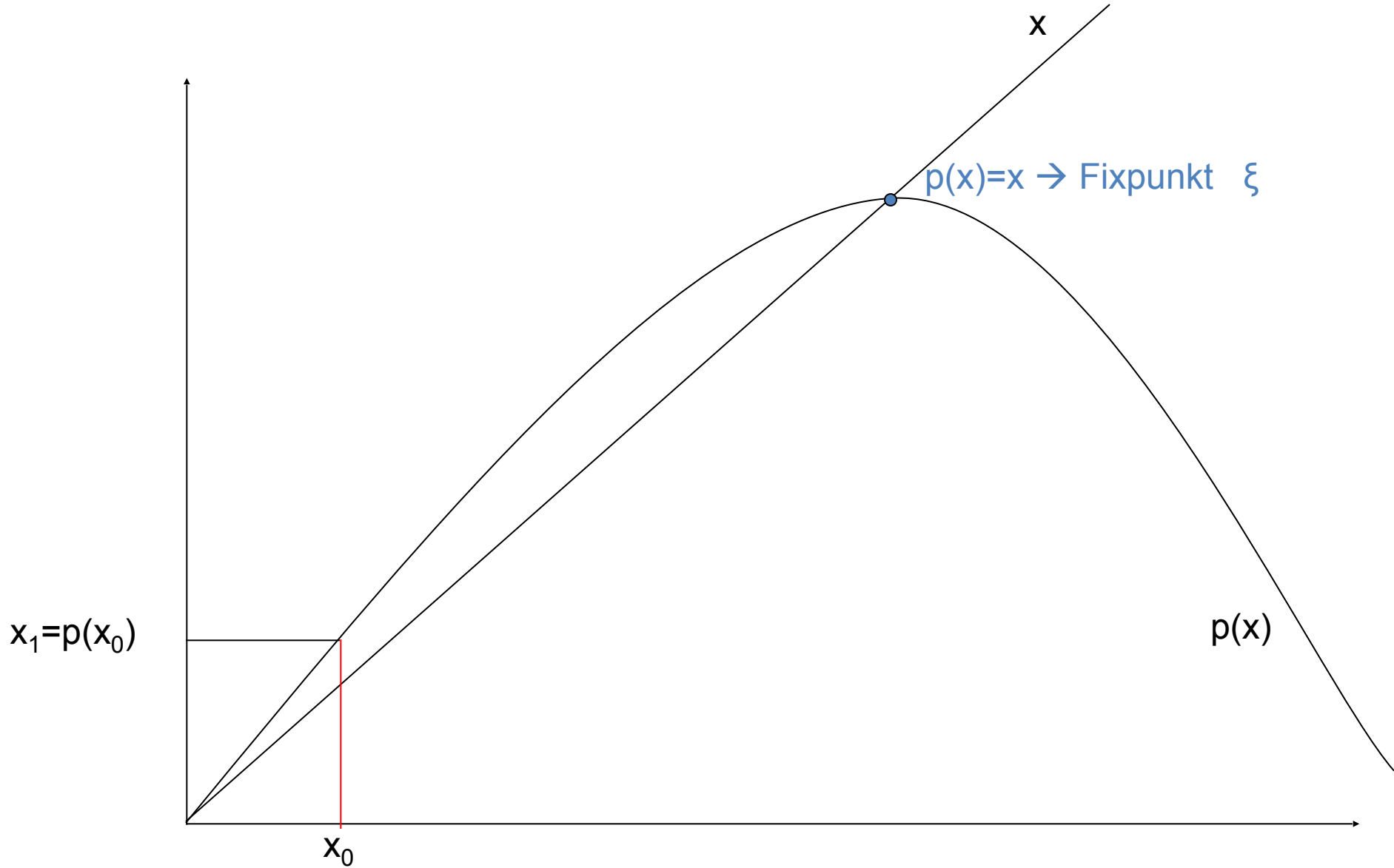
gilt außerdem $x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$

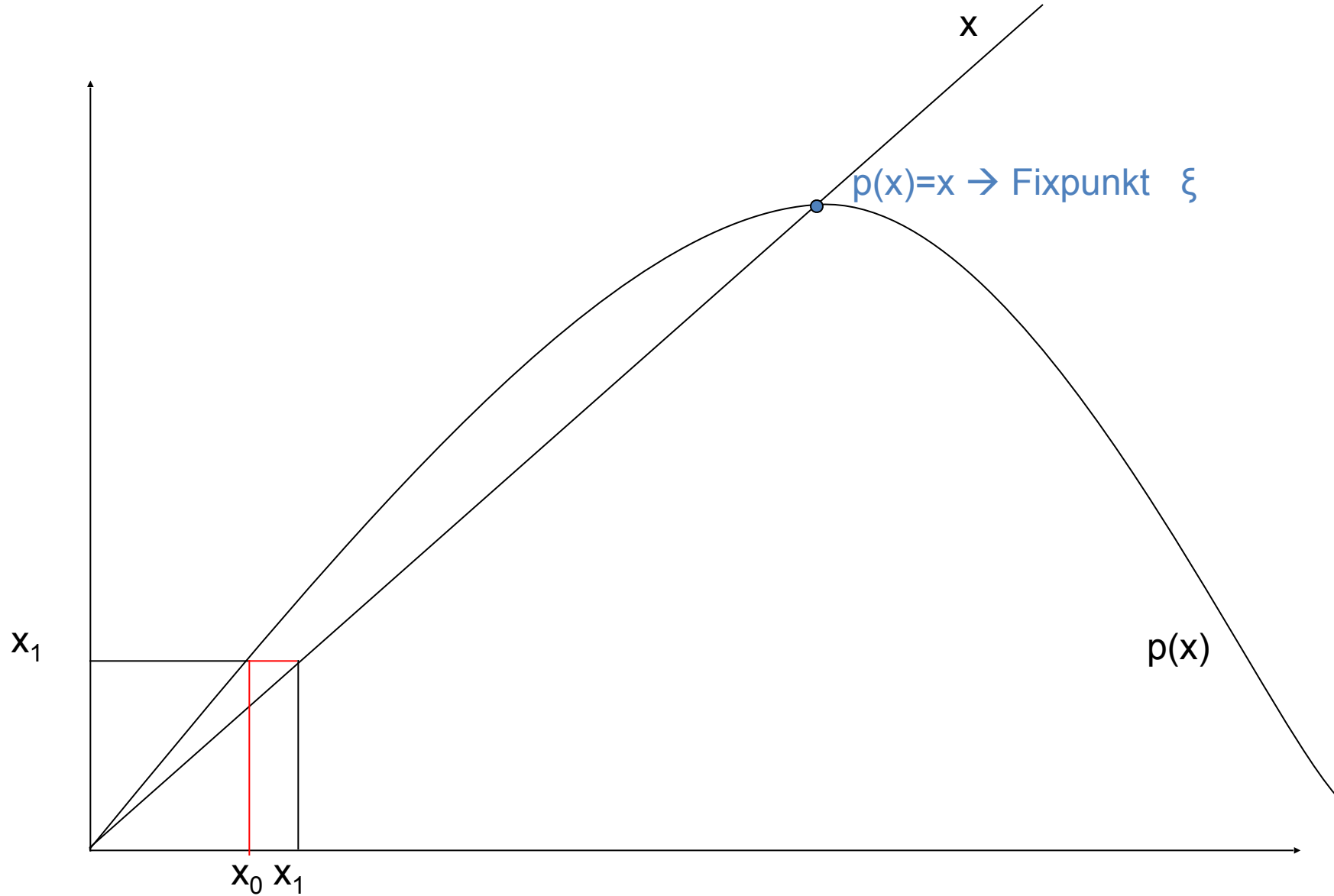
Daher ist für $1 < \alpha < 2$ $\Phi'(\bar{x}) > 0$, und die Folge x_k ist lokal monoton wachsend oder fallend, je nach Startwert rechts oder links vom Fixpunkt.

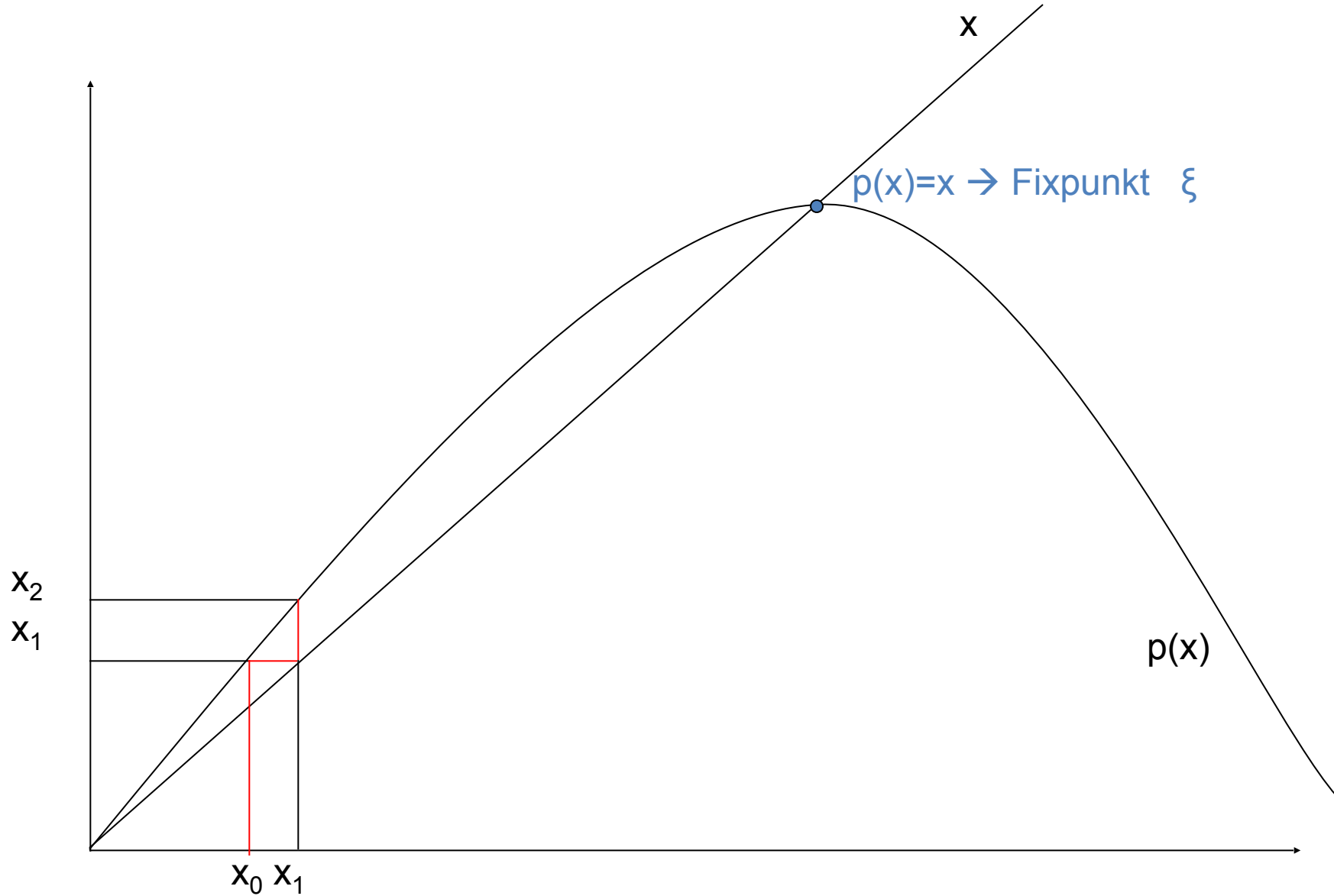
$$x_{k+1} - \bar{x} = \Phi'(z)(x_k - \bar{x})$$

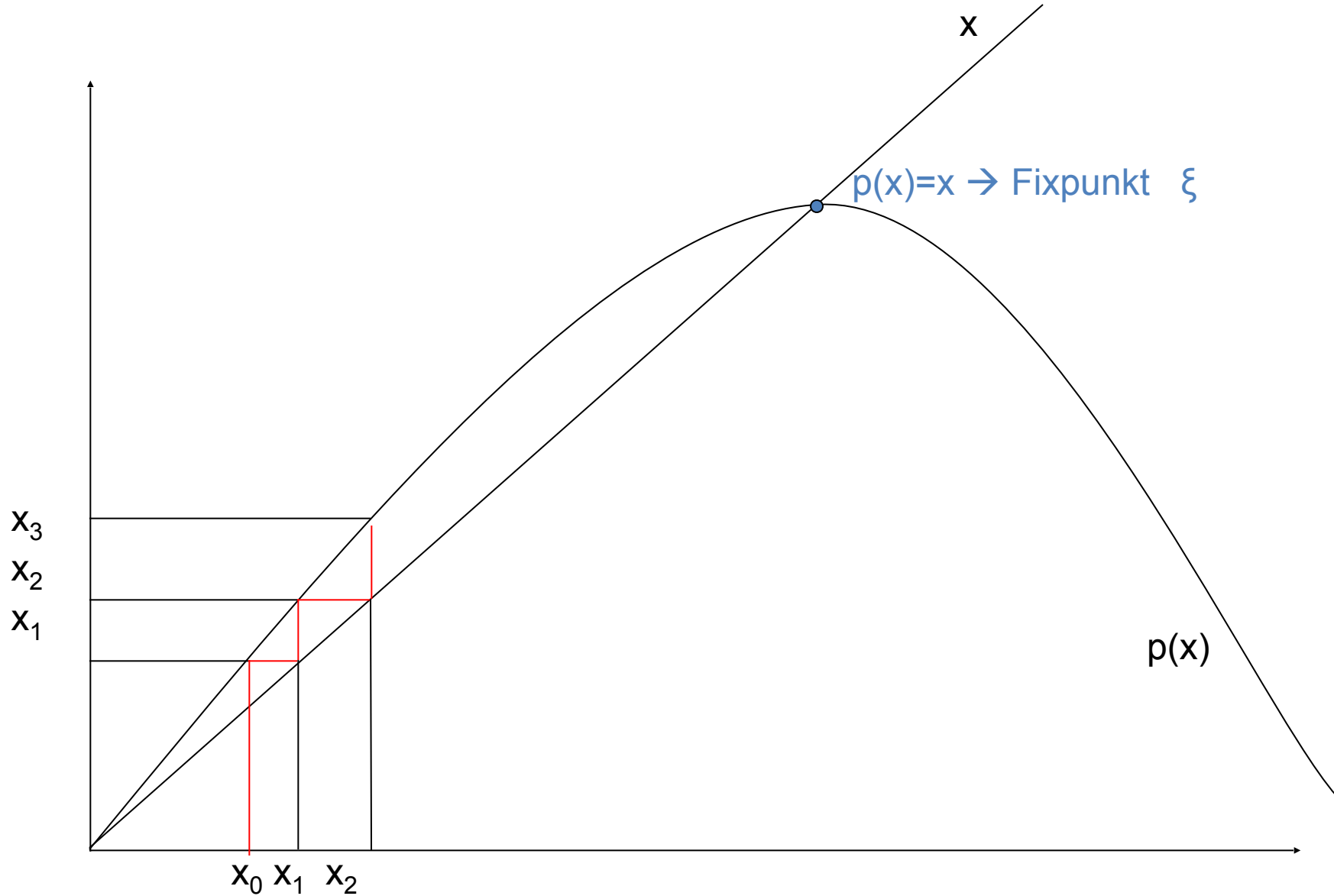
(die x_k liegen stets auf derselben Seite, rechts oder links vom Fixpunkt)

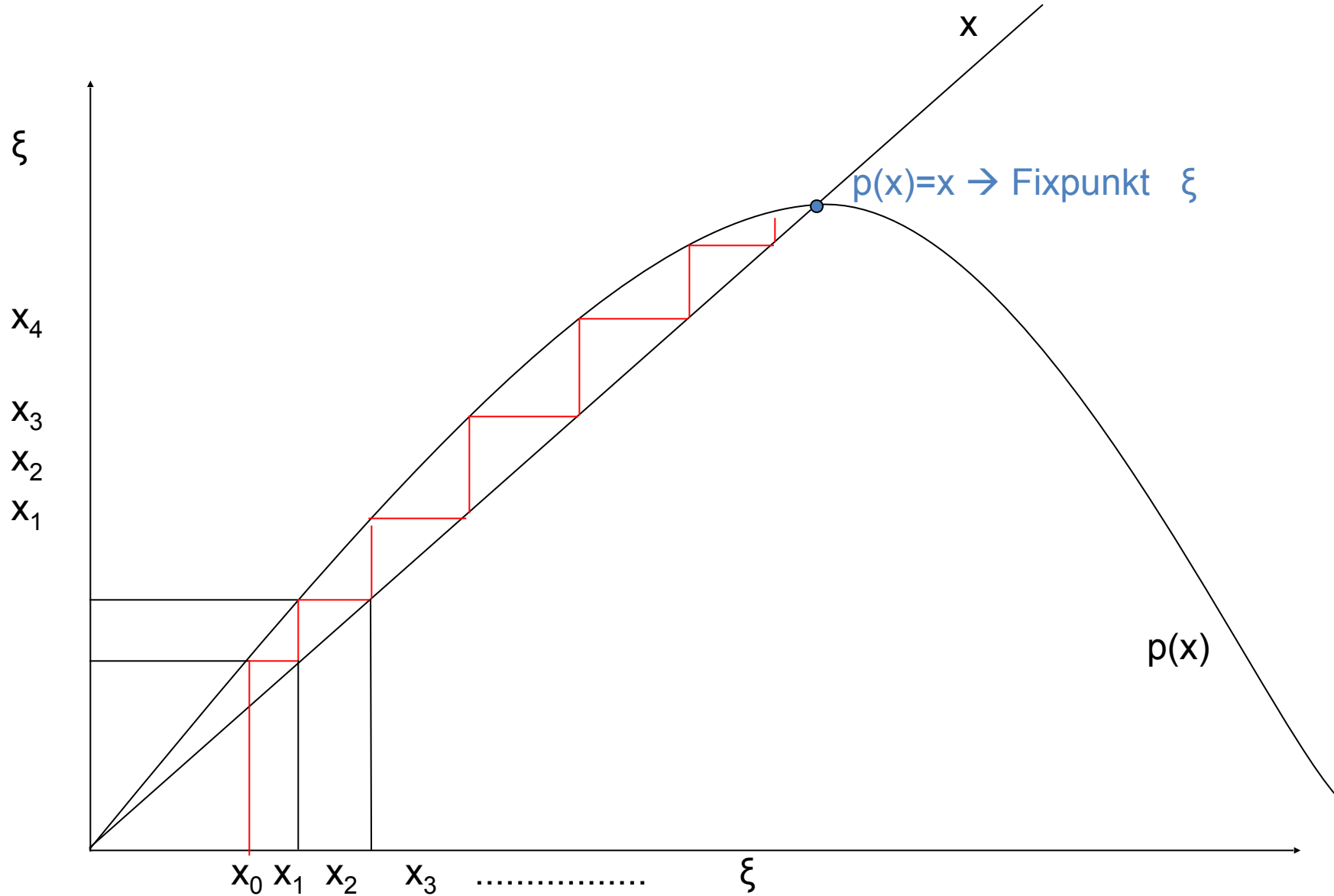
Dagegen konvergiert für $2 < \alpha < 3$ die Folge alternierend, da $\Phi'(\bar{x}) < 0$ ist.

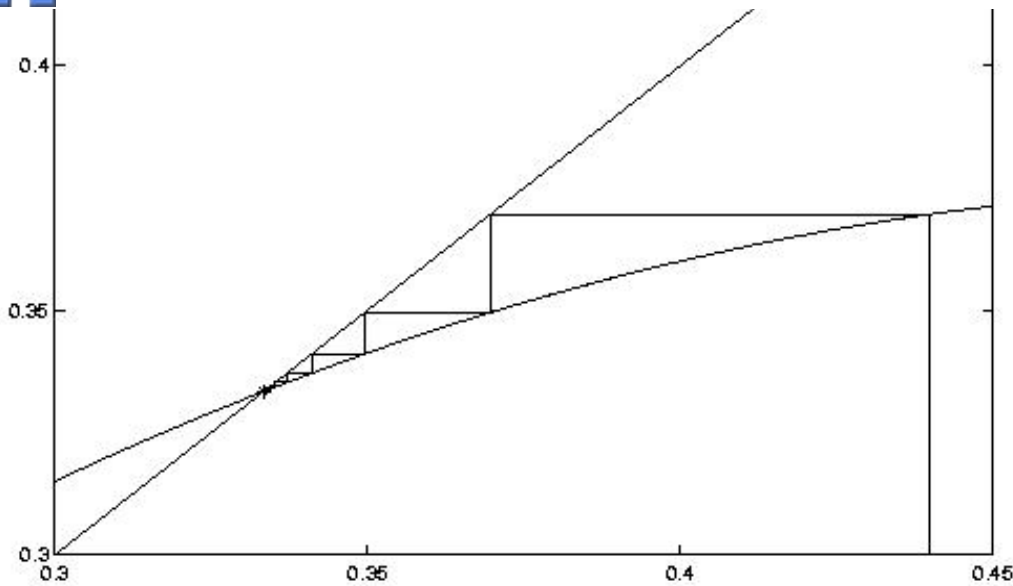




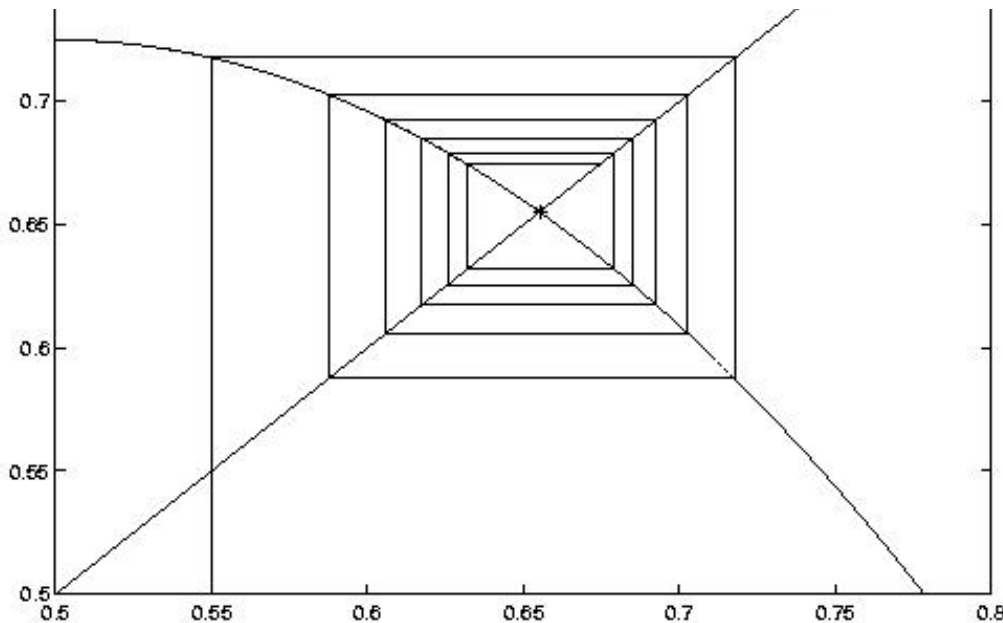








$\alpha = 1.5$ und Startwert
 0.44 \rightarrow
 monoton fallende
 Konvergenz



$\alpha = 2.9$ und Startwert
 0.55 \rightarrow
 alternierende
 Konvergenz

Gesucht sind Nullstellen einer nichtlinearen (stetig diff'baren) Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, also $\bar{x} \in \mathbb{R}$ mit $f(\bar{x}) = 0$!

Zurückführung des Nullstellenproblems auf das inzwischen bekannte Fixpunktproblem.

Also gesucht: $x_k \rightarrow \bar{x}$ für $k \rightarrow \infty$

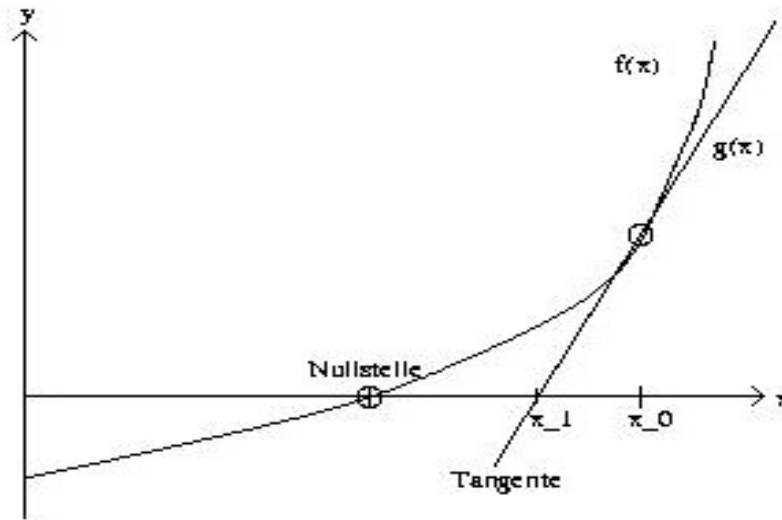
Betrachte dazu die Taylorentwicklung in letzter Iterierten x_k :

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot \underbrace{(\bar{x} - x_k)}_{x_{k+1}} + \underbrace{O((\bar{x} - x_k)^2)}_{\text{wird ignoriert}}$$

Auflösen nach $\bar{x} \rightarrow x_{k+1}$ liefert die

Newton-Iteration:
$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{falls} \quad f'(x_k) \neq 0$$

Geometrische Interpretation des Newtonverfahrens

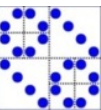


Ersetze $f(x)$ lokal an der Stelle x_k durch bestmögliche Gerade = Tangente, entspricht linearem Anteil der Taylorreihe.

Die Nullstelle dieser Geraden

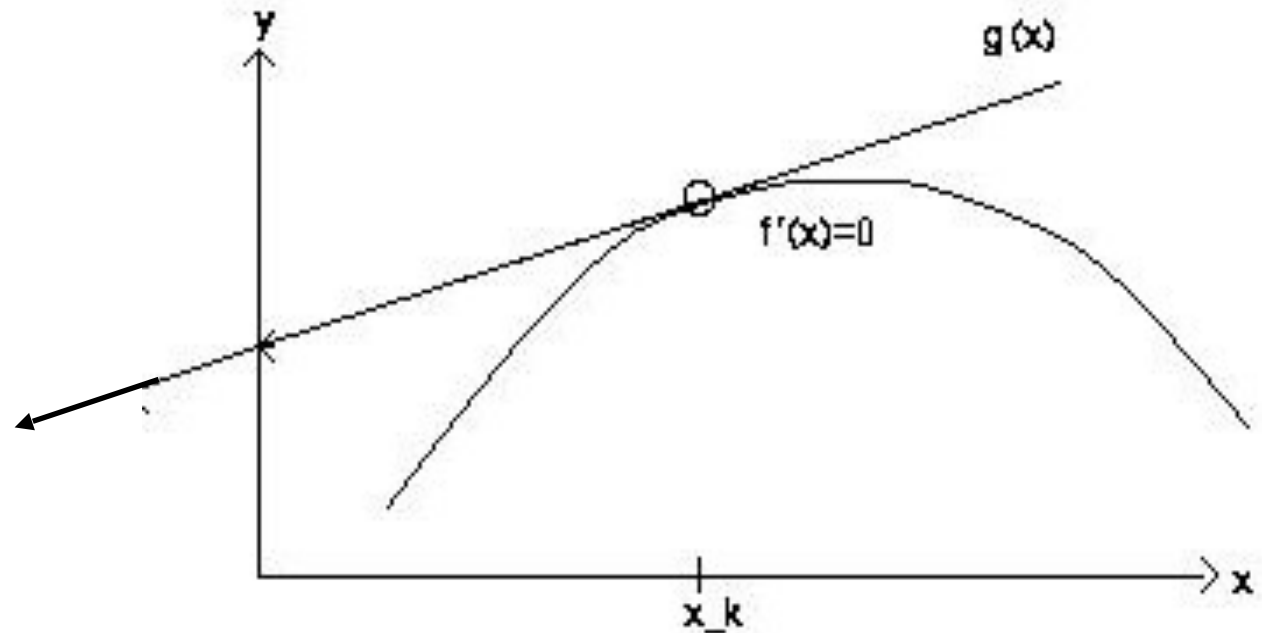
$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

ist genau $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, und wird als nächste Näherung für die ‚echte‘ Nullstelle von f gewählt.



Probleme des Newtonverfahrens, wenn $f'(x_k) \approx 0$: Division durch Null!

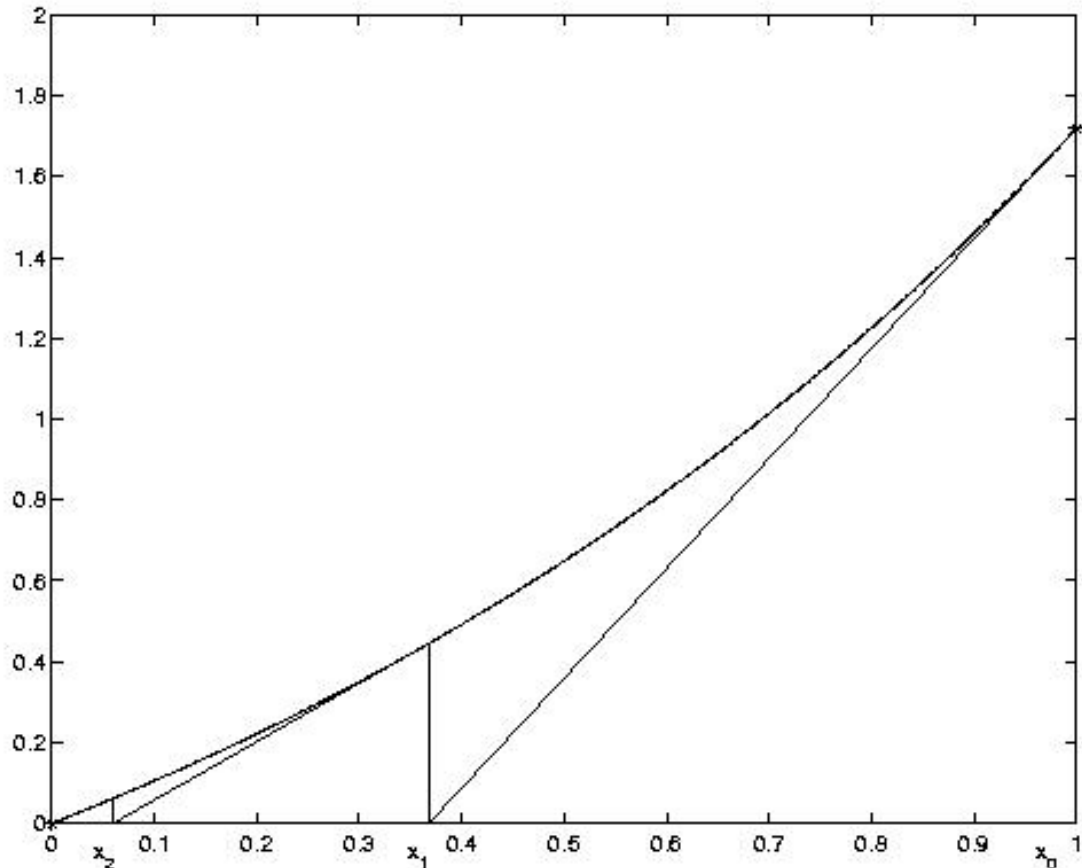
Geometrisch:



Ist x_k nahe einem Punkt mit waagrechter Tangente, so ist die Gerade $g(x)$ fast parallel zur x -Achse, und die nächste Iterierte liegt weit entfernt von $x_k \rightarrow$

Kein konvergentes Verhalten!

Beispiel für Iterationen beim Newtonverfahren



Funktion: $f(x) = \exp(x) - 1$

Nullstelle: $\bar{x} = 0$

Startwert: $x_0 = 1$

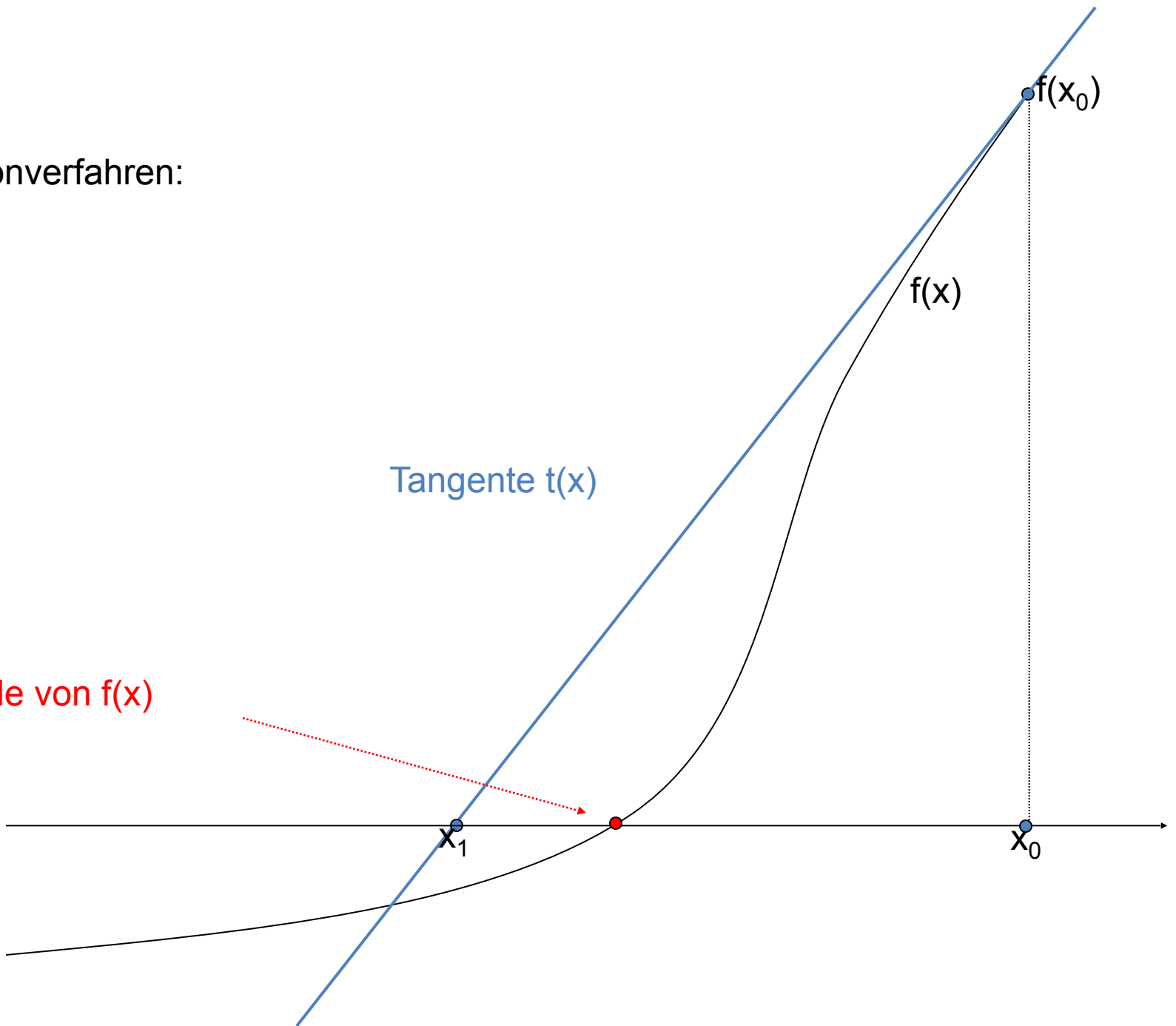
Newtonverfahren:

Tangente $t(x)$

$f(x)$

$f(x_0)$

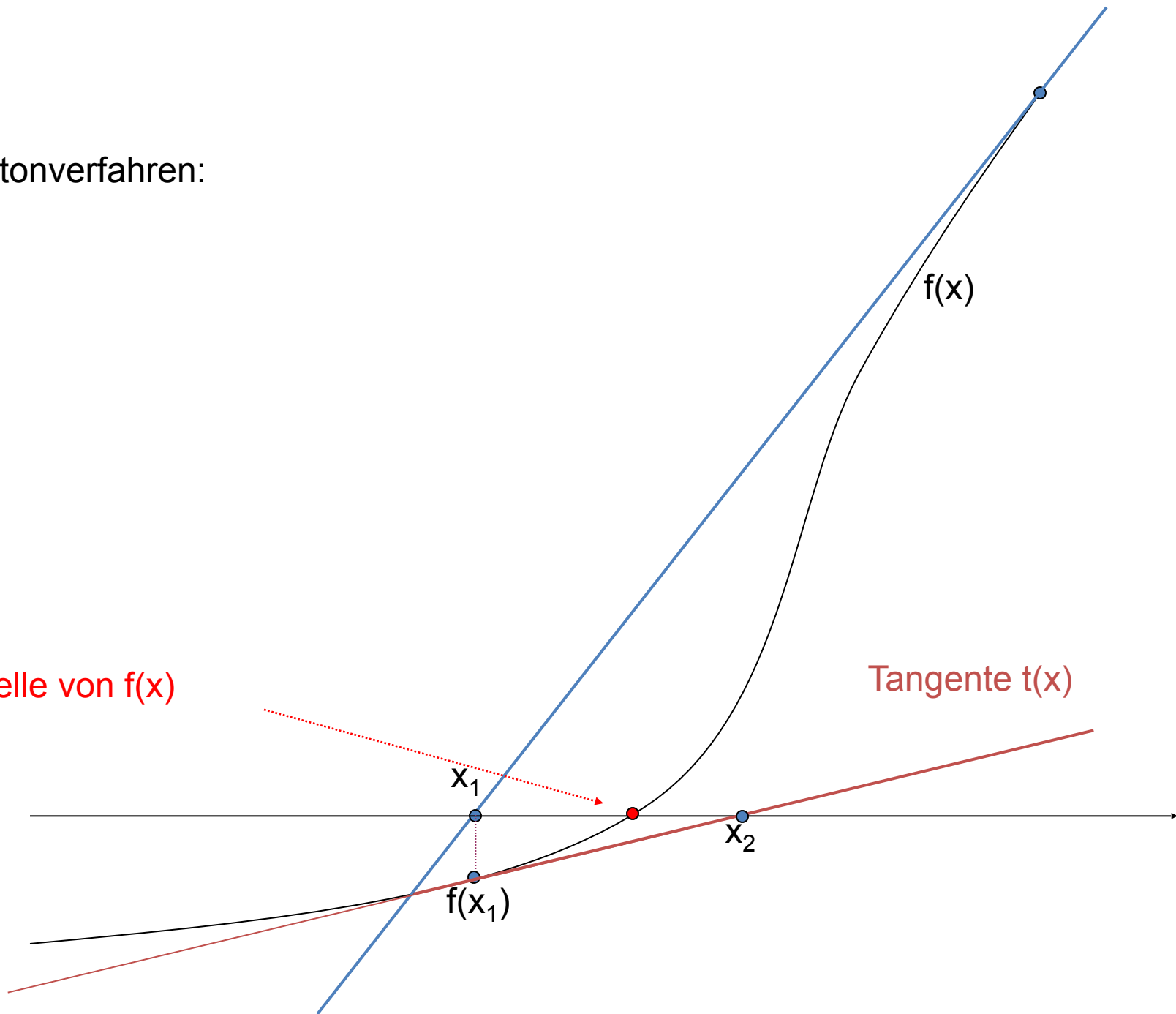
Nullstelle von $f(x)$



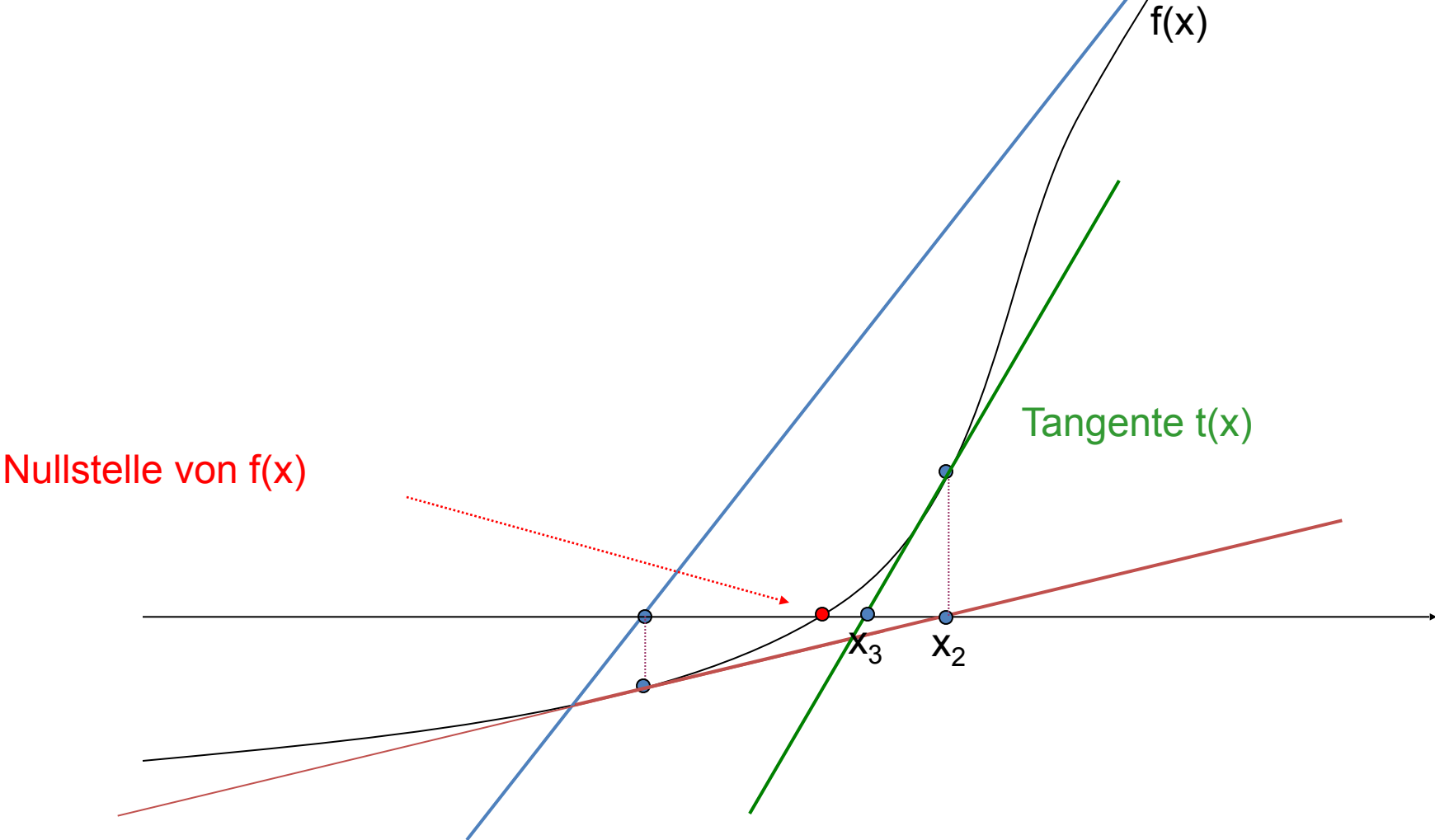
Newtonverfahren:

Nullstelle von $f(x)$

Tangente $t(x)$



Newtonverfahren:



Newton-Verfahren als Fixpunktiteration:

Dazugehörige Iterationsfunktion ist

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Gesuchte Nullstelle \bar{x} von $f(x)$ ist gleichzeitig Fixpunkt von $\Phi(x)$ (falls $f'(\bar{x}) \neq 0$):

$$x = \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

Damit sind die Resultate über Iterationsfunktionen und deren Fixpunkte anwendbar (Fixpunktsatz, $L < 1$, usw.):

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

und (falls \bar{x} einfache Nullstelle von f) gilt:

$$|\Phi'(\bar{x})| = 0 < 1 .$$

Daher ist die gesuchte Nullstelle \bar{x} von f dann ein anziehender Fixpunkt von Φ !

Satz:

Das Newtonverfahren für eine stetig diff'bare Funktion f mit einfacher Nullstelle \bar{x} ist lokal quadratisch konvergent.

Beweis:

Lokal konvergent nach Banach'schem Fixpunktsatz!

Startwert nahe genug bei Fixpunkt \rightarrow lineare Konvergenz im

Intervall $U = [\bar{x}-h , \bar{x}+h]$

Zum Beweis der quadratische Konvergenz:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{1}{2} f''(z)(\bar{x} - x_k)^2$$

mit Zwischenstelle z (Taylorentwicklung).

Umformung:

$$\bar{x} - \boxed{x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z)}{f'(x_k)} (\bar{x} - x_k)^2$$

$$\left| \bar{x} - \boxed{x_{k+1}} \right| = \left| \frac{f''(z)}{2f'(x_k)} \right| \cdot |\bar{x} - x_k|^2 = C(x_k, \bar{x}) \cdot |\bar{x} - x_k|^2$$

Ist $f'(\bar{x}) \neq 0$, so kann C lokal durch eine Konstante L nach oben beschränkt werden.

Daher folgt: $\left| \bar{x} - x_{k+1} \right| \leq L \cdot \left| \bar{x} - x_k \right|^2$

Der Abstand von der gesuchten Lösung verringert sich in jedem Schritt quadratisch (wenn man nahe genug an der Lösung ist, so dass $|\bar{x}-x_k| \ll 1$).

z.B. Abstand von der Lösung in jedem Schritt $|\bar{x}-x_k|$ z.B.

wie 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-8} , 10^{-16}

Also schnelle Konvergenz!

Voraussetzungen für quadratische Konvergenz:

- \bar{x} einfache Nullstelle, d.h.
 $f(\bar{x}) = 0$, aber $f'(\bar{x}) \neq 0$, oder
 $f(x) = (\bar{x}-x)g(x)$ mit $g(\bar{x}) \neq 0$
- Startwert x_0 nahe bei \bar{x}



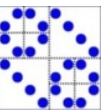
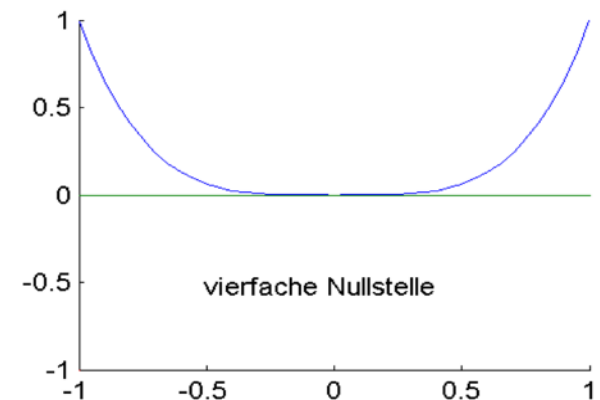
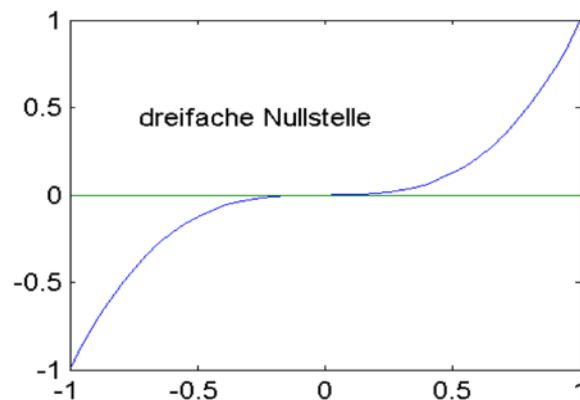
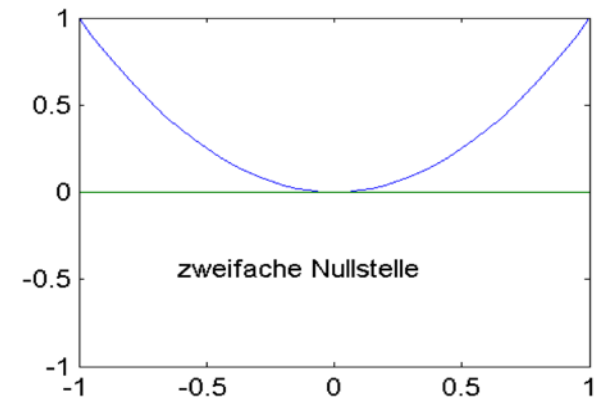
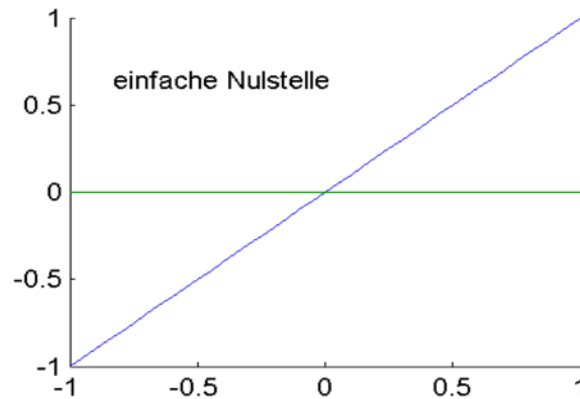
a heißt **m**-fache Nullstelle, wenn:

$$f^{(j)}(a) = 0 \text{ für } j=0, \dots, m-1, \text{ aber } f^{(m)}(a) \neq 0$$

oder

$$f(x) = (x-a)^m \cdot g(x) \text{ mit } g(a) \neq 0$$

Graphisch:



Definition der Konvergenzordnung

Linear konvergent: $|\bar{x} - x_{k+1}| \leq L \cdot |\bar{x} - x_k|$ und $L < 1$

Konvergent von Ordnung $p > 1$: $|\bar{x} - x_{k+1}| \leq L \cdot |\bar{x} - x_k|^p$

Falls f an der Stelle \bar{x} eine m -fache Nullstelle hat mit $m > 1$, so ist das Newtonverfahren nur noch **lokal linear** konvergent:

Ist nämlich \bar{x} eine m -fache Nullstelle, so folgt

$$f(x) = (x - \bar{x})^m g(x) \quad \text{mit} \quad g(\bar{x}) \neq 0$$

und die Iterationsfunktion lautet

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x - \bar{x})^m g(x)}{m(x - \bar{x})^{m-1} g(x) + (x - \bar{x})^m g'(x)}$$

Die Ableitung der Iterationsfunktion ist daher

$$\Phi'(\bar{x}) = 1 - \frac{g(\bar{x})}{m \cdot g(\bar{x})} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt:

Φ ist lokal kontrahierend und es liegt *lineare* Konvergenz vor!

Variationen bei m-facher Nullstelle, um quadratische Konvergenz zu erreichen:

Wende Newtonverfahren an auf

(m-1) – te Ableitung von f(x)

f(x)/f'(x)

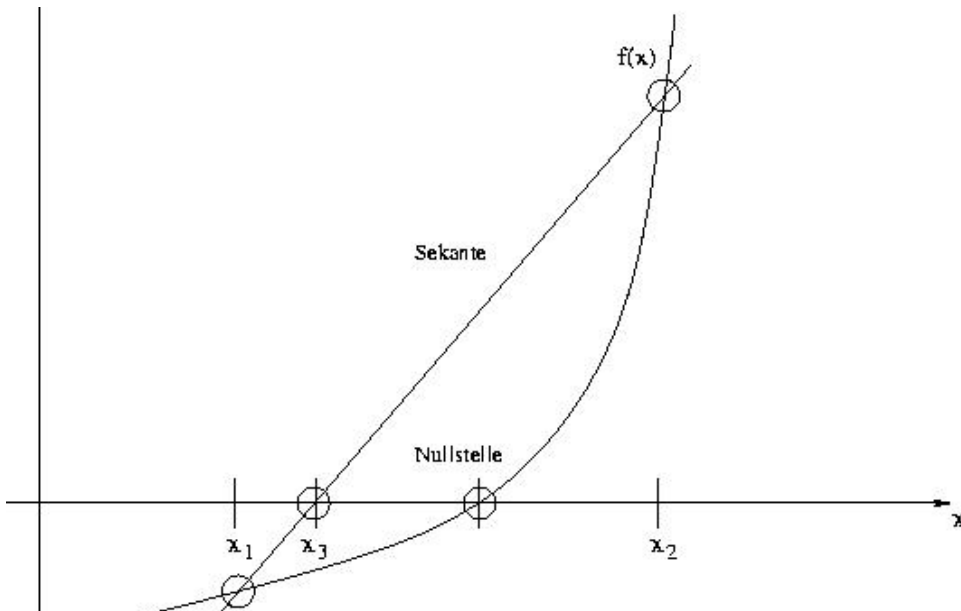
m-te Wurzel von |f(x)|

oder modifiziere Newtonformel (bei bekanntem m) zu

$$\Phi(x) = x - m \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Sekantenverfahren:

Ersetze Tangente in letztem Punkt durch die Sekante, die die beiden letzten Punkte verbindet; verwende deren Nullstelle!



$$\approx f'(x_k)$$

$$g(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \cdot (x - x_{k-1})$$

Nullstelle der Sekante als nächste Iterierte:

$$x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

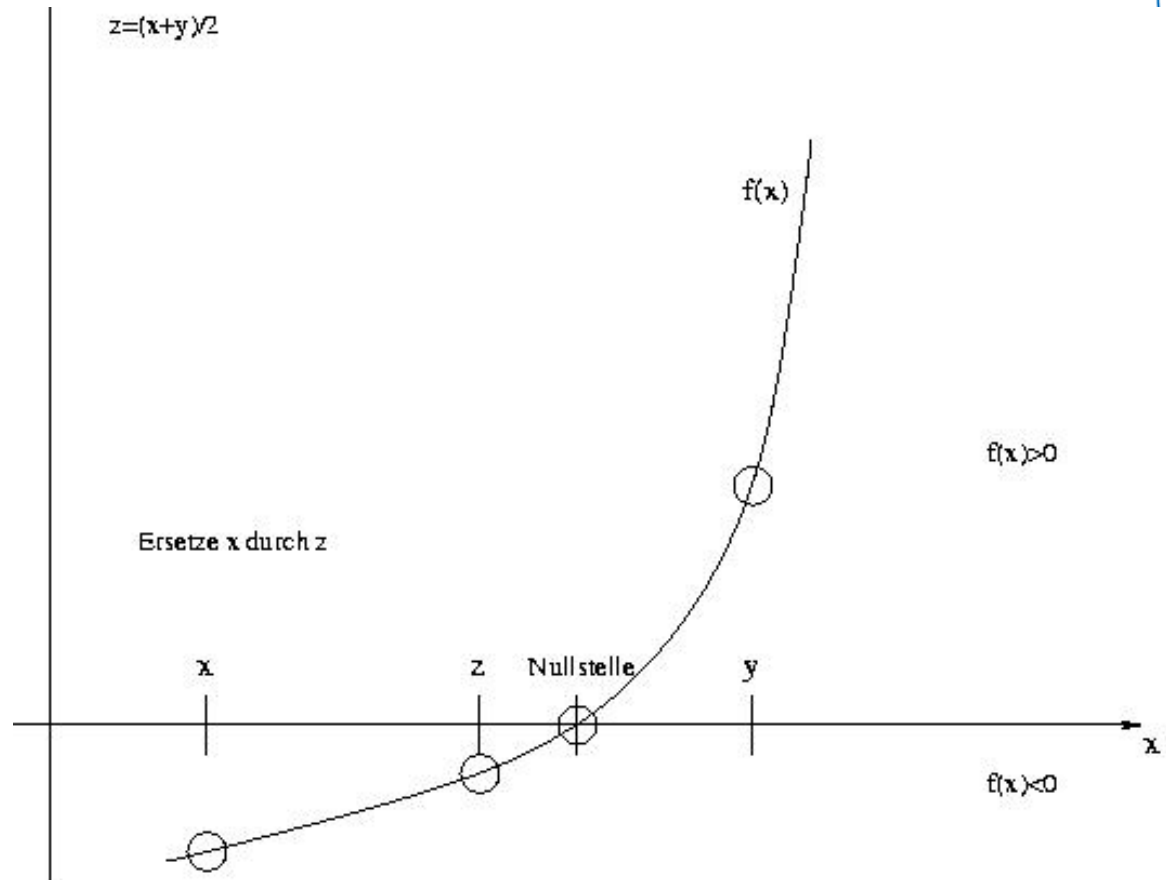
Liefert lokale Konvergenz wie beim Newtonverfahren.

Vorteil: keine Ableitungen benötigt, jeweils nur die letzten beiden Funktionswerte! Billiger!

Aber Problem, falls Nenner gleich Null ist!

Konvergenzordnung p nur mit $1 < p < 2$, aber dafür pro Schritt nur eine neue Funktionsauswertung nötig (bei Newton f und f' pro Schritt)

Bisektionsverfahren:



Starte mit zwei Werten x und y , für die gilt, dass $f(x) \cdot f(y) < 0$ ist, für die also f verschiedene Vorzeichen hat.

Daher liegt für stetiges f zwischen x und y garantiert eine Nullstelle!

Setze $z := (x+y)/2$ den Wert genau in der Mitte zwischen x und y :

Berechne $f(z)$.

Ist $f(z) = 0$: fertig

Ist $f(x) \cdot f(z) > 0$, so setze $x := z$, y bleibt

Ist $f(y) \cdot f(z) > 0$, so setze $y := z$, x bleibt

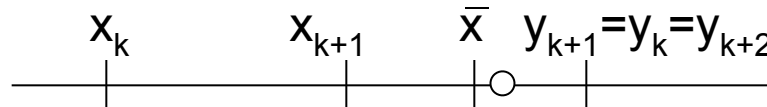
Damit gilt wieder $f(x) \cdot f(y) < 0$, aber der Abstand zwischen x und y hat sich halbiert.

Daher liegt die gesuchte Nullstelle nach k Schritten garantiert in einem kleineren Intervall der Größe $\text{const}/2^k$, und es gilt:
(Bezeichnung: $x_k, y_k \rightarrow z_k$ usw.)

$$\begin{aligned}
 \underline{|\bar{x} - x_{k+1}| + |y_{k+1} - \bar{x}|} &= |y_{k+1} - x_{k+1}| = \\
 &= 0.5 \cdot |y_k - x_k| = 0.5 \cdot \underline{(|\bar{x} - x_k| + |y_k - \bar{x}|)} \\
 &\leq \max \{ |\bar{x} - x_k|, |\bar{x} - y_k| \}
 \end{aligned}$$

Daher schrumpft der „**Abstand**“ der Nullstelle zu den beiden Intervallgrenzen linear in jedem Schritt um den Faktor 0.5

$$\max \left\{ |x_{k+2} - \bar{x}|, |y_{k+2} - \bar{x}| \right\} \leq |x_{k+2} - y_{k+2}| \leq |x_{k+1} - y_{k+1}| / 2 \leq \max \left\{ |x_k - \bar{x}|, |y_k - \bar{x}| \right\} / 2$$

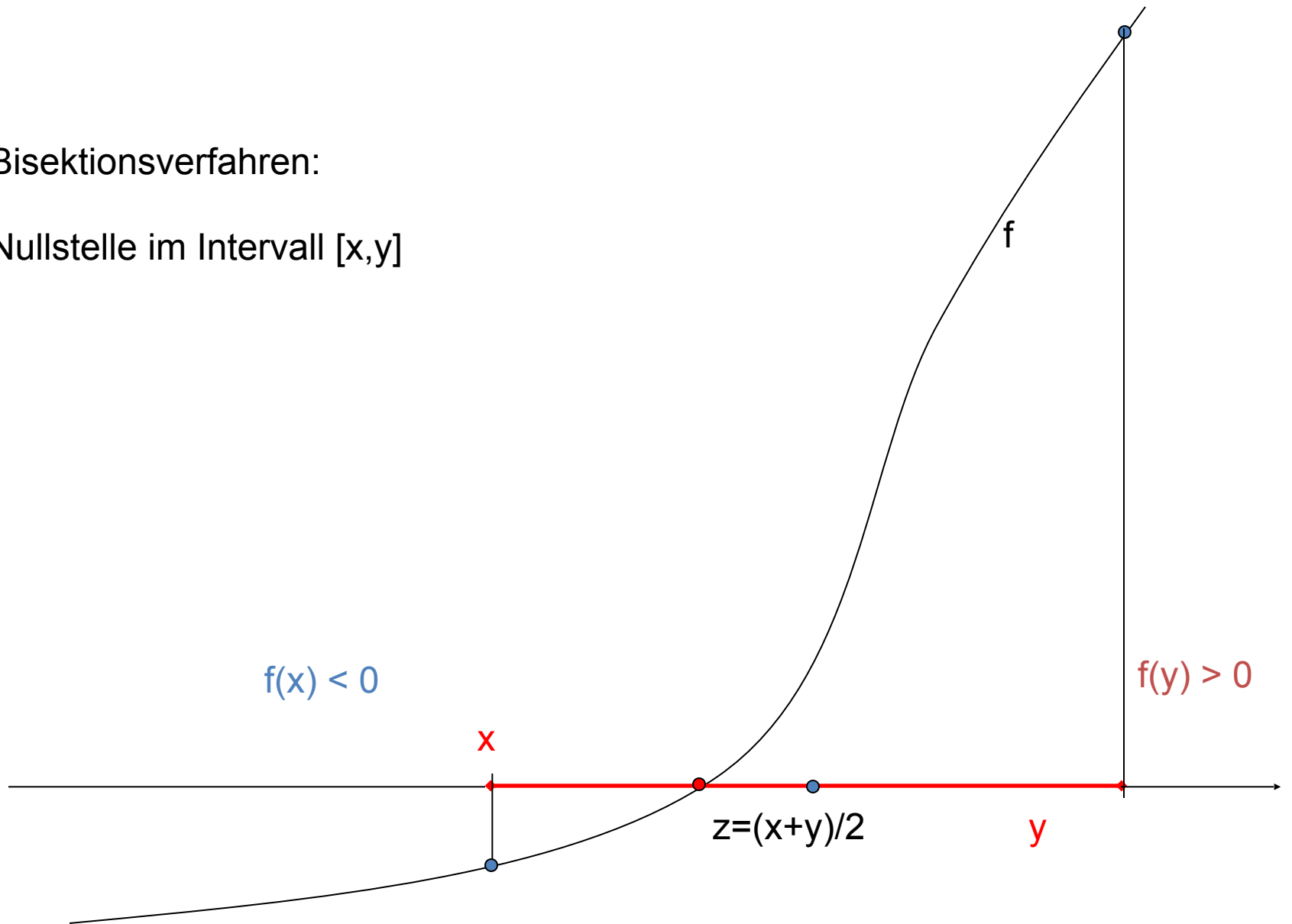


Regula falsi durch Verbindung von Bisektion und Sekantenverf.:

**Iteriere wieder Intervall-Einschließungsgrenzen.
 Neuer Kandidat für Ober/Untergrenze ist jetzt nicht der Punkt in der Mitte, sondern die Nullstelle der Sekante.
 Ersetze eine der beiden alten Grenzen durch diesen neuen Kandidaten, so dass die gesuchte Nullstelle wieder garantiert in dem neuen Intervall liegt!**

Bisektionsverfahren:

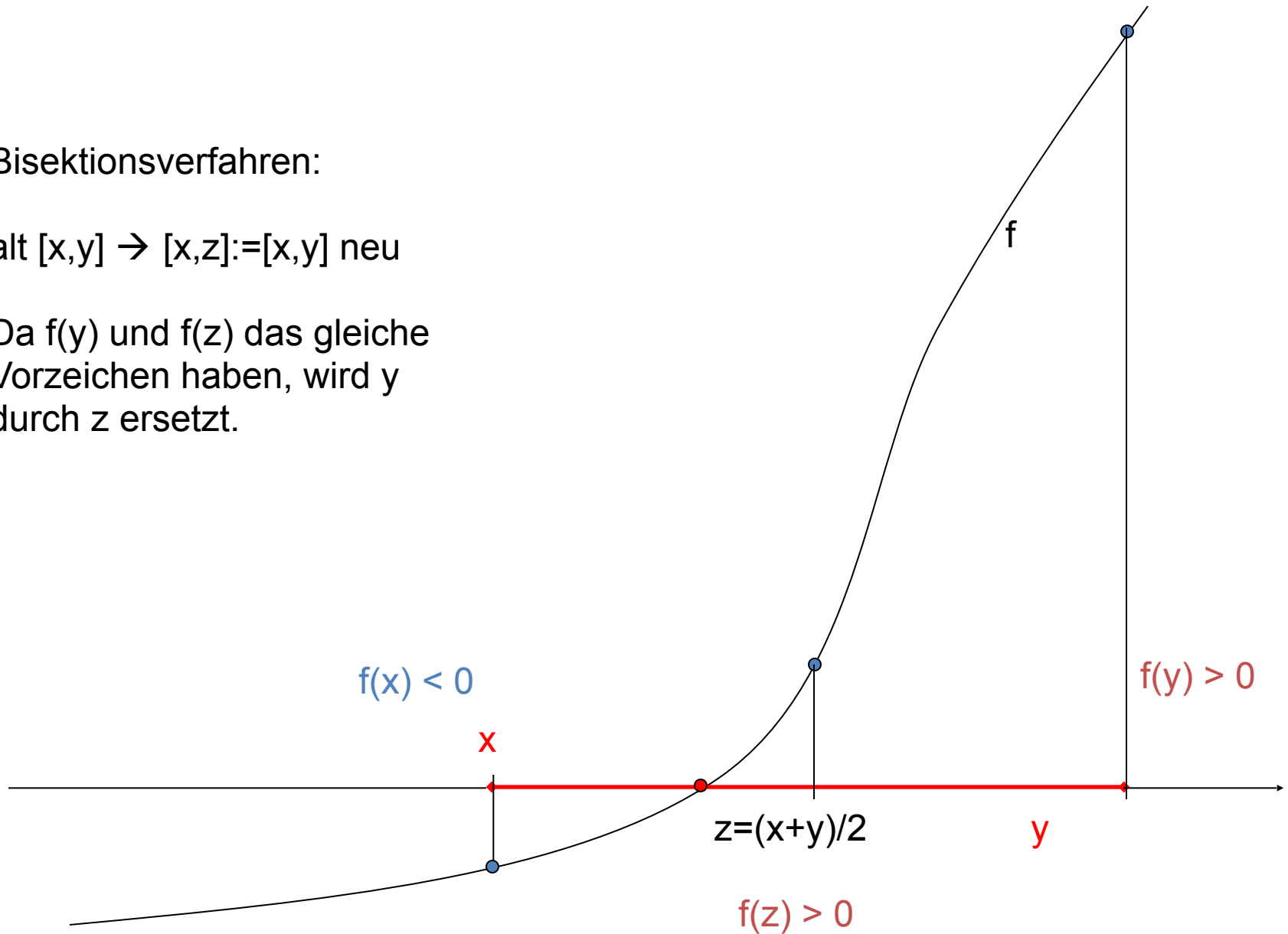
Nullstelle im Intervall $[x,y]$

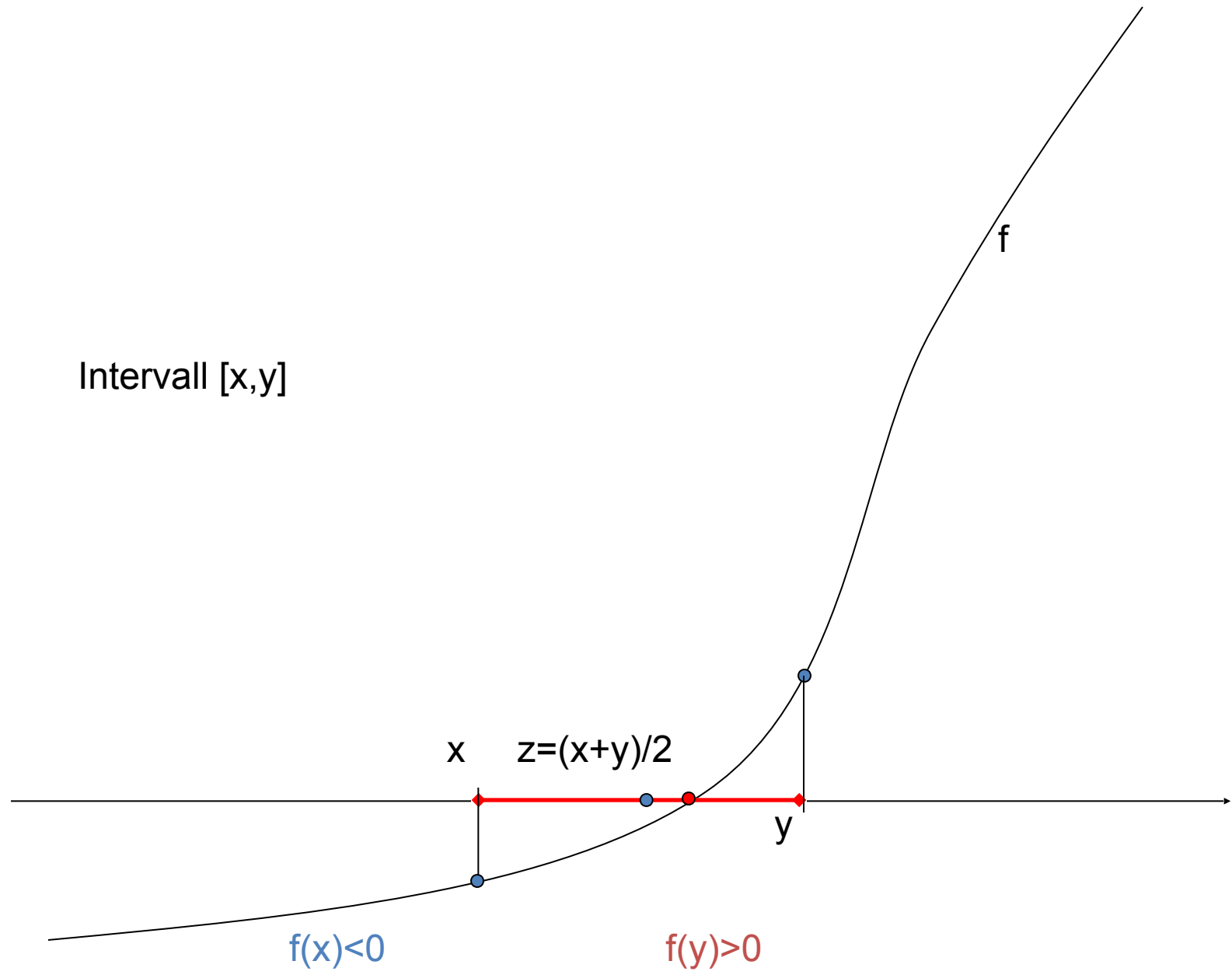


Bisektionsverfahren:

alt $[x,y] \rightarrow [x,z]:=[x,y]$ neu

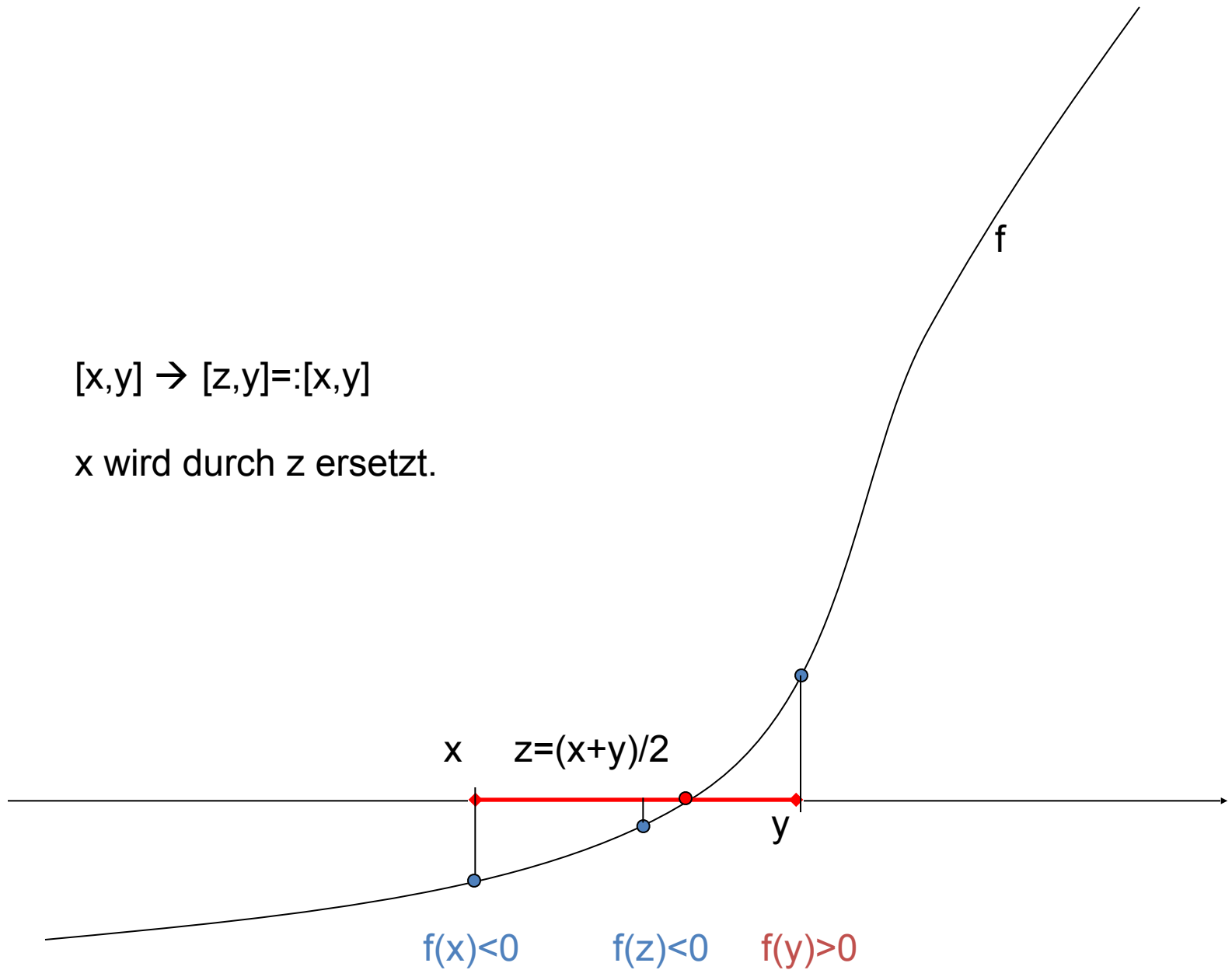
Da $f(y)$ und $f(z)$ das gleiche Vorzeichen haben, wird y durch z ersetzt.



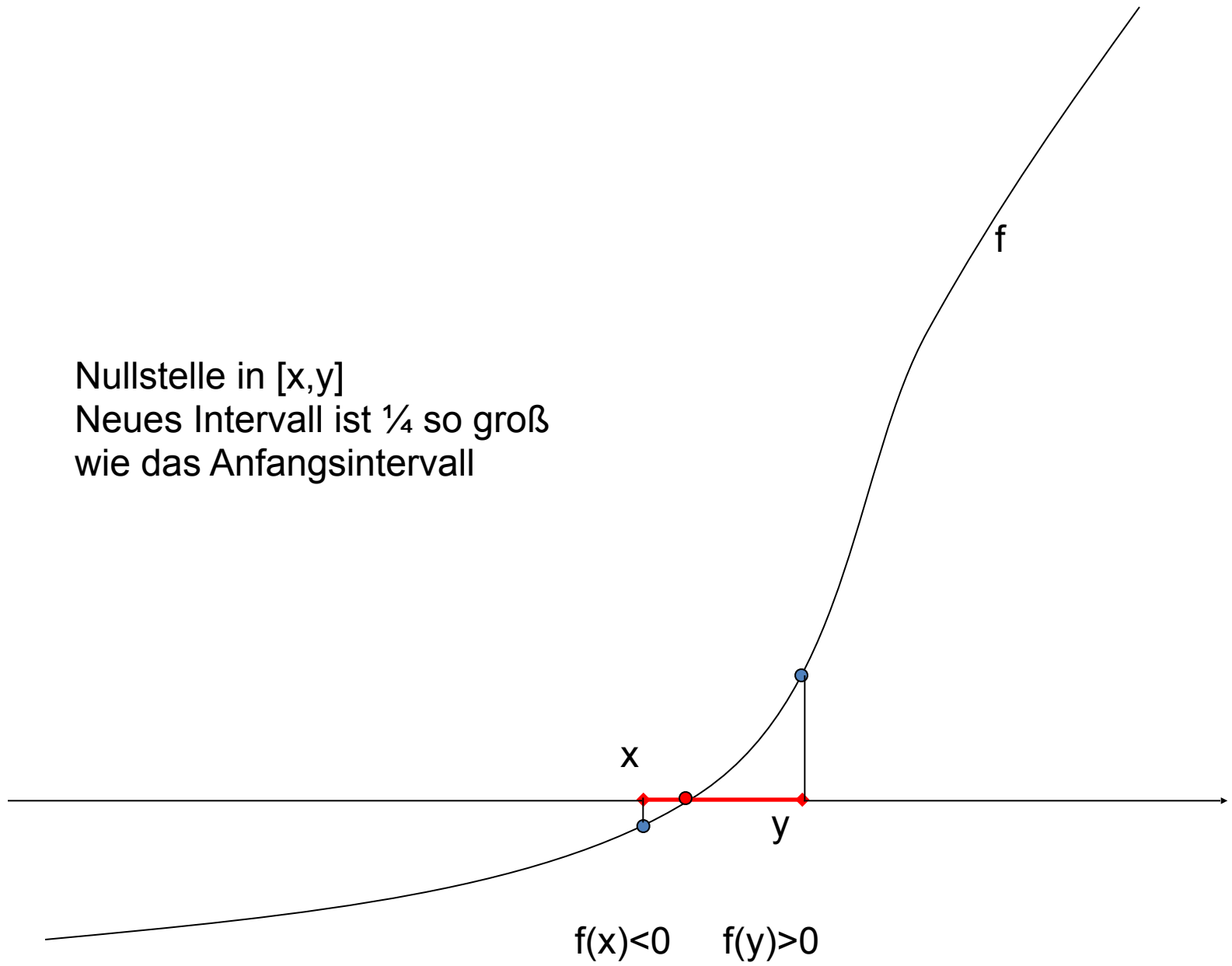


$[x,y] \rightarrow [z,y]=:[x,y]$

x wird durch z ersetzt.



Nullstelle in $[x,y]$
Neues Intervall ist $\frac{1}{4}$ so groß
wie das Anfangsintervall



In der Praxis wird häufig eine Kombination von Bisektion und Newton eingesetzt:

Starte mit ‚sicherer‘ Bisektion, bis der ‚Einzugsbereich‘ der quadratischen Konvergenz des Newtonverfahrens erreicht ist.

Dazu nötig sind Werte x und y mit $f(x)f(y) < 0$;
solche Werte erhält man z.B. durch Auswertung von $f(x)$ an
Zufallszahlen oder an äquidistanten Stellen.

Falls solche x und y nicht auffindbar sind, liegt ev. keine
Nullstelle vor oder eine Nullstelle gerader Ordnung!
Im letzteren Fall kann das Newtonverfahren auf $f'(x)$
angewendet werden.

Zusammenfassung

- Iterationsverfahren berechnen **Folgen** von Werten einer Iterationsfunktion (Ziel: Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten)
- Es gibt **anziehende** und **abstoßende** Fixpunkte; diese kann man an den Ableitungen der Iterationsfunktion unterscheiden
- Der **Banachsche Fixpunktsatz** wird angewendet, um Konvergenz nachzuweisen
- Das **Newton-Verfahren** bestimmt Nullstellen einer Funktion mithilfe von Interaktionen; es konvergiert lokal quadratisch
- Andere Methoden: **Sekanten**, **Bisektion**, **Regula falsi**

