Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Dr. Alexander Krauss

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 7
15. Juni 2010

Einführung in die Theoretische Informatik

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Streicht man aus einem Wort $w \in \Sigma^*$ an beliebig vielen Stellen einen Buchstaben, so erhält man ein *verstreutes Teilwort w' von w*. Formal: $w' = u_1 u_2 \dots u_n$ mit $u_i \in \Sigma^*$ ist ein verstreutes Teilwort von $w = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \dots v_{n-1} u_n v_n$ mit $v_i \in \Sigma^*$.
Zu jeder Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $sub(L)$ wie folgt:

$$sub(L) = \{w' \mid w' \text{ ist ein verstreutes Teilwort eines Worts } w \in L\}\,.$$

Man zeige:

1. Wenn L regulär ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls regulär.
2. Wenn L kontextfrei ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls kontextfrei.
3. Wenn L kontextfrei ist, dann ist $sub(L)$ sogar regulär.

Hinweis: Die ersten beiden Aufgabenteile sollten Ihnen keine großen Schwierigkeiten bereiten. Der dritte Teil ist eine härtere Nuss und erfordert einiges an Überlegungen (aber kein zusätzliches Wissen). Sollten Sie diesen Teil nicht lösen können, ist das kein Grund zur Sorge.

Lösungsvorschlag

1. Verschiedene Ansätze führen zum Ziel: In einem ϵ-NFA kann man für jeden Übergang mit einem Zeichen $a \in \Sigma$ einen zusätzlichen ϵ-Übergang einfügen. Der so entstehende Automat akzeptiert $sub(L)$.

   Alternativ kann man in einem regulären Ausdruck jedes Zeichen a durch $(a \mid \boldsymbol{\epsilon})$ ersetzen.

2. Eine Grammatik für L transformiert man wie folgt in eine Grammatik für $sub(L)$: Führe für jedes Terminalzeichen $a \in \Sigma$ ein neues Nichtterminal T_a ein und ersetze a durch T_a in allen Produktionen. Füge neue Produktionen $T_a \to A \mid \epsilon$ hinzu.

3. (volle Punktzahl für die ersten beiden Teilaufgaben.)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rclcrcl}
\delta(q,\epsilon,Z_0) & = & \{(q,XZ)\}\,, & & \delta(q,a,X) & = & \{(q,XY)\}\,,\\
\delta(q,\#,X) & = & \{(q,\epsilon)\}\,, & & \delta(q,b,Y) & = & \{(q,\epsilon)\}\,,\\
\delta(q,a,Z) & = & \{(q,\epsilon)\}\,. & & & &
\end{array}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.

2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ', dass für den Kellerautomaten $K'=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta')$ gilt: $L_\epsilon(K')=(L_\epsilon(K))^*$.

Lösungsvorschlag

1. $$\begin{aligned}(q,a\#ba,Z_0) &\rightarrow_K (q,a\#ba,XZ)\\ &\rightarrow_K (q,\#ba,XYZ)\\ &\rightarrow_K (q,ba,YZ) \rightarrow_K (q,a,Z) \rightarrow_K (q,\epsilon,\epsilon)\end{aligned}$$

2. Wenn man δ als Übergangsrelation auffasst, dann ist

   $$\delta'=\delta\cup\{(q,a,Z)\rightarrow(q,Z_0),\ (q,\boldsymbol{\epsilon},Z_0)\rightarrow(q,\epsilon)\}\ .$$

   Der erste neue Übergang erlaubt den Rücksprung zum Anfang. Der zweite neue Übergang stellt sicher, dass auch das leere Wort akzeptiert wird.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$.

1. Zeigen Sie: Wenn L_1 kontextfrei und L_2 regulär ist, dann ist $L_1\setminus L_2$ kontextfrei.

   Hinweis: Konstruieren sie aus einem PDA und einem DFA/NFA einen neuen PDA.

2. Gilt auch die folgende Aussage? Wenn L_1 regulär und L_2 kontextfrei ist, dann ist $L_1\setminus L_2$ kontextfrei.

Lösungsvorschlag

1. Sei $M_1=(Q,\Sigma,\Gamma,q_0,Z_0,\delta,F)$ ein PDA mit $L_F(M_1)=L_1$, und $M_2=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$ ein DFA mit $L(M_2)=L_2$.

   Wir konstruieren einen neuen PDA $M''=(Q\times Q',\Sigma,\Gamma,(q_0,q_0'),Z_0,$ $\delta'',F\times(Q'\setminus F'))$, dessen Übergangsfunktion δ'' wie folgt definiert ist:

   $$\begin{aligned}\delta''((q,q'),a,Z) &= \{((p,\delta'(q',a)),\gamma)\mid (p,\gamma)\in\delta(q,a,Z)\} \qquad \forall a\in\Sigma\\ \delta''((q,q'),\epsilon,Z) &= \{((p,q'),\gamma)\mid (p,\gamma)\in\delta(q,\epsilon,Z)\}\end{aligned}$$

   Man kann diesen Automaten als das Produkt aus einem DFA und einem Kellerautomaten ansehen. Der neue Automat akzeptiert ein Wort w genau dann, wenn M_1 es akzeptiert, aber M_2 nicht.

2. Diese Aussage gilt nicht. Würde sie gelten, dann könnte man $L_1=\Sigma^*$ setzen und erhielte die Aussage, dass die kontextfreien Sprachen abgeschlossen unter Komplement sind. Das ist aber nicht der Fall (vgl. Satz 3.36)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & T \mid SS\,, \\ T & \rightarrow & aSbSb \mid c\,. \end{array}$$

Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky-Normalform, und bestimmen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $cabcb \in L(G')$.

Lösungsvorschlag

Es gibt keine ϵ-Produktionen, die eliminiert werden müssten. Kettenproduktion $S \rightarrow T$ eliminieren:

$$S \rightarrow aSbSb \mid c \mid SS\;.$$

Nichtterminale für a und b einführen:

$$S \rightarrow ASBSB \mid c \mid SS \qquad A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b$$

Lange Produktion aufspalten:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow AT \mid c \mid SS & A \rightarrow a & B \rightarrow b \\ T \rightarrow SU & U \rightarrow BV & V \rightarrow SB \end{array}$$

Das Ergebnis ist in CNF. Nach dem CYK-Algorithmus ergibt sich die folgende Berechnungstabelle:

15 $\emptyset$				
14 $\emptyset$	25 $\emptyset$			
13 $\emptyset$	24 $\emptyset$	35 U		
12 $\emptyset$	23 $\emptyset$	34 $\emptyset$	45 V	
11 S	22 A	33 B	44 S	55 B
c	a	b	c	b

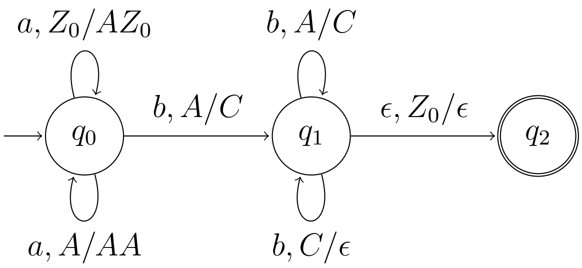
Damit ist $cabcb \notin L(G')$.

Vorbereitung 1

Geben Sie einen DPDA an, der die Sprache $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ mit Endzustand akzeptiert. Erfüllt L die Präfixbedingung?

Lösungsvorschlag

Wir korrigieren die Angabe wie folgt: $L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$.
In graphischer Notation sieht der DPDA wie folgt aus:



L erfüllt offensichtlich die Präfixbedingung

Vorbereitung 2

Welche Eigenschaft muss eine kontextfreie Grammatik haben, damit der daraus konstruierte Kellerautomat (vgl. Satz 3.56) deterministisch ist?

Lösungsvorschlag

In der Konstruktion wird die Grammatik zunächst so modifiziert, dass jede Produktion die Form $A \to bA_1 \dots A_n$ hat, mit $b \in \Sigma \cup \{\boldsymbol{\epsilon}\}$. Wir bezeichnen diese Produktion als (A, b)-Produktion, nach dem Nichtterminal auf der linken Seite und dem ersten Terminalzeichen. Der Kellerautomat, der aus der Grammatik entsteht, ist deterministisch, wenn für jedes Paar $(A, a) \in V \times \Sigma$ maximal eine (A, a) oder eine $(a, \boldsymbol{\epsilon})$-Produktion existiert. Insbesondere hat dan auch jedes ableitbare Wort eine eindeutige Linksableitung.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten den Kellerautomaten $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta)$.
Dabei ist $Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{\#, A\}$. Die Übergangsfunktion δ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, \#) &= \{(q_0, \#A), (q_1, A)\}, \\ \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \epsilon)\}, \end{aligned}$$

und $\delta(q, x, Z) = \emptyset$ für alle anderen Kombinationen aus $q \in Q, x \in \Sigma, Z \in \Gamma$.

1. Konstruieren Sie mit Standardverfahren aus der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik G, die $L_\epsilon(M)$ erzeugt.

2. Vereinfachen Sie die erhaltene Grammatik durch Entfernung überflüssiger Variablen und geben Sie eine knappe informelle Beschreibung der erzeugten Sprache an.

3. Wieviele Produktionen ergeben sich im allgemein aus einem Übergang $(q', \gamma) \in \delta(q, b, Z)$ im Kellerautomaten?

Lösungsvorschlag

1. Wir verfahren nach Satz 3.59 der Vorlesung und konstruieren direkt eine äquivalente Grammatik, die wir dann in Teilaufgabe 2 vereinfachen werden.

   Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$. Wir schreiben die Nichtterminale außer S als Tripel $[\ ,\ ,\ ]$. Dann besteht P aus den folgenden Produktionen.

   S-Produktionen:

   $$S \to [q_0, \#, q_0] \ \mid \ [q_0, \#, q_1] \qquad \text{(2 Prod.)}$$

   Produktionen zu $\delta(q_0, a, \#) \ni (q_0, \#A)$:
   Für $i, j \in \{0, 1\}$:

   $$[q_0, \#, q_i] \to a[q_0, \#, q_j][q_j, A, q_i] \qquad \text{(4 Prod.)}$$

   Produktionen zu $\delta(q_0, a, \#) \ni (q_1, A)$:
   Für $i \in \{0, 1\}$:

   $$[q_0, \#, q_i] \to a[q_1, A, q_i] \qquad \text{(2 Prod.)}$$

   Produktion zu $\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$:

   $$[q_1, A, q_1] \to b$$

2. Wir haben eine Grammatik mit 9 Nichtterminalen und 9 Produktionen erhalten, von denen viele aber keinen Beitrag zur Sprache leisten: Von den Nichtterminalen der Form $[q_i, A, q_j]$ ist lediglich $[q_1, A, q_1]$ erzeugend. Daher können die Produktionen, die die anderen Symbole enthalten entfernt werden.

   So erhalten wir die Grammatik

   $$\begin{aligned} S &\to [q_0, \#, q_1] \\ [q_0, \#, q_1] &\to a[q_0, \#, q_1][q_1, A, q_1] \\ [q_0, \#, q_1] &\to a[q_1, A, q_1] \\ [q_1, A, q_1] &\to b \end{aligned}$$

   Nach Umbenennung bleibt die folgende übersichtliche Grammatik übrig:

   $$S \to X \qquad X \to aXB \ \mid \ aB \qquad B \to b$$

3. Aus einem Übergang $(q', \gamma) \in \delta(q, b, Z)$ erhält man $|Q|^{|\gamma|}$ Produktionen.

Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie eine Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$, die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt.

Lösungsvorschlag

Wir setzen den Kopf der Turingmaschine zu Beginn rechts auf das erste Zeichen der Eingabe, falls sie nicht leer ist. Am Ende der Berechnung setzen wir den Kopf rechts neben die Ausgabe.

Die Berechnung erfolgt, indem jeweils ein Strich am rechten Anfang der Strichfolge durch eine Markierung x ersetzt wird und anschließend am linken Ende der Strichfolge eine Markierung y angefügt wird. Falls keine Strichzeichen mehr vorhanden sind, werden alle Zeichen in Striche umgewandelt.

Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{V,0}, \square, F)$ mit $Q = \{q_{V,0}, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{V,f}\}$, $\Sigma = \{|\}$, $\Gamma = \{|, x, y, \square\}$ und $F = \{q_{V,f}\}$.

Die Zustände und Zeichenmengen kann man auch der folgenden Tabelle der Übergangsfunktion δ entnehmen.

Übergang			Kommentar
$\delta(q_{V,0}, \square)$	$\rightarrow$	$(q_{V,f}, \square, R)$	nach rechts und „Stopp“
$\delta(q_{V,0}, \|)$	$\rightarrow$	$(q_1, \|, N)$	$\|$ muss verdoppelt werden
$\delta(q_1, \|)$	$\rightarrow$	(q_2, x, L)	x ist Hilfszeichen
$\delta(q_1, y)$	$\rightarrow$	(q_1, y, L)	nach links zum Anfang, weil keine Striche mehr da sind
$\delta(q_1, \square)$	$\rightarrow$	$(q_4, \square, R)$	nach rechts gehen zum Anfang
$\delta(q_2, \|)$	$\rightarrow$	$(q_2, \|, L)$	nach links, um y an den Anfang zu schreiben
$\delta(q_2, y)$	$\rightarrow$	(q_2, y, L)	nach links, um y an den Anfang zu schreiben
$\delta(q_2, \square)$	$\rightarrow$	(q_3, y, R)	y an den Anfang schreiben
$\delta(q_3, y)$	$\rightarrow$	(q_3, y, R)	nach rechts zum nächsten x
$\delta(q_3, \|)$	$\rightarrow$	$(q_3, \|, R)$	nach rechts zum nächsten x
$\delta(q_3, x)$	$\rightarrow$	(q_1, x, L)	zum Verarbeitung des nächsten $\|$
$\delta(q_4, y)$	$\rightarrow$	$(q_4, \|, R)$	beim Rücklauf Umwandlung der x, y in $\|$
$\delta(q_4, x)$	$\rightarrow$	$(q_4, \|, R)$	beim Rücklauf Umwandlung der x, y in $\|$
$\delta(q_4, z)$	$\rightarrow$	$(q_{V,f}, z, N)$	falls $z \notin \{x, y\}$, dann „Stopp“.